ISSN 2078-8975

ВЕСТНИК КЕМЕРОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

КемГУ

Выпуск 3/1 (47)

BULLETIN OF KEMEROVO STATE UNIVERSITY

Issue 3/1 (47)

КЕМЕРОВО
2011

ВЕСТНИК
КЕМЕРОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Журнал теоретических и прикладных исследований.
Издается с 1999 г.
Выходит 1 раз в квартал
№ 3/1 (47) 2011

Журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии

СОДЕРЖАНИЕ

УЧРЕДИТЕЛЬ:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет»

Редактор выпуска – **З. А. Кунашева.**
Компьютерная верстка – **В. А. Шерина.**

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Вестник Кемеровского государственного университета.

Журнал теоретических и прикладных исследований

Печатается по решению научно-методического и редакционно-издательского советов Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет».

Выходит 1 раз в квартал.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации:
ПИ ФС77-40023 от 04.06.2010 г.

Адрес редакции*:* 650043, г. Кемерово,
ул. Красная, 6, к. 225, редакция журнала «Вестник Кемеровского государственного университета».
Телефон: (3842)58-28-39, 58-80-24,
факс (3842)58-38-85,
E-mail: keafa@kemsu.ru, gos@kemsu.ru.
Адрес сайта:
http://www.kemsu.ru/kemsu_info/science/bulletin.htm.

Адрес издателя*:* 650043, г. Кемерово,
ул. Красная, 6.
Телефон: (3842) 58-28-39,
факс (3842)58-12-26,
E-mail: rector@kemsu.ru.

Подписные индексы:
Объединенный каталог «Пресса России» – 42150,
Каталог российской прессы «Почта России» – 51944.

Подписано к печати 7.11.2011 г.
Формат А 4.
Печать офсетная.
Бумага Sveto Copy.
Усл. печ. л. – 37.5.
Уч.- изд. л. – 35.3.
Тираж 500 экз.
Заказ № ________
Цена свободная.

Отпечатано в ООО «ИНТ».
650003, Кемерово,
пр. Химиков, 43а.

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Данный специальный дополнительный выпуск[1] № 3/1 Вестника КемГУ посвящен публикации избранных лекций и докладов Международной школы-конференции «Геометрия и анализ», которая была организована Институтом математики СО РАН и Кемеровским государственным университетом при поддержке РФФИ (грант № 11-01-06815-моб_г) и состоялась в июне 2011 года в г. Кемерово. Разделы журнала соответствуют основным научным направлениям школы-конференции «Геометрия и анализ».

[1] Выпуск журнала «Вестник КемГУ» № 3/1 осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-06815-моб_г.

CONTENTS

GEOMETRY OF 3D–MANIFOLDS

RIEMANNIAN GEOMETRY

Bulletin of the days of the Kemerovo State University.

Journal of theoretical and applied research

Printed by the scientific and editorial and publishing tips from the Federal public budget institution of higher professional education «Kemerovo State University».

It is issued once a quarter.

The magazine is registered in the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications (Roskomnadzor)

Certificate of registration is:
ПИ ФС77-40023 of 04.06.2010

Address Editor: 650043, Kemerovo, Krasnaya Str. 6, room 225, Editorial office "Vestnik of Kemerovo State University".
Telephone: 8 (3842) 58-28-39, 58-80-24
Fax: 8 (3842) 58-38-85.
E-mail: keafa@kemsu.ru , gos@kemsu.ru.
Web-site:
http://www.kemsu.ru/science/bulletin.htm.en.

Address of the publisher*:* 650043, Kemerovo, Krasnaya Str. 6.
Telephone: (3842) 58-28-39,
Fax: (3842)58-12-26,
E-mail: rector@kemsu.ru.

Subscribing indexes:
Unity catalogue "The Press of Russia" – 42150,
Catalogue of Russian press "The Post of Russia" – 51944.

Signed to printing 7.11.2011 г.
Format A4
Offset printing
Paper Sveto Copy
Printing sheet – 37.5.
Edition sheet – 35.3.
Circulation 500 copies.
Order __________
Price free.

It is printed in OOO «INT".
650003, Kemerovo,
prospect of Chemists, 43a.

COMPLEX ANALYSIS

REAL ANALYSIS

This special additional issue[2] № 3/1 of Bulletin of Kemerovo State University is devoted to the publication of the select lectures and reports of the International School-Conference «Geometry and analysis» which has been organized by Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences and the Kemerovo State University and was supported by RFBR (the grant № 11-01-06815-моб_г) and had taken place in June, 2011 at Kemerovo. Journal sections correspond to the basic scientific directions of school-conference «Geometry and analysis».

[2] Journal issue «Bulletin of KemSU» № 3/1 is supported by RFBR, the grant № 11-01-06815-моб_г.

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

УДК 514.13+514.132

ОБ ОБЪЕМАХ МНОГОГРАННИКОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Н. В. Абросимов

ON VOLUMES OF POLYHEDRA IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

N. V. Abrosimov

В работе представлен обзор основных результатов по вычислению объемов многогранников в евклидовом, сферическом пространстве и пространстве Лобачевского. Также приведены результаты автора, дающие решение известной проблемы Зейделя об объеме неевклидовых тетраэдров.

We overview the volume calculations for polyhedra in Euclidean, spherical and hyperbolic spaces. We also present some authors results, which provide a solution for Seidel's problem on the volume of non-Euclidean tetrahedron.

Ключевые слова: объемы многогранников, сферические и гиперболические объемы, проблема Зейделя, идеальный тетраэдр, ортосхема.

Keywords: volumes of polyhedra, spherical and hyperbolic volumes, Seidel's problem, ideal tetrahedron, orthoscheme.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 09–01–00255, 10–01–00642 и 12-01-00210), Комплексного интеграционного проекта СО РАН — УрО РАН № 46, Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ–6613.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 02.740.11.0457) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/3707).

1. Объемы евклидовых многогранников

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. В основном это связано с тем, что объем фундаментального многогранника является одним из основных инвариантов трехмерного многообразия.

Вероятно, первый результат в данном направлении принадлежит Тартальи (Tartaglia, 1499–1557), который выразил объем евклидова тетраэдра через длины его ребер. Удобно выписать указанное соотношение в форме равенства, в котором справа стоит определитель Кэли—Менгера.

Теорема 1. [Тарталья, XVI в.]. *Пусть T — тетраэдр в евклидовом пространстве с длинами ребер d_{ij}, $1 \leq i < j \leq 4$. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой:*

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в приведенном соотношении объем вычисляется как корень квадратного уравнения, коэффициенты которого являются многочленами с целыми коэффициентами от длин ребер. Удивительно, но этот результат можно обобщить на случай произвольного евклидова многогранника. Около пятнадцати лет назад И. Х. Сабитов [1] доказал соответствующую теорему, основываясь на теории сокращений (разделе коммутативной алгебры и алгебраической геометрии, посвященном алгоритмическим вопросам сокращения многочленов от многих переменных). Теорема Сабитова справедлива для многогранников, гомеоморфных сфере. Спустя короткое время, Р. Коннелли со своей ученицей Анке Вальц усовершенствовали доказательство И. Х. Сабитова, доказав ту же теорему для общего случая двухмерной ориентируемой полиэдральной поверхности [2].

Теорема 2. [Сабитов, 1996; Connelly, Sabitov, Walz, 1997]. *Пусть P — евклидов многогранник с жесткими гранями и длинами ребер d_{ij}. Тогда объем $V(P)$ — это корень алгебраического уравнения четной степени, чьи коэффициенты являются многочленами с рациональными кэффициентами от d_{ij}^2 и зависят от комбинаторного типа P.*

Комбинаторным типом многогранника называют набор его вершин с указанием, какие из них соединяются ребрами.

Стоит отметить, что эта замечательная теорема носит чисто теоретический характер. Конкретный вид указанного уравнения известен лишь в некоторых частных случаях, например для октаэдров с симметриями [3]. С другой стороны, теорема Сабитова позволяет без труда решить одну хорошо известную проблему.

Гипотеза о кузнечных мехах. [Connelly, Sullivan, конец 1970-х]. *Объем изгибаемого многогранника не меняется при изгибании.*

Предполагается, что при изгибании двугранные углы многогранника изменяются непрерывным образом, в то время как грани остаются жесткими.

Классическая теорема Коши (1813) утверждает, что выпуклый многогранник с жесткими гранями сам является жестким. Для невыпуклых многогранников это не так, среди них известны примеры изгибаемых многогранников. Первый такой пример был построен Брикаром (Brikard, 1897), он представляет собой самопересекающийся октаэдр. Пример изгибаемого многогранника без самопересечений впервые был построен Р. Коннелли (Connelly, 1978).

По определению, при изгибании многогранника его комбинаторный тип не меняется, и набор длин ребер фиксирован. Тогда по теореме 1 все значения объема многогранника при изгибании — это корни одного и того же алгебраического уравнения с постоянными коэффициентами. Множество таких корней конечно, каким бы сложным и громоздким ни было указанное уравнение. Следовательно, не остается другой возможности, кроме той, чтобы объему быть величиной постоянной.

Месяц назад в архиве Корнельского университета появился препринт А. А. Гайфуллина [4], в котором аналог теоремы Сабитова доказывается для четырехмерных полиэдров. Для неевклидовых многогранников аналога теоремы 1 нет. Из приведенных ниже результатов будет видно, что объем многогранника в сферическом пространстве или в пространстве Лобачевского, как правило, не выражается через элементарные функции.

2. Объемы неевклидовых тетраэдров

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Гаусс, один из создателей неевклидовой геометрии, использовал слово «die Dschungel» (джунгли) в отношении вычисления гиперболических объемов.

2.1. Объемы ортосхем в S^3 и H^3

Формулы для объема неевклидовых тетраэдров в некоторых частных случаях были известны еще Лобачевскому, Бойяи и Шлефли. Так, например, Л. Шлефли нашел объем биортогонального тетраэдра (ортосхемы) в S^3 [5].

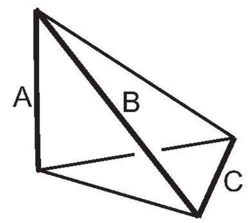


Рис. 1. Ортосхема $T = T(A, B, C)$ с двугранными углами A, B и C

Теорема 3. [Schläfli, 1858]. *Пусть T — ортосхема в сферическом пространстве с двугранными углами A, B и C. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой $V = \frac{1}{4}S(A,B,C)$, где*

$$S(\frac{\pi}{2} - x, y, \frac{\pi}{2} - z) = \widehat{S}(x,y,z) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D - \sin x \sin z}{D + \sin x \sin z}\right)^m \times \\ \times \frac{\cos 2mx - \cos 2my + \cos 2mz - 1}{m^2} - x^2 + y^2 - z^2$$

и $D \equiv \sqrt{\cos^2 x \cos^2 z - \cos^2 y}$.

Появившуюся в теореме 3 функцию S принято называть функцией Шлефли. Объем гиперболической ортосхемы получили независимо друг от друга Я. Бойяи [6] и Н. И. Лобачевский [7]. Следующая теорема представляет результат Лобачевского в виде совершенно простой формулы. В таком виде она была получена Г. С. М. Кокстером [8].

Теорема 4. [Лобачевский, 1835; Coxeter, 1935]. *Пусть T — ортосхема в гиперболическом пространстве с двугранными углами A, B и C. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой $V = \frac{i}{4}S(A,B,C)$, где $S(A,B,C)$ — функция Шлефли.*

2.2. Объем гиперболического тетраэдра общего вида

Несмотря на то, что частные результаты об объемах неевклидовых тетраэдров были известны давно, формула объема для гиперболического тетраэдра общего вида до недавнего времени оставалась неизвестной. Общий алгоритм получения такой формулы был предложен в В.-И. Хсянгом в 1988 году [9]. Полное решение удалось получить лишь десять лет спустя — в работе корейских математиков Ю. Чо и Х. Кима [10] предложена формула, которая, однако, несимметрична относительно перестановки аргументов. Следующее продвижение было достигнуто японскими математиками: сначала Дж. Мураками и У. Яно [11] предложили формулу, выражающую объем через двугранные углы симметричным образом, а годом позже А. Ушиджима [12] привел в своей работе доказательство этой формулы и исследовал случай усеченного гиперболического тетраэдра.

Следует отметить, что во всех перечисленных работах объем выражается как линейная комбинация 16 дилогарифмов или функций Лобачевского. Аргументы этих функций зависят от двугранных углов тетраэдра и некоторого дополнительного параметра, который является корнем квадратного уравнения с комплексными коэффициентами сложного вида.

Геометрический смысл полученной формулы удалось объяснить Г. Лейбону (G. Leibon) с точки зрения симметрии Редже. Ясное описание этих идей и полное геометрическое доказательство указанной формулы было дано Яной Моханти [13]. Ей удалось доказать эквивалентность симметрии Редже и равносоставленности (scissors congruence) в гиперболическом пространстве.

В 2005 году Д. А. Деревнин и А. Д. Медных [14] предложили следующую интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра.

Теорема 5. [Деревнин, Медных, 2005]. *Пусть $T(A,B,C,D,E,F)$ — компактный гиперболический тетраэдр с двугранными углами A,B,C,D,E,F. Тогда объем $V=V(T)$ задается формулой:*

$$V=-\frac{1}{4}\int\limits_{z_1}^{z_2}\log\frac{\cos\frac{A+B+C+z}{2}\cos\frac{A+E+F+z}{2}\cos\frac{B+D+F+z}{2}\cos\frac{C+D+E+z}{2}}{\sin\frac{A+B+D+E+z}{2}\sin\frac{A+C+D+F+z}{2}\sin\frac{B+C+E+F+z}{2}\sin\frac{z}{2}}\,dz\,,$$

где z_1 и z_2 — корни подынтегрального выражения, удовлетворяющие условиям $0<z_2-z_1<\pi$. Более точно:

$$\begin{aligned}
&z_1=\arctan\frac{k_3}{k_4}-\arctan\frac{k_1}{k_2}\,,\quad z_2=\pi-\arctan\frac{k_3}{k_4}-\arctan\frac{k_1}{k_2}\,,\quad \text{где}\\
&k_1=-\cos S-\cos(A+D)-\cos(B+E)-\cos(C+F)-\cos(D+E+F)-\\
&\quad-\cos(D+B+C)-\cos(A+E+C)-\cos(A+B+F)\,,\\
&k_2=\sin S+\sin(A+D)+\sin(B+E)+\sin(C+F)+\sin(D+E+F)+\\
&\quad+\sin(D+B+C)+\sin(A+E+C)+\sin(A+B+F)\,,\\
&k_3=2\,(\sin A\sin D+\sin B\sin E+\sin C\sin F)\,,\\
&k_4=\sqrt{k_1^2+k_2^2-k_3^2}\,,\\
&S=A+B+C+D+E+F\,.
\end{aligned}$$

Заметим, что все параметры в теореме 5 вещественные и имеют естественный геометрический смысл, никакой неоднозначности при вычислении интеграла не возникает. Доказательство теоремы 5 основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами в форме теоремы синусов-тангенсов. Основным шагом при доказательстве является применение классической дифференциальной формулы Шлефли (см., например, [15]), выражающей дифференциал объема тетраэдра через длины его ребер и дифференциалы двугранных углов. Формула Мураками-Яно может быть получена прямыми вычислениями, как следствие из теоремы 5.

2.3. Формула Скорца

Удивительно, но более ста лет назад, в 1906 г., итальянский математик Гаетано Скорца (Gaetano Scorza или Sforza, 1876–1939) нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. Этот факт приобрел известность после дискуссии А. Д. Медных с Х. М. Монтезиносом (J. M. Montesinos) на конференции в Эль Бурго д'Осма (Испания) в августе 2006 г. К сожалению, выдающаяся работа Скорца [16] до этого была полностью забыта.

Пусть T — гиперболический тетраэдр с двугранными углами A,B,C,D,E,F, где A, B и C лежат при одной вершине, а D, E и F соответственно противолежат им.

Матрица Грама $G(T)$ определяется следующим образом:

$$G=\begin{pmatrix}1&-\cos A&-\cos B&-\cos F\\-\cos A&1&-\cos C&-\cos E\\-\cos B&-\cos C&1&-\cos D\\-\cos F&-\cos E&-\cos D&1\end{pmatrix}.$$

Теорема 6. [Sforza, 1906]. *Пусть T — гиперболический тетраэдр с матрицей Грама G. Рассмотрим $G=G(A)$ как функцию двугранного угла A. Тогда объем $V=V(T)$ задается формулой*

$$V=-\frac{1}{4}\int\limits_{A_0}^{A}\log\frac{c_{34}(A)+\sqrt{-\det G(A)}\,\sin A}{c_{34}(A)-\sqrt{-\det G(A)}\,\sin A}\,dA\,,$$

где A_0 — подходящий корень уравнения $\det G(A)=0$ и $c_{34}(A)$ — соответствующий минор матрицы $G(A)$.

Формула Скорца, хотя и имеет компактную запись в терминах миноров матрицы Грама, не так проста. Используя ее для вычислений, важно помнить, что при неправильном выборе аналитической ветви указанной интегральной функции результат получится неверный.

Отметим, что в случае симметричного тетраэдра противоположные двугранные углы которого попарно равны, формула объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт был установлен самим Лобачевским [7] для идеального гиперболического тетраэдра.

2.4. Объем идеального тетраэдра

Рассмотрим тетраэдр T в пространстве Лобачевского, все вершины которого лежат на бесконечности (см. Рис. 2). Такие тетраэдры называют идеальными.

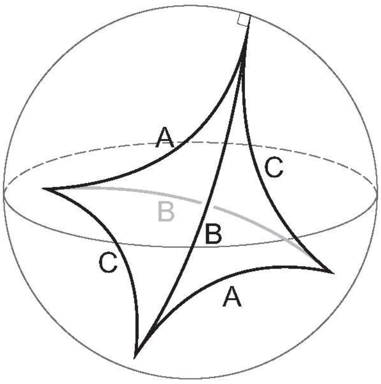


Рис. 2. Идеальный тетраэдр $T = T(A, B, C)$ с двугранными углами A, B и C

Противолежащие двугранные углы идеального тетраэдра попарно равны, а сумма двугранных углов при любой вершине равна $A + B + C = \pi$.

Объем идеального тетраэдра был известен еще Лобачевскому [7]. Дж. Милнор представил этот результат в виде элегантной формулы [17].

Теорема 7. [Лобачевский, 1835; Milnor, 1982]. *Пусть T — идеальный гиперболический тетраэдр с двугранными углами A, B и C. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой*

$$V = \Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C),$$

где $\Lambda(x) = -\int_0^x \log|2\sin t|dt$ *— функция Лобачевского.*

Более сложный случай, когда хотя бы одна вершина тетраэдра лежит на бесконечности, был исследован Э. Б. Винбергом [15].

3. Проблема Зейделя

В 1986 году Дж. Зейдель [18] сформулировал гипотезу о том, что объем идеального гиперболического тетраэдра можно выразить как функцию от определителя и перманента его матрицы Грама. Несмотря на то, что формула, выражающая объем такого тетраэдра через двугранные углы, была известна давно, проблема долго не поддавалась решению. Спустя десять лет, американскими математиками И. Ривиным и Ф. Лю был предложен усиленный вариант гипотезы Зейделя. Они предположили, что объем симметричного тетраэдра (гиперболического или сферического) зависит лишь от определителя его матрицы Грама.

Пусть T — неевклидов тетраэдр с двугранными углами $A, B, C, D,$ и F (см. Рис. 3).

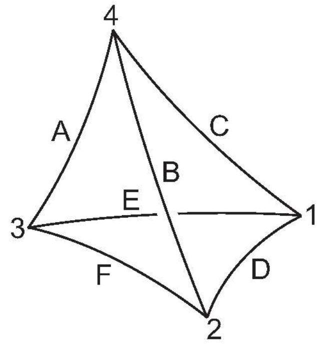


Рис. 3. Тетраэдр $T = T(A, B, C, D, E, F)$

Хорошо известно [15], что в гиперболическом и сферическом пространствах тетраэдр T однозначно, с точностью до изометрии, определяется своей матрицей Грама:

$$G = \langle -\cos\theta_{ij}\rangle_{ij=1,2,3,4} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что перманент матрицы $M = (m_{ij})_{ij=1\dots n}$ задается формулой

$$\operatorname{per} M = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \operatorname{per} M_{ij},$$

где M_{ij} — матрица, полученная из M вычеркиванием i-той стоки и j-того столбца.

Условия существования для сферических и гиперболических тетраэдров в терминах матрицы Грама приведены соответственно в [19] и [20].

3.1. Усиленная гипотеза Зейделя

В сферическом случае ответ дает следующая теорема автора [21].

Теорема 8. [Абросимов, 2009]. *Существует однопараметрическое семейство симметричных сферических тетраэдров с постоянным значением определителя матрицы Грама, объем которых меняется со значением параметра.*

Для доказательства построим указанное семейство. Рассмотрим тетраэдр $T(A, D)$, у которого два противоположных двугранных угла равны соответственно A и D, а все оставшиеся — прямые. Нетрудно убедиться, что объем такого тетраэдра равен $\dfrac{AD}{2}$, а определитель его матрицы Грама $\det G = \sin^2 A \sin^2 D$.

Среди множества всех $T(A, D)$, у которых $0 < A, D < \pi$, выберем семейство тетраэдров $T_c(A, D) = T\left(A, \dfrac{c}{\sin A}\right)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама, $\det G = c^2$, где c — некоторая константа, $0 < c < \min\{\sin A, \sin D\}$.

Объем таких тетраэдров выражается формулой $V(T_c) = \dfrac{A}{2} \arcsin \dfrac{c}{\sin A}$, то есть зависит не только от выбора константы c, но и от значения свободного параметра A. Тем самым, исходное семейство тетраэдров построено.

В гиперболическом случае построить элементарный контрпример к усиленной гипотезе Зейделя не удается. Тем не менее было доказано [21] аналогичное утверждение.

Теорема 9. [Абросимов, 2009]. *Существует однопараметрическое семейство симметричных гиперболических тетраэдров с постоянным значением определителя матрицы Грама, объем которых меняется со значением параметра.*

Доказательство основано на следующих соображениях. Рассмотрим произвольный гиперболический тетраэдр T с двугранными углами A, B, C, D, E, F, где A, B и C лежат при одной вершине, а D, E и F соответственно противолежат им. Зафиксируем все двугранные углы, кроме двух противолежащих, например A и D. Поскольку множество гиперболических тетраэдров открыто [19, 20], то, меняя значения A и D в достаточно малых пределах, будем по-прежнему получать гиперболические тетраэдры. Среди множества таких тетраэдров $T(A, D)$ выделим семейство тетраэдров $T_c(A, D)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама, $\det G = -c^2 < 0$. Последнее условие означает, что дифференциал функции $\det G$ равен нулю. Учитывая, что углы A и D переменны, а остальные фиксированы, имеем:

$$-d \det G = 2\, c_{12} \sin A\, dA + 2\, c_{34} \sin D\, dD = 0,$$

где c_{ij} — алгебраическое дополнение ij-го элемента матрицы G. Указанное соотношение позволяет рассматривать угол D как функцию от угла A. При этом

$$\frac{dD}{dA} = -\frac{c_{12} \sin A}{c_{34} \sin D}.$$

Производная объема как сложной функции от угла A равна

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial D} \frac{dD}{dA}.$$

Отметим, что, согласно классической формуле Шлефли (см., например, [15]),

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -\frac{\ell_A}{2} \text{ и } \frac{\partial V}{\partial D} = -\frac{\ell_D}{2},$$

где ℓ_A и ℓ_D — длины соответствующих ребер тетраэдра.

Длины ребер, в свою очередь, могут быть выражены через двугранные углы [20, 22]:

$$\ell_A = \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{-\det G}\, \sin A}{c_{34}},$$
$$\ell_D = \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{-\det G}\, \sin D}{c_{12}}.$$

Сопоставляя указанные выражения, в результате несложных вычислений, получим:

$$\frac{dV}{dA} = -\frac{\operatorname{th} \ell_A}{2} \left(\frac{\ell_A}{\operatorname{th} \ell_A} - \frac{\ell_D}{\operatorname{th} \ell_D} \right).$$

Для выполнения условий теоремы необходимо, чтобы значение объема менялось при изменении параметра A, то есть $\dfrac{dV}{dA} \neq 0$, что эквивалентно неравенству $\ell_A \neq \ell_D$. Таким образом, семейство тетраэдров $T_c(A, D)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама имеет непостоянный объем при $\ell_A \neq \ell_D$. Нетрудно теперь построить бесконечное семейство тетраэдров, удовлетворяющих последнему условию при $A \neq D$. Например, такому условию удовлетворяют «почти-симметричные» тетраэдры с углами $A \neq D, B = E$ и $C = F$. Напомним, что при фиксированном c семейство $T_c(A, D)$ зависит от одного свободного параметра.

3.2. Исходная гипотеза Зейделя

Решение проблемы Зейделя, сформулированной в [18], дает следующая теорема автора [23].

Теорема 10. [Абросимов, 2010]. *Объем идеального гиперболического тетраэдра можно выразить как функцию от определителя и перманента его матрицы Грама при условии, что известно, является ли он остроугольным или тупоугольным*[1].

Известно (см., например, [17]), что противолежащие двугранные углы идеального тетраэдра попарно равны, а сумма двугранных углов при любой вершине равна $A + B + C = \pi$. Выпишем определитель и перманент матрицы Грама идеального тетраэдра с двугранными углами $A, B, \pi - A - B$. Имеем:

$$\det G = -4 \sin^2 A\, \sin^2 B\, \sin^2(A + B),$$
$$\operatorname{per} G = 4 + 4 \cos^2 A\, \cos^2 B\, \cos^2(A + B).$$

Для доказательства теоремы 10 достаточно показать, что двугранные углы идеального тетраэдра однозначно (с точностью до перестановки) определяются по значениям $\det G$ и $\operatorname{per} G$

[1] Тупоугольным будем называть тетраэдр, у которого хотя бы один двугранный угол тупой.

при условии, что известно, является ли он остроугольным или тупоугольным. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев. Не уменьшая общности, можно считать, что $0 < A \le B \le C = \pi - A - B$. Тем самым двугранные углы A, B — a priori острые, а угол C либо острый, либо тупой. В первом случае рассматриваемый тетраэдр остроугольный, во втором — тупоугольный.

Введем новые переменные

$$x = \sin A\ \sin B, \quad y = \cos A\ \cos B.$$

Покажем, что при фиксированной левой части решения системы уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\det G}{4} = x^2(1-(y-x)^2) \\ \dfrac{\operatorname{per} G - 4}{4} = y^2(y-x)^2 \end{cases}$$

отвечают одному тетраэдру (с точностью до конгруэнтности) в каждом из двух рассматриваемых случаев.

Допустим, что найдется пара неравных между собой решений (a, b) и (x, y), удовлетворяющих системе. В таком случае будут выполнены тождества:

$$\begin{cases} a^2(1-(b-a)^2) = x^2(1-(y-x)^2) \\ b^2(b-a)^2 = y^2(y-x)^2 \end{cases}.$$

Условие, что угол C острый, означает, что $\cos A \cos B - \sin A \sin B = -\cos C < 0$, то есть оба решения удовлетворяют неравенствам $b\,(b-a) < 0$ и $x\,(x-y) < 0$. В случае, когда угол C тупой, имеют место обратные неравенства. Такое наблюдение позволяет избавиться от квадратов во втором уравнении, не потеряв при этом решений:

$$\begin{cases} a^2(1-(b-a)^2) = x^2(1-(y-x)^2) \\ b\,(b-a) = y\,(y-x) \end{cases}.$$

Выразив x из второго уравнения и подставив в первое, получим многочлен шестой степени от y. По счастью, он раскладывается на линейные множители $b - y$, $b + y$ и биквадратный многочлен $y^4 - (a^2 + a^4 + 2\,ab - 2\,a^3b - b^2 + 2\,ab^3 - b^4)\,y^2 + {} + a^4b^2 - 4\,a^3b^3 + 6\,a^2b^4 - 4\,ab^5 + b^6$.

Таким образом, все решения могут быть найдены в радикалах. Подставляя выражения x, y через двугранные углы, нетрудно убедиться, что различные решения системы соответствуют одному идеальному тетраэдру $T(A, B, C)$ с точностью до переобозначения его двугранных углов.

Отметим, что в теореме 10 нельзя избавиться от условия, что тетраэдр является остроугольным или тупоугольным. Этот факт подтверждает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим пару идеальных тетраэдров: тупоугольный $T_1(s,\, s,\, \pi - 2\,s)$ и остроугольный $T_2\left(t, \dfrac{\pi - t}{2}, \dfrac{\pi - t}{2}\right)$, где

$$s = \arccos \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 + \sqrt{170\sqrt{17} - 698}}}}{2\sqrt{2}},$$

$$t = \arccos\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{8} + \sqrt{\frac{5\sqrt{17} - 13}{2}}\right).$$

Определители и перманенты матриц Грама указанных тетраэдров совпадают и равны соответственно

$$\det G(T_1) = \det G(T_2) = \frac{107 - 51\sqrt{17}}{128},$$

$$\operatorname{per} G(T_1) = \operatorname{per} G(T_2) = \frac{163 + 85\sqrt{17}}{128}.$$

При этом объемы тетраэдров T_1 и T_2 различны и равны соответственно 0.847365 и 1.01494 .

Литература

[1] Сабитов, И. Х. *Объем многогранника как функция длин его ребер* / И. Х. Сабитов // Фундамент. и прикл. матем. – 1996. – Т. 2, № 1. – С. 305 – 307.

[2] Connelly, R. *The Bellows Conjecture* / R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz // Contrib. Algebra Geom. – 1997. – Vol. 38. – P. 1 – 10.

[3] Галиулин, Р. В. *Некоторые приложения формулы для объема октаэдра* / Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76, № 1. – С. 27 – 43.

[4] Gaifullin, A. *Sabitov polynomials for polyhedra in four dimensions* / A. Gaifullin.– [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1108.6014, свободный.

[5] Schläfli, L. *Theorie der vielfachen Kontinuität* / L. Schläfli // Gesammelte mathematishe Abhandlungen. – Basel: Birkhäuser, 1950.

[6] Bolyai, J. *Appendix. The Theory of Space* / János Bolyai (F. Kárteszi ed.) – Budapest: Akadémiai Kiadó, 1987. – 239 p.

[7] Лобачевский, Н. И. *Воображаемая геометрия* / Н. И. Лобачевский // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1835. – I книжка. –С. 3 – 88.

[8] Coxeter, H. S. M. *The functions of Schläfli and Lobatschefsky* / H. S. M. Coxeter // Quart. J. Math. Oxford. – 1935. – Vol. 6, № 1. – P. 13 – 29.

[9] Hsiang, W.-Yi. *On infinitesimal symmetrization and volume formula for spherical or hyperbolic tetrahedrons* / W.-Yi. Hsiang // Quart. J. Math. Oxford (2). – 1988. – Vol. 39. – P. 463 – 468.

[10] Cho, Yu. *On the volume formula for hyperbolic tetrahedra* / Yu. Cho, H. Kim // Disc. and Comp. Geometry. – 1999. – Vol. 22. – P. 347 – 366.

[11] Murakami, J. *On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron* / J. Murakami, M. Yano // Comm. Anal. Geom. – 2005. – Vol. 13. – P. 379 – 200.

[12] Ushijima, A. *Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* / A. Ushijima // Non-Euclidean Geometries. Mathematics and Its Applications. – 2006. – Vol. 581. – P. 249 – 265.

[13] Mohanty, Ya. *The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space* / Ya. Mohanty // Alg. Geom. Topology. – 2003. – Vol. 3. – P. 1 – 31.

[14] Деревнин, Д. А. *О формуле объема гиперболического тетраэдра* / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных // Усп. мат. наук. – 2005. – Т. 60, № 2. – P. 159 – 160.

[15] Винберг, Э. Б.*Геометрия-2. Современные проблемы математики, Т. 29* / Э. Б. Винберг – М.: ВИНИТИ (Итоги науки и техники), 1988.

[16] Sforza, G. *Spazi metrico-proiettivi* / G. Sforza // Ricerche di Estensionimetria differenziale III. – 1906. – Vol. 8. – P. 3 – 66.

[17] Milnor, J. *Hyperbolic geometry: the first 150 years* / J. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 6, № 1. – P. 9 – 24.

[18] Seidel, J. J. *On the volume of a hyperbolic simplex* / J. J. Seidel // Stud. Sci. Math. Hung. – 1986. – Vol. 21. – P. 243 – 249.

[19] Luo, F. *On a problem of Fenchel* / F. Luo // Geometriae Dedicata. – 1997. – Vol. 64. – P. 227 – 282.

[20] Ushijima, A. *Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* / A. Ushijima // Non-Euclidean Geometries. Mathematics and Its Applications. – 2006. – Vol. 581. – P. 249 – 265.

[21] Абросимов, Н. В. *К решению проблемы Зейделя об объемах гиперболических тетраэдров* / Н. В. Абросимов // Сиб. электрон. мат. изв. – 2009. – Т. 6. – С. 211 – 218.

[22] Медных, А. Д. *Элементарные формулы для гиперболического тетраэдра* / А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, № 4. – С. 831 – 841.

[23] Абросимов, Н. В. *Проблема Зейделя об объеме неевклидового тетраэдра* / Н. В. Абросимов // Доклады АН. – 2010. – Т. 435, № 1. – С. 7–10.

УДК 514.132

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА, ОБЛАДАЮЩЕГО mmm-СИММЕТРИЕЙ

Г. А. Байгонакова, М. Годой-Молина, А. Д. Медных

ON GEOMETRICAL PROPERTIES OF A HYPERBOLIC OCTAHEDRON HAVING mmm-SYMMETRY

G. A. Baigonakova, M. Godoy-Molina, A. D. Mednykh

В настоящей работе изучаются геометрические свойства гиперболического октаэдра, обладающего mmm - симметрией, то есть остающегося инвариантным при отображениях в трех взаимно ортогональных плоскостях. Получены тригонометрические соотношения, связывающие длины ребер и двугранные углы указанного многогранника (теоремы синусов-тангенсов). Это дает возможность выразить длины через двугранные углы. Далее, с помощью формулы Шлефли, находится объем рассматриваемого октаэдра в одном из важных геометрических случаев.

In the present paper geometric properties are investigated for a hyperbolic octahedron having mmm-symmetry.Trigonometrical identities connecting lengths of edges and dihedral angles of the polyhedron under consideration are obtained (the sine-tangent theorem). It gives the key to express lengths through dihedral angles. Further, we find the volume of the octahedron in very important geometrical cases by making use the Schläfli formula.

Ключевые слова: гиперболический октаэдр, многогранник, объем, теорема синусов-тангенсов, симметричный октаэдр, формула Шлефли.

Keywords: hyperbolic octahedron, volume, symmetric octahedron, polyhedron, the Schläfli formula, the sine-tangent theorem.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-01-00255, 11-01-90705-моб_ст, 10-01-00642, АВЦП (проект 2.1.13707) и ФЦП.(проект 02.740.11.0457).

1. Введение

Вычисление объема многогранника – это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в настоящее время. Считается, что первый результат в этом направлении принадлежит Тартальи (1499 – 1557 гг.), который нашел объем евклидова тетраэдра. В настоящее время этот результат известен как формула Кэли–Менгера. В 1996 г. И. Х. Сабитов [19] доказал, что объем евклидова многогранника – это корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются многочленами, зависящими от длин ребер многогранника, а коэффициенты последних зависят лишь от комбинаторного типа многогранника.Четырехмерный аналог теоремы Х. Сабитова был получен в недавней работе [3].

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Формула для объема бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) известна еще со времен Н. И. Лобачевского [6] и Л. Шлефли [12]. Объем куба Ламберта и некоторых других многогранников получены Р. Келлерхальц [4], Д. А. Деревниным и А. Д. Медных [2], А. Ю. Весниным, А. Д. Медных и Дж. Паркером [7] и другими. Объемы гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найдены Э. Б. Винбергом [15].

Общая формула объема гиперболического тетраэдра долгое время оставалась неизвестной, первые результаты в этом направлении получили Ю.Чо, Х. Ким [1], Дж. Мураками, У. Яно [10] и А. Ушиджима [13]. Д. А.Деревнин и А. Д. Медных [18] предложили элементарную интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра. Отметим, что в случае симметрического тетраэдра, противоположные двугранные углы которого попарно равны, формула объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт был установлен самим Лобачевским [6] для идеального гиперболического тетраэдра. Дж. Милнор [9] представил соответствующий результат в весьма элегантной форме. В общем случае объем симметричного тетраэдра найден в работе [17].

Цель настоящей работы – изучить основные геометрические характеристики гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией, то есть остающегося инвариантным при отражениях в трех взаимно ортогональных плоскостях. Для этого будут установлена теорема синусов-тангенсов, связывающая длины ребер и двугранные углы рассматриваемого октаэдра, и найдена формула его объема в простейшей геометрической ситуации. Отметим, что указанная выше теорема синусов-тангенсов для случая сферического октаэдра ранее была получена в работе [14].

Для нахождения объема гиперболического октаэдра в терминах двугранных углов будет использована формула Шлефли. Сформулируем ее в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть P выпуклый многогранник в пространстве S^3 или H^3. Если P деформируется так, что его комбинаторная структура сохраняется, а двугранные углы изменяются дифференцируемым образом. Тогда выполняется соотношение:*

$$KdV = \frac{1}{2}\sum_i l_i \, d\alpha_i,$$

где K – кривизна пространства, суммирование ведется по всем ребрам P, l_i, обозначает длину i - того ребра, а α_i – двугранный угол при нем.

В классической работе Шлефли [11] эта формула была доказана для случая сферического n - симплекса. В гиперболическом случае она была получена Х. Кнезером [5], см. также работы [15], [8].

2. Общие свойства гиперболического октаэдра O, обладающего mmm-симметрией

Рассмотрим гиперболический октаэдр O, обладающий mmm - симметрией, то есть зеркальной симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих вдоль его реберных циклов (Рис. 1). Заметим, что в этом случае все восемь граней октаэдра попарно конгруэнтны. Обозначим длины ребер через a, b, c, а двугранные углы – A, B, C и плоские углы граней α, β, γ. В этих обозначениях, в любой грани, плоский угол α лежит против стороны длины a, и двугранный угол A заключен между гранями, пересекающимися по ребру длины a.

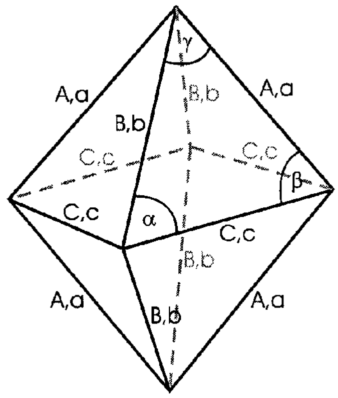


Рис. 1. Октаэдр $O(a, b, c, A, B, C)$, обладающий mmm - симметрией

В евклидовом случае известна следующая теорема.

Теорема 2. (Галиулин, Михалев, Сабитов [18]). *Пусть V – объем евклидова октаэдра $O(a, b, c, A, B, C)$, обладающего mmm-симметрией. Тогда величина V может быть найдена как положительный корень многочлена:*

$$9V^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2).$$

Чтобы найти объем такого октаэдра в гиперболическом пространстве, нам потребуются следующие тригонометрические соотношения.

Теорема 3. (Теорема синусов-тангенсов). *Пусть $O(a, b, c, A, B, C)$ – гиперболический октаэдр, обладающий mmm - симметрией. Тогда вы-*

полняются следующие тригонометрические соотношения:

$$\frac{\sin A}{\tanh a}=\frac{\sin B}{\tanh b}=\frac{\sin C}{\tanh c}=T=2\,\frac{K}{L},$$

где K и L – положительные числа, определены формулами:

$$K^2=(xy-z)(yz-x)(xz-y),$$
$$L=2xyz-x^2-y^2-z^2+1$$

и $\quad x=\cosh a,\quad y=\cosh b,\quad z=\cosh c.$

Доказательство. Рассмотрим пересечение $O=O(a,b,c,A,B,C)$ со сферой достаточно малого радиуса с центром в одной из вершин (рис. 2). Не уменьшая общности, предположим, что полученное пересечение – это гиперболический четырехугольник с внутренними плоскими углами B,C,B и C. Так как исходный многогранник допускает симметрию, то соответствующий четырехугольник является сферическим ромбом со стороной (рис. 2).

Рис. 2. Октаэдр $O(a,b,c,A,B,C)$ и линк его вершины

Согласно предположению о симметрии, четырехугольник можно разделить на четыре прямоугольных гиперболических четырехугольника с углами $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$ гипотенузой длины α. Применяя теорему Пифагора для сферических прямоугольных треугольников, получим равенства:

$$\cos\alpha=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},\quad \cos\beta=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2},$$
$$\cos\gamma=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}. \tag{1}$$

Из найденных соотношений, непосредственно находим, что

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha},\quad \cos^2\frac{B}{2}=\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\beta},$$
$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Полученные равенства связывают двугранные и плоские углы O. Аналогично можно установить соотношения между длинами и плоскими углами. Применяя первую теорему косинусов для выбранной грани, находим равенства:

$$\cosh a=\cosh b\cosh c-\sinh b\sinh c\cos\alpha,$$
$$\cosh b=\cosh a\cosh c-\sinh a\sinh c\cos\beta,$$
$$\cosh c=\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos\gamma.$$

Переписывая последние соотношения, получим эквивалентные равенства:

$$\cos\alpha=\frac{\cosh b\cosh c-\cosh a}{\sinh b\sinh c},$$
$$\cos\beta=\frac{\cosh a\cosh c-\cosh b}{\sinh a\sinh c},$$
$$\cos\gamma=\frac{\cosh a\cosh b-\cosh c}{\sinh a\sinh b}.$$

Вводя новые переменные

$$x=\cosh a,\quad y=\cosh b,\quad z=\cosh c,$$
$$X=\cos A,\quad Y=\cos B,\quad Z=\cos C,$$

легко видеть, что

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{(xz-y)(xy-z)}{(x^2-1)(yz-x)}.$$

Аналогично имеем:

$$\cos^2\frac{B}{2}=\frac{(yz-x)(xy-z)}{(xz-y)(y^2-1)},$$
$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{(yz-x)(xz-y)}{(z^2-1)(xy-z)}.$$

Наконец, из последних соотношений следует равенство:

$$\sin A=\frac{4\cos^2\frac{A}{2}}{\left(\cos^2\frac{A}{2}-1\right)^2}=2\,\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x}\,\frac{K}{C}.$$

Аналогично:

$$\sin B=\frac{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}{y}\,\frac{K}{C},\quad \sin C=\frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z}\,\frac{K}{L},$$

где $K^2 = (xy - z)(yz - x)(xz - y)$,
$L = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1$.

Заметим, что в теореме синусов - тангенсов параметр T выражается через длины ребер октаэдра O, но чтобы найти объем октаэдра O, необходимо выразить T через двугранные углы.

Лемма 1. *Величина T в теореме синусов-тангенсов удовлетворяет уравнению*

$$T^2 = \frac{(1+Y)(1+Z)(1+X)}{1+X+Y+Z},$$

где $X = \cos A$, $Y = \cos B$, $Z = \cos C$.

Доказательство. Применяя вторую теорему косинусов для одной из граней октаэдра O, имеем:

$$\cosh a = \frac{\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

При помощи простейших тригонометрических тождеств получим:

$$\coth^2 a = \frac{\cosh^2 a}{\cosh^2 a - 1} =$$
$$= \frac{(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1}.$$

Как и в (1) выразим $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$\cos\alpha = \coth\frac{B}{2}\coth\frac{C}{2},\ \cos\beta = \coth\frac{A}{2}\coth\frac{C}{2},$$
$$\cos\gamma = \coth\frac{A}{2}\coth\frac{B}{2}.$$

Используя соотношения, связывающие плоские и двугранные углы, перепишем последнее равенство в терминах X, Y и Z:

$$\coth^2 a = \frac{(1+Y)(1+Z)}{(1-X)(1+X+Y+Z)}.$$

Тогда требуемое утверждение следует из равенства $T^2 = \coth^2 a \sin^2 A$, где $\sin^2 A = 1 - X^2$

$$T^2 = \frac{(1+X)(1+Z)(1+Z)}{1+X+Y+Z}.$$

Из теоремы 3 следует, что гиперболический октаэдр, обладающий mmm- симметрий, полностью определяется своими двугранными углами, то есть $O = O(A, B, C)$.

В дальнейшем величину T будем называть главным параметром октаэдра $O = O(A, B, C)$.

2. Вычисление объема гиперболического октаэдра в простейшей геометрической ситуации

Как показывают результаты работы [14], в общем случае объем сферического октаэдра выражается достаточно сложной интегральной формулой. Аналогичный результат можно ожидать и в гиперболической геометрии.

Несложные геометрические рассуждения, основанные на установленной теореме синусов-тангенсов приводят к заключению, что геометрические свойства октаэдра O зависят от того, как ведет себя главный параметр T, а именно – возникают три возможных случая:

$$(i)\ 0 \le T < 1, \quad (ii)\ T = 1, \quad (iii)\ T > 1.$$

В настоящей работе мы рассмотрим простейший геометрический случай, когда $T = 1$. Тогда формула для объема имеет простой и весьма элегантный вид. Оставшиеся два случая будут рассмотрены в последующих работах авторов.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $O = O(a, b, c, A, B, C)$ – гиперболический октаэдр, обладающий mmm - симметрией с главным параметром $T = 1$, то есть его двугранные углы связаны соотношениями:*

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = 1.$$

Тогда при $a \le b \le c$ объем октаэдра O равен

$$V = 2\left(\int_0^a \frac{x\,dx}{\cosh x} + \int_0^b \frac{x\,dx}{\cosh x} - \int_0^c \frac{x\,dx}{\cosh x}\right).$$

Доказательство. Для получения искомого результата необходимо удостовериться, что функция удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Шлефли, то есть

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -2a, \quad \frac{\partial V}{\partial B} = -2b, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -2c. \qquad (2)$$

Функция V является единственным решением данной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющим условию $V \to 0$ при $a = b$ и $c \to 0$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующее вспомогательное предложение.

Лемма 2. *Пусть $O = O(A, B, C)$ – гиперболический октаэдр, такой что*

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = 1.$$

Тогда выполнено одно из следующих соотношений:

(a) $\cosh a + \cosh b - \cosh c - 1 = 0$,

(b) $-\cosh a + \cosh b + \cosh c - 1 = 0$,

(c) $\cosh a - \cosh b + \cosh c - 1 = 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой, полученной в теореме 3:

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = T = 2\,\frac{K}{L},$$

где K и C – положительные числа, определены формулами:

$$K^2 = (xy-z)(yz-x)(xz-y),\ L = 2xyz-x^2-y^2-z^2+1$$

$$\text{и}\quad x = \cosh a,\quad y = \cosh b,\quad z = \cosh c.$$

Пусть $T = 1$, тогда из равенства $T^2 = 4\,\dfrac{K^2}{L^2}$ непосредственными вычислениями получим, что

$$T^2 - 1 = \frac{(x+y-z-1)(x-y+z-1)(-x+y+z-1)(x+y+z+1)}{(-1+x^2+y^2-2xyz+z^2)} = 0.$$

Откуда учитывая неравенство $x+y+z+1>0$ получим:

$$(x+y-z-1)(x-y+z-1)(-x+y+z-1) = 0,$$

что эквивалентно доказываемому утверждению.

Докажем утверждения теоремы.

Без ограничения общности можно считать, что $a \le b \le c$, тогда имеет место равенство $\cosh a + \cosh b - \cosh c - 1 = 0$. Из теоремы тангенсов имеем:

$$\sin^2 A = \tanh^2 a,\quad \cos^2 A = 1 - \tanh^2 a = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

Аналогично устанавливаются равенства:

$$\cos^2 B = 1 - \tanh^2 b = \frac{1}{\cos^2 B},$$

$$\cos^2 C = 1 - \tanh^2 c = \frac{1}{\cos^2 C}.$$

Внимательный анализ знаков приводит к заключению, что

$$\cos A = -\frac{1}{\cos B},\ \cos B = -\frac{1}{\cos A},\ \cos C = \frac{1}{\cos B}.$$

Это следует из тождества:

$$T^2 = \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C} = 1.$$

Положим $\cosh a = p$ и $\cosh b = q$, тогда $\cosh c = p+q-1$.

Далее, из дифференциальной формулы Шлефли, имеем:

$$-\frac{1}{2}\,dV = a\,dA + b\,dB + c\,dC =$$
$$= \operatorname{arccosh}(p)\,d\left(\arccos\left(-\frac{1}{p}\right)\right) +$$
$$+ \operatorname{arccosh}(q)\,d\left(\arccos\left(-\frac{1}{q}\right)\right) +$$
$$+ \operatorname{arccosh}(p+q-1)\,d\left(\arccos\left(-\frac{1}{p+q-1}\right)\right) =$$
$$= -\frac{\arccos(q)}{q(q^2-1)^{\frac12}}\,dq - \frac{\arccos(p)}{p(p^2-1)^{\frac12}}\,dp +$$
$$+ \frac{\arccos(p+q-1)}{(p+q-1)((p+q-1)^2-1)^{\frac12}}\,d(p+q).$$

Заметим, что $V \to 0$, когда $a = b$ и $c \to 0$.

Откуда $V \to 0$ при $p \to 1$ и $q \to 1$. Отметим, что замена переменных $p = \cosh x$ приводит к равенству:

$$\int_1^{\cosh a} \frac{\operatorname{arccosh}(p)}{p(p^2-1)^{\frac12}}\,dp = \int_0^a \frac{x\,dx}{\cosh x}.$$

Аналогично устанавливаются равенства

$$\int_1^{\cosh b} \frac{\operatorname{arccosh}(q)}{q(q^2-1)^{\frac12}}\,dq = \int_0^b \frac{x\,dx}{\cosh x}$$

и

$$\int_1^{\cosh a+\cosh b-1} \frac{\operatorname{arccosh}(p+q-1)}{(p+q-1)((p+q-1)^2-1)^{\frac12}}\,d(p+q) = \int_0^c \frac{x\,dx}{\cosh x}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением $c = \operatorname{arccosh}(p+q-1)$.

Окончательно, из формулы Шлефли имеем:

$$V = 2\left(\int_0^a \frac{x\,dx}{\cosh x} + \int_0^b \frac{x\,dx}{\cosh x} - \int_0^c \frac{x\,dx}{\cosh x}\right).$$

Благодарности

Второй автор хотел бы поблагодарить Георгия Иванова и Ксению Лавриченко за помощь в подготовке статьи и ценные замечания. Часть работы над данной статьей была выполнена при посещении первым и вторым авторами Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, а также во время обучения второго в аспирантуре Университета г. Берген.

Литература

[1] Cho, Yu. *On the volume formula for hyperbolic tetrahedra* / Yu. Cho, H. Kim // Discr. Comput. Geom. – 1999. – 22. – С. 347 – 366.

[2] Derevnin, D. A. *The Volume of the Lambert Cube in Spherical Space* / D. A. Derevnin, A. D. Mednykh // Mat. Zametki. – 2009. – P. 190 – 201.

[3] Gaifullin, A. *Sabitov polinomiels for polyhedra in four dimensions* / A. Gaifullin // arXiv: 1108.6014v1 [math.MG].

[4] Kellerhals, R. On the volume of hyperbolic polyhedra /R. Kellehals // Math. Ann. – 1989. – 285. – С. 541 – 569.

[5] Kneser, H. *Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie* / H. Kneser // Deutsche Math. – 1936. – 1. – С. 337 – 340.

[6] Lobatschefskij, N. I. *Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale* / N. I. Lobatschefskij // Deutsche Übersetzung von H. Liebmann.– Leipzig: Teubner, 1904.

[7] Mednykh, A. D. *On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi- Fuchsian punctured torus groups* / A. D. Mednykh, J. Parker, A. Yu. Vesnin // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2004. – 10. – С. 357 – 381.

[8] Milnor, J. W. *How to compute volume in hyperbolic space* / J. W. Milnor // Collected Papers, 1. Geometry.-Publish or Perish. – 1994. – С. 189 – 212.

[9] Milnor, J. *Hyperbolic geometry: the first 150 years* / J. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – 6, № 1. – С. 9 – 24.

[10] Murakami, J. *On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron* / J. Murakami, M. Yano // Comm. Anal. Geom. – 2005. – 13. – С. 379 – 200.

[11] Schläfli, L. *On the multiple integral* $\int\int ... \int dxdy...dz$ *whose limits are* $p_1 = a_1x + b_1y + ... + h_1z > 0, p_2 > 0, ..., p_n > 0$ *and* $x^2 + y^2 + ... + z^2 < 1$ / L. Schläfli // Quart. J. Math. – 1858. – 2. – С. 269 – 300; 1860. – 3. – С. 54 – 68; 97 – 108.

[12] Schläfli, L. *Theorie der vielfachen Kontinuität* / L. Schläfli // Gesammelte mathematishe Abhandlungen.– Basel: Birkhäuser, 1950.

[13] Ushijima, A. *A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* / A. Ushijima // Non-Euclidean Geometries (Prëkopa A., Molnär E., eds.)/ Math. Appl. – 2006. – 581. – С. 249 – 265.

[14] Абросимов, Н. В. *Об объеме сферического октаэдра с симметриями* / Н. В. Абросимов, М. Годой-Молина, А. Д. Медных // Современная математика и ее приложения. – 2009. – Т. 6. – С. 211 – 218.

[15] Винберг, Э. Б. *Геометрия-2*/ Э. Б. Винберг// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. – М.: ВИНИТИ, 1988. – 29 с.

[16] Галиулин, Р. В. *Некоторые приложения формулы для объема октаэдра* / Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов // Мат. заметки. – 2004. – Т. 76, № 1. – С. 27 – 43.

[17] Деревнин, Д. А. *Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах* / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич // Сиб. мат. ж. – 2004. – 45, № 5. – С. 1022 – 1031.

[18] Деревнин, Д. А. *О формуле объема гиперболического тетраэдра* / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных // Усп. мат. наук. – 2005. – 60, № 2. – С. 159 – 160.

[19] Сабитов, И. Х. *Объем многогранника как функция длин его ребер* / И. Х. Сабитов // Фундам. прикл. мат. – 1996. – Т. 2, № 1. – 348. – С. 305 – 307.

УДК 515.16 + 512.54

О СВЯЗИ НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ И КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП

В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим

ON CONNECTION BETWEEN SOME PROBLEMS OF HOMOTOPY TOPOLOGY AND COMBINATORIAL GROUP THEORY

V. G. Bardakov M. V. Neshchadim

В настоящей работе приводятся основные понятия гомотопической топологии, рассказывается о проблеме Пуанкаре и формулируется $D(2)$-гипотеза. Затем напоминаются некоторые факты комбинаторной теории групп, формулируется проблема скачка соотношений и проблема минимального нормального порождения. Устанавливается связь между проблемами этой теории и проблемами гомотопической топологии. В частности, дается переформулировка гипотезы Пуанкаре в групповых терминах и отмечается связь проблемы скачка соотношений и $D(2)$-гипотезы. Далее предлагается метод, позволяющий для некоторых конечных представлений групп показать, что число соотношений не может быть уменьшено (подход к проблеме минимального нормального порождения).

In this paper we formulate basic notions of homotopy topology, tell on hypothesis of Poincare and formulate $D(2)$-hypothesis. After that we remind some facts from combinatorial group theory, formulate the problem of gap relation and the problem of minimal normal generation. We mention connection between problems of this theory and problems of homotopy topology. In particular, it will be given a reformulation of Poincare's hypothesis in group terms and mention a connection between the problem of gap relation and the $D(2)$-hypothesis. Then we offer the method that allows to show for some finite representations of groups that the number of relationship can't be reduced (the approach to a problem of the minimum normal generation).

Ключевые слова: многообразие, клеточное пространство, гомотопическая группа, группы гомологий и когомологий, конечно определенная группа, минимальное число соотношений, модуль соотношений, скачек соотношений.

Keywords: manifold, cellular space, homotopy group, homologic groups and cohomologic groups, finitely defining group, minimal number of relations, module of relations, gap of relations.

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт No. 02.740.11.5191).

Введение

Настоящая статья является расширенным вариантом лекции, прочитанной первым автором на конференции "Геометрия и анализ", которая проходила в Кемеровском государственном университете с 19-го по 26-е июня 2011 года.

К сожалению, курс гомотопической топологии не входит в программу большинства университетов. Поэтому мы сочли уместным посвятить первый параграф формулировке основных понятий и результатов этой теории. Второй параграф посвящен некоторым проблемам комбинаторной теории групп. Комбинаторная теория групп изучает группы, заданные порождающими и соотношениями. При этом одна и та же группа может быть задана разными системами порождающих и соотношений. Если зафиксировать множество порождающих некоторой группы, то вопрос о минимальном числе соотношений, задающих эту группу, называется проблемой минимального нормального порождения. Эта проблема равносильна такой проблеме: для заданной нормальной подгруппы R свободной группы F найти минимальное число элементов, нормальное замыкание которых в группе F порождает R. С проблемой минимального нормального порождения тесно связана проблема скачка соотношений.

Яркий пример связи топологии с комбинаторной теорией групп дает проблема Пуанкаре, решенная недавно Г. Я. Перельманом. Сама гипотеза Пуанкаре формулируется следующим образом: всякое односвязное компактное 3-многообразие без края гомеоморфно трехмерной сфере. Как видим, это чисто топологическая проблема. Тем не менее Столингс и Джако [1, с. 266] показали, что проблема Пуанкаре равносильна следующей гипотезе из комбинаторной теории групп: при $g > 1$ всякий гоморфизм $\varphi : \pi_1(\Sigma_g) \longrightarrow F_g \times F_g$ из фундаментальной группы компактной ориентируемой поверхности Σ_g рода g на прямое произведение свободных групп $F_g \times F_g$ существенно пропускается через свободное произведение. Так как гипотеза Пуанкаре справедлива, то справедлива и эта гипотеза.

В настоящей работе приводятся основные понятия гомотопической топологии: гомотопическая эквивалентность, гомотопическая группа, группы гомологий и когомологий, накрытия, расслоения и т. д. Рассказывается о проблеме Пуанкаре и формулируется $D(2)$-гипотеза. Далее напоминаются некоторые факты комбинаторной теории групп, формулируется проблема скачка соотношений и проблема минимального нормального порождения. Затем устанавливается связь между проблемами этой теории и проблемами гомотопической теории групп. В частности, отмечается, что из положительного решения скачка соотношений для конечно определенных групп следует опровержение $D(2)$-гипотезы. В заключение предлагается метод, позволяющий для некоторых конечных представлений групп показать, что число соотношений не может быть уменьшено (подход к проблеме минимального нормального порождения). В частности, будет доказано, что если m и n не являются взаимно простыми, то группа $K_{m,n} = \langle x, y, z \mid\mid x^m = y^n = [x, z] = [y, z] = 1\rangle$ не может быть задана тремя соотношениями в порождающих x, y, z. Если же m и n взаимно просты, то будет доказано, что группа $K_{m,n}$ может быть задана в тех же порождающих тремя соотношениями.

Благодарим организаторов конференции за любезное приглашение принять участие в конференции, пообщаться с коллегами и сделать доклад. Благодарим В. В. Чуешева, пожертвовавшего своим докладом в пользу нашего. Особая благодарность за незабываемую экскурсию, организованную во время конференции. Это была одна из самых запоминающихся экскурсий, организованных на аналогичных конференциях.

1. Гомотопическая топология

В этом параграфе мы напомним основные факты из гомотопической топологии, которые можно найти в классическом учебнике [2].

1.1. Многообразия и клеточные комплексы

Топология изучает топологические многообразия, а также их обобщения – клеточные пространства или клеточные комплексы. Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой называется n-мерным *многообразием*, если каждая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной пространству $\mathbb{R}^n$ или полупространству $\mathbb{R}^n_- = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\}$. Точки n-мерного многообразия, не имеющие окрестности, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$, составляют край ∂X многообразия X. Край n-мерного многообразия есть $n-1$-мерное многообразие без края. Многообразие называется *замкнутым*, если оно компактно и не имеет края.

Примерами многообразий являются *n-мерная сфера*:

$$S^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0+x_1+\ldots+x_n = 1\},$$

n-мерный шар:

$$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n \leq 1\}.$$

Таким образом, S^{n-1} есть граница шара D^n в $\mathbb{R}^n$.

Вещественное n-мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как совокупность проходящих через начало координат прямых пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, топологизированная угловой метрикой: расстояние между двумя прямыми равно углу между ними. Координаты $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ направляющего вектора прямой (определенные, очевидно, с точностью до пропорциональности) называются *однородными координатами* точки проективного пространства; стандартное обозначение $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$. Бесконечномерное проективное пространство $\mathbb{R}P^\infty$ определяется как объединение $\cup \mathbb{R}P^i$. Если заменить в определении пространства $\mathbb{R}P^n$ пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ пространством $\mathbb{C}^{n+1}$ и вещественные прямые комплексными прямыми, то получим определение *комплексного проективного пространства* $\mathbb{C}P^n$.

По сравнению с топологическими многообразиями, более общими объектами являются клеточные пространства.

Клеточное пространство — это хаусдорфово топологическое пространство K, представленное в виде объединения

$$\bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_q} e^q_i$$

попарно непересекающихся множеств e^q_i (*клеток*) таким образом, что для каждой клетки существует отображение f^q_i шара D^q в K (характеристическое отображение, отвечающее клетке e^q_i), сужение которого на внутренность $\operatorname{Int} D^q$ шара D^q представляет собой гомеоморфизм $\operatorname{Int} D^q \simeq e^q_i$. При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы.

(C) Граница $\dot{e}^q_i = \bar{e}^q_i - e^q_i$ клетки e^q_i содержится в объединении конечного числа клеток e^r_j с $r < q$.

(W) Множество $F \subset K$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e^q_i замкнуто пересечение $F \cap \bar{e}^q_i$.

Топология, описываемая аксиомой (W), является слабейшей из топологий, по отношении к которой все характеристические отображения непрерывны. Часто клеточное пространство называют клеточным комплексом или CW-комплексом.

Клеточное подпространство клеточного пространства K — это замкнутое его подмножество, составленное из целых клеток. Важнейшие клеточные подпространства клеточного пространства — его остовы: n-й *остов* есть объединение всех клеток размерности $\leq n$ (по определению, размерность клетки e^q_i равна q). Стандартные обозначения для n–го остова пространства K: K^n или $sk_n\, K$. Клеточное пространство называется конечным (счетным), если оно состоит из конечного (счетного) числа клеток. Заметим, что для конечных клеточных пространств аксиомы (C), (W) выполняются автоматически.

Всякое клеточное пространство может быть сконструировано при помощи многократного применения операции приклеивания клеток. При этом остов $sk_n\,K$ получается приклеиванием n-мерных шаров к остову $sk_{n-1}\,K$ посредством всех отображений вида $f_i^q|_{\partial D^n}$.

С другой стороны, всякое топологическое многообразие можно разбить на симплексы, т. е. триангулировать. Напомним, что *евклидов симплекс* T^q в $\mathbb{R}^{q+1}$ определяется следующим образом:

$$T^q = \left\{(t_0, \ldots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} | t_0 \geq 0, \ldots, t_q \geq 0, \sum t_i = 1\right\}.$$

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Под q-мерным *сингулярным симплексом* пространства X понимается непрерывное отображение стандартного q-мерного симплекса T^q в X. Справедлива

Теорема 1. *Всякое компактное гладкое многообразие гомеоморфно триангулированному подмножеству евклидова пространства, причем гомеоморфизм может быть сделан гладким на каждом симплексе триангуляции.*

1.2. Гомотопии

Одной из основных проблем топологии является классификация многообразий с точностью до гомеоморфизма. Можно классифицировать многообразия или клеточные пространства с точностью до гомотопии.

Пусть X и Y — топологические пространства. Непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ называются *гомотопными* (обозначается $f \sim g$), если существует семейство отображений $\varphi_t : X \to Y$, $t \in I$, такое, что

1) $\varphi_0 = f$, $\varphi_1 = g$;

2) отображение $\Phi : X \times I \to Y$, заданное равенством $\Phi(x,t) = \varphi_t(x)$, непрерывно.

Условие 2) является формализацией непрерывной зависимости φ_t от параметра t. Отображение Φ называется *гомотопией*, связывающей отображения f и g.

Нетрудно проверить, что отношение гомотопности является отношением эквивалентности на пространстве $C(X,Y)$ непрерывных отображений из X в Y (т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Множество классов эквивалентности (гомотопические классы), на которые отношение гомотопности разбивает пространство $C(X,Y)$, обозначается $\pi(X,Y)$.

Пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными* (обозначается $X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, такие что композиции $f \circ g : Y \to Y$ и $g \circ f : X \to X$ гомотопны тождественным отображениям $id : Y \to Y$ и $id : X \to X$ соответственно. Отображения f и g в этой ситуации называются *гомотопическими эквивалентностями.*

Если отображения $f \circ g$ и $g \circ f$ не просто гомотопны тождественным отображениям, но и являются таковыми, то f и g взаимно обратные гомеоморфизмы.

Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом.* Примером гомотопически эквивалентных, но не гомеоморфных пространств являются, например, точка и шар, окружность и полноторие.

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $X \to X$ гомотопно отображению $X \to X$, переводящему все X в точку.

Подпространство A пространства X называется его *ретрактом*, если существует непрерывное отображение $r : X \to X$ (ретракция), такое, что $r(X) = A$ и $r(a) = a$ при $a \in A$. Если ретракция гомотопна тождественному отображению, то A называется *деформационным ретрактом* пространства X. Если, сверх того, гомотопию, соединяющую ретракцию с тождественным отображением, можно выбрать тождественной на подпространстве A, то A называется *строгим деформационным ретрактом* пространства X.

Очевидно, деформационный ретракт пространства X гомотопически эквивалентен X. Более того, A является деформационным ретрактом пространства X в том и только том случае, если включение A в X является гомотопической эквивалентностью.

1.3. Гомотопические группы

Одним из подходов к классификации многообразий с точностью до гомотопии является изучение дискретных инвариантов соответствующих топологическим пространствам и непрерывным отображениям. Обычно эти инварианты принимают одинаковые значения на гомотопически эквивалентных пространствах и гомотопных отображениях. Наиболее распространенная процедура построения инвариантов состоит в следующем. Фиксируется пространство Y и затем произвольному пространству X ставится в соответствие множество $\pi(X,Y)$ или множество $\pi(Y,X)$. Если пространства X и Y с отмеченными точками, то можно рассмотреть только отображения, сохраняющие эти точки, и соответствующие классы гомотопических отображений $\pi_b(X,Y)$ или $\pi_b(Y,X)$. Изучать эти множества значительно проще если в них имеется естественная групповая структура.

Путем в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $\varphi : I \to X$ отрезка $I = [0,1]$. При этом точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются началом и концом пути φ; если начальная и конечная точки пути совпадают, то такой путь называется *петлей.* Пространство всех путей пространства X обозначается $C(I, X)$, а его подпространство петель — $\Omega(X)$. Можно рассмотреть также пространство петель с фиксированным началом $\Omega(X, x_0)$. Все эти пространства наделяются естественной топологией.

Фундаментальная группа является первой из бесконечной серии гомотопических групп $\pi_n(X)$, $n = 1, 2, \dots$, которые соответствуют топологическому пространству X. *Фундаментальной группой* пространства X с отмеченной точкой x_0 называется его одномерная гомотопическая группа $\pi_1(X) = \pi_b(S^1, X)$. Более подробно рассматриваются петли пространства X. Петли φ и φ' называются *гомотопными*, если существует такая гомотопия $\varphi_t : I \to X$, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi'$ и $\varphi_t(0) = \varphi_t(1) = x_0$, $t \in I$. Произведение $\varphi\psi$ петель φ и ψ это такая петля χ, что

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{при } t \le 1/2, \\ \psi(2t-1) & \text{при } t \ge 1/2. \end{cases}$$

Другими словами, произведение двух петель — это петля составленная из этих двух петель, которые проходятся последовательно. Как легко проверить, это умножение порождает умножение и в множестве гомотопических классов петель. Относительно этого умножения гомотопические классы образуют группу. Это и есть фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$. Обратным к классу петли $\varphi : I \to X$ служит класс петли $\varphi' : I \to X$, определенный формулой $\varphi'(t) = \varphi(1-t)$.

Пространство, любые две точки которого можно соединить путем, называется *линейно связным.* Если пространство нельзя представить в виде объединения непересекающихся открытых множеств, то такое пространство называется *связным.* Отметим, что если пространство линейно связно, то оно и связно. Обратное, вообще говоря, неверно (стандартным примером является график функции $\sin(1/x)$ на интервале $(0, 1)$, объединенный с отрезком $[-1, 1]$ оси OY). Но в важных частных случаях (клеточные пространства, многообразия) понятия связности и линейной связности совпадают.

Можно показать, что если пространство X линейно связно, то фундаментальная группа не зависит от выбора точки x_0, т. е. $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$ для любых точек x_0, $x_1 \in X$. Кроме того, фундаментальная группа не меняется при гомотопической эквивалентности и тем более при гомеоморфизме. Более точно. Если $f : X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то для любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ является изоморфизмом.

Для вычисления фундаментальной группы клеточного пространства достаточно знать лишь его двумерный остов. Более точно, справедлива

Теорема 2. $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X^2)$ *для любого клеточного пространства* X *и его двумерного остова* X^2.

С другой стороны, всякая группа, задаваемая конечным набором образующих и соотношений, служит фундаментальной группой некоторого замкнутого многообразия. Более того, это многообразие можно выбрать четырехмерным. Однако нельзя понизить его размерность до трех: группа $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ не является фундаментальной группой никакого замкнутого трехмерного многообразия. Это наблюдение и позволяет перебросить мостик между гомотопической топологией и комбинаторной теорией групп.

Обобщением понятия фундаментальной группы является понятие *гомотопической группы* $\pi_n(X, x_0)$, которая определяется как множество гомотопических классов отображений $S^n \to X$, переводящих отмеченную точку сферы S^n в отмеченную точку $x_0 \in X$. Сами эти отображения называются сфероидами. Иначе, сфероид можно определить как отображение n-мерного куба I^n в X, переводящее границу ∂I^n в отмеченную точку $x_0 \in X$.

Сумма двух сфероидов $f, g : S^n \to X$ определяется как сфероид $f + g : S^n \to X$, построенный следующим образом: экватор сферы S^n(содержащий отмеченную точку) сжимается в точку, в результате чего сфера превращается в букет двух сфер, затем сферы, составляющие этот букет, отображаются в X с помощью отображений f и g.

Сложение сфероидов не является групповой операцией. Однако оно гомотопически инвариантно (т. е. если $f \sim f'$ и $g \sim g'$, то $f + g \sim f' + g'$) и поэтому индуцирует операцию в множестве $\pi_n(X, x_0)$, а последняя уже является групповой. При $n \ge 2$ эта операция коммутативна.

Если $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение, переводящее отмеченную точку $x_0 \in X$ в отмеченную точку $y_0 \in Y$, то возникает гомоморфизм $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$, не меняющийся при замене отображения φ гомотопным. В частности, у гомотопически эквивалентных пространств с отмеченными точками гомотопические группы одинаковы.

Одной из основных проблем гомотопической топологии в середине прошлого века считалась задача вычисления гомотопических групп сфер. Описание этих групп для одномерной сферы дает

Теорема 3. *Гомотопические группы одномерной сферы имеют вид:*

$$\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \ge 2. \end{cases}$$

1.4. Отображения клеточных пространств

Непрерывное отображение f клеточного пространства X в клеточное пространство Y называется *клеточным*, если $f(sk_n X) \subset sk_n Y$. Отметим, что клетка при клеточном отображении не обязана отображаться в клетку, а может размазываться по нескольким клеткам, задевая при этом клетки меньшей размерности.

Отображение клеточного пространства в другое топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом конечном подпространстве.

Теорема 4. *Всякое непрерывное отображение одного клеточного пространства в другое гомотопно клеточному отображению.*

Ранее мы дали определение связного пространства. Обобщением этого понятия является n–*связное* пространство.

Определение. *Пространство X называется n–связным, если при $q \leq n$ множество $\pi(S^q, X)$ состоит из одного элемента (то есть любые два отображения $S^q \to X$ с $q \leq n$ гомотопны).*

Описание n–*связных* пространств дает

Теорема 5. *Всякое n-связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной вершиной и без клеток размерностей $1, 2, ..., n$.*

1.5. Накрытия

Линейно связное пространство T называется *накрывающей* для линейно связного пространства X, если задано отображение $p : T \to X$, такое, что для любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U \subset X$, для которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times \Gamma$, где Γ — дискретное множество, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \simeq & U \times \Gamma \\ p \searrow & & \swarrow \text{проекция} \\ & U & \end{array}$$

коммутативна. Отображение $p : T \to X$ называется в этой ситуации *накрытием.*

Если $p : T \to X$ накрытие и $\widetilde{x}_0$ — произвольная точка пространства T, такая, что $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$, то $p_* : \pi_1(T, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ является мономорфизмом, т. е. инъективным отображением.

Накрытие $p : T \to X$ называется *регулярным,* если группа $p_*(\pi_1(T, \widetilde{x}_0))$ является нормальной подгруппой в группе $\pi_1(X, x_0)$. Если $p : T \to X$ есть регулярное накрытие, то существует свободное действие фактор-группы $G = \pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(T, \widetilde{x}_0))$ на пространстве T, такое, что $X = T/G$ (точнее: такое, что его орбиты совпадают с множествами $p^{-1}(x)$). Верно и обратное: если группа G действует на пространстве T свободно и дискретно (последнее означает, что каждая точка $\widetilde{x} \in T$ обладает такой окрестностью U, что множества gU, $g \in G$, попарно не пересекаются), то естественная проекция $T \to X = T/G$ является регулярным накрытием. Более того, в этом случае $\pi_1(X)/\pi_1(T) = G$.

Накрытие $p : T \to X$ называется *универсальным,* если T односвязно. Очевидно, что универсальное накрытие односвязно.

Накрытия $p_1 : T_1 \to X$ и $p_2 : T_2 \to X$ называются *эквивалентными,* если существует такой гомеоморфизм $f : T_1 \to T_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{f} & T_2 \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

коммутативна. Отображение $f : T_1 \to T_2$ называется *эквивалентностью.*

Можно доказать следующий критерий эквивалентности накрытий.

Теорема 6. *Пусть $p_1 : T_1 \to X$ и $p_2 : T_2 \to X$ накрытия, $x \in X$, $\widetilde{x}_1 \in T_1$, $\widetilde{x}_2 \in T_2$ такие точки, что $p_1(\widetilde{x}_1) = x$, $p_2(\widetilde{x}_2) = x$. Если X — клеточное пространство или многообразие, то накрытия p_1 и p_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда группы $p_{1*}(\pi_1(T_1, \widetilde{x}_1))$ и $p_{2*}(\pi_1(T_2, \widetilde{x}_2))$ сопряжены в группе $\pi_1(X, \widetilde{x})$.*

Теорема 7. *Пусть X — линейно связное клеточное пространство или многообразие и $x_0 \in X$ — точка. Тогда для любой подгруппы G группы $\pi_1(X, x_0)$ существует накрытие $p : T \to X$ и точка $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, такие, что $p_*(\pi_1(T, \widetilde{x}_0)) = G$. В частности, над X существует универсальное накрытие.*

Таким образом, для достаточно хорошего линейно связного пространства X классы эквивалентных накрытий над X находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженных подгрупп фундаментальной группы пространства X. В частности, над достаточно хорошим односвязным пространством вообще нет нетривиальных накрытий. Более точно, справедлива

Теорема 8. *Если $p : T \to X$ — накрытие и $n \geq 2$, то $p_* : \pi_n(T, t_0) \to \pi_n(X, p(t_0))$ есть изоморфизм.*

1.6. Расслоения

Расслоением, или *локально тривиальным расслоением*, называется четверка (E, B, F, p), где E, B, F — пространства, а p — отображение $E \to B$, причем любая точка $x \in B$ обладает такой окрестностью $U \subset B$, что $p^{-1}(U) \simeq U \times F$; более того, существует гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ p \searrow & & \swarrow \text{проекция} \\ & U & \end{array}$$

Пространства B и F называют *базой* и *слоем* расслоения.

Примеры расслоений. 1) Расслоение Хопфа:

$$E = S^3 = \{(z_1, z_2) \mid z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2,$$

$$B = S^2 = \mathbb{C}P^1, \ p(z_1, z_2) = (z_1 : z_2), \ F = S^1.$$

2) Существует естественное отображение $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Обозначая это отображение через p, получаем расслоение $(S^{2n+1}, \mathbb{C}P^n, S^1, p)$, которое обобщает предыдущее и тоже называется *расслоением Хопфа*.

Отметим, что накрытие является частным случаем расслоения. Слоем при этом является пространство с дискретной топологией.

Упражнение. Выведите из точной гомотопической последовательности хопфовского расслоения (S^3, S^2, S^1, p), что имеют место следующие изоморфизмы

$$\pi_2(S^2) \simeq \pi_1(S^1) \text{ и } \pi_n(S^3) \simeq \pi_n(S^2) \text{ при } n \geq 3.$$

1.7. Гомотопические группы и клеточные пространства

С каждым пространством X можно связать пространство ΣX, которое определяется как фактор-пространство цилиндра $X \times I$ по его основаниям $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$. Пространство ΣX называется *надстройкой* над пространством X. Например, легко проверить, что $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$. Справедлива

Теорема (Фрейденталь). *Гомоморфизм надстройки*

$$\Sigma : \pi_q(S^n) \longrightarrow \pi_{q+1}(S^{n+1})$$

является изоморфизмом при $q \leq 2n-2$ и эпиморфизмом при $q = 2n-1$.

Эта теорема позволяет вычислить некоторые гомотопические группы сфер.

Теорема 9. *Если Y — клеточное подпространство пространства X и разность $X - Y$ не содержит клеток размерности $\leq n$, то гомоморфизм $\pi_i(Y) \to \pi_i(X)$, индуцированный вложением, является изоморфизмом при $i<n$ и эпиморфизмом при $i = n$. В частности, $\pi_n(X) = \pi_n(sk_{n+1}X)$ для любого клеточного пространства X.*

Утверждение. *n-я гомотопическая группа пространства X порождается n-мерными клетками, соотношения отвечают $n+1$-мерным клеткам.*

Теорема (Уайтхед). *Пусть X, Y — клеточные пространства. Если непрерывное отображение $f : X \to Y$ обладает тем свойством, что*

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$$

есть изоморфизм при всех n и x_0, то f есть гомотопическая эквивалентность.

Однако в общем случае для гомотопической эквивалентности клеточных пространств, вообще говоря, недостаточно, чтобы их гомотопические группы были изоморфны: нужно, чтобы изоморфизм устанавливался некоторым непрерывным отображением.

Теорема 10. *Пусть n — натуральное число и π — группа, предполагаемая абелевой при $n > 1$. Тогда существует клеточное пространство X, такое, что*

$$\pi_i(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq n, \\ \pi & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Такие клеточные пространства называются пространствами Эйленберга-Маклейна или пространствами типа $K(\pi, n)$.

1.8. Гомологии

Наряду с гомотопическими группами топологического пространства X можно рассматривать другие гомотопические инварианты. Например, такими инвариантами являются группы гомологий $H_k(X)$ и когомологий $H^k(X)$. По сравнению с гомотопическими группами они определяются достаточно громоздко, но зато легче вычисляются и геометрически более наглядны.

Напомним, что *евклидов симплекс* T^q в $\mathbb{R}^{q+1}$ определяется следующим образом:

$$T^q = \left\{(t_0, ..., t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid t_0 \geq 0, ..., t_q \geq 0, \sum t_i = 1\right\}.$$

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Под q-мерным *сингулярным симплексом* пространства X понимается непрерывное отображение стандартного q-мерного симплекса T^q в X. Под q-мерной (сингулярной) *цепью* пространства X понимается конечная линейная комбинация сингулярных симплексов пространства X с целыми коэффициентами; запись $\sum k_i f_i$, $f_i : T^q \to X$. Множество q-мерных сингулярных цепей пространства X обозначается через $C_q(X)$. Сложение цепей как линейных комбинаций делает $C_q(X)$ группой, то есть $C_q(X)$ — свободная абелева группа, порожденная множеством всех q-мерных сингулярных симплексов пространства X.

Определим *граничный гомоморфизм*

$$\partial = \partial_q : C_q(X) \to C_{q-1}(X).$$

Учитывая, что $C_q(X)$ свободна, достаточно определить ∂ на сингулярных симплексах. Для сингулярного симплекса f полагаем

$$\partial f = \sum (-1)^i \Gamma_i f,$$

где $\Gamma_i f$ — сужение отображения f на i-ю грань

$$T_i^{q-1} = \{(t_0, ..., t_q) \in T^q \mid t_i = 0\}$$

стандартного симплекса T^q.

Теорема 11. *Композиция*

$$C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X)$$

тривиальна, то есть $\operatorname{Im}\partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_q$.

Определение. Факторгруппа

$$H_q(X) = \operatorname{Ker}\partial_q / \operatorname{Im}\partial_{q+1}$$

называется q-й *гомологической группой* пространства X. Это определение имеет силу при $q \geq 1$. Полагают $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$ и $H_q(X) = 0$ при $q < 0$.

Для групп $\operatorname{Im}\partial_{q+1}$ и $\operatorname{Ker}\partial_q$ приняты обозначения $B_q(X)$ и $Z_q(X)$ соответственно. В этих обозначениях

$$H_q(X) = Z_q(X)/B_q(X).$$

Цепи из $Z_q(X)$ и $B_q(X)$ называют соответственно *циклами* и *границами.* Циклы разность которых есть граница, называют *гомологичными.* Таким образом, элементы группы гомологий — это классы гомологичных циклов, иногда их называют *гомологическими классами.*

Если группа $H_q(X)$ конечно порождена, то ее ранг (то есть число слагаемых $\mathbb{Z}$ в каноническом разложении $H_q(X) = \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{k_s}$) называется q-м *числом Бетти* пространства X.

Цепным комплексом называется последовательность

$$... \longrightarrow C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \longrightarrow ...$$
$$... \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

абелевых групп, в которой $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ и ε — эпиморфизм.

У гомотопически эквивалентных пространств гомологии одинаковы.

Предложение 1. *Если* $\{X_\alpha\}$ *— множество компонент связности пространства* X, *то при любом* q

$$H_q(X) = \underset{\alpha}{\oplus} H_q(X_\alpha).$$

1.9. Вычисление гомологий клеточных пространств

Гомологические группы сфер, в отличие от гомотопических групп, вычислять довольно легко. Справедлива

Теорема 12. *Гомологические группы сфер определяются равенствами*

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ при } i = 0,\, n, \\ 0 \text{ при } i \neq 0,\, n. \end{cases}$$

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться тем, что $\Sigma S^k \simeq S^{k+1}$.

Также справедлива

Теорема 13. *Для любого топологического пространства* X *и любого* i *имеет место изоморфизм*

$$H_i(\Sigma X) = H_{i-1}(X),$$

где Σ *— надстройка.*

Следствие. *Если число* q*-мерных клеток клеточного пространства* X *равно* n, *то группа* $H_q(X)$ *порождается не более чем* n *элементами. В частности,* $b_q(X^q) \leq n$, *где* b_q *—* q*-е число Бетти и* X^q *—* q*-мерный остов пространства* X. *Например, если у* X *нет* q*-мерных клеток, то* $H_q(X) = 0$, *в частности, если* $\dim X = m$, *то* $H_q(X) = 0$ *при* $q > m$.

Пусть X — компактное триангулированное подмножество евклидова пространства (*полиэдр*). Открытые симплексы триангуляции составляют клеточное разбиение пространства X. Соответствующий клеточный комплекс устроен следующим образом. Зафиксируем некоторый порядок всех вершин триангуляции, тогда будут упорядочены и вершины каждого симплекса. Клеточная q-мерная цепь — это линейная комбинация вида $\sum k_i\sigma_i$, где σ_i — симплексы размерности q. Граничный оператор ∂ действует по формуле

$$\partial\left(\sum k_i\sigma_i\right) = \sum k_i \sum_{r=0}^{q} \Gamma_r\sigma_i,$$

где $\Gamma_r\sigma_i$ есть r-я грань симплекса σ_i. Этот комплекс называется *классическим.* Его гомологии совпадают с гомологиями пространства X.

1.10. Гомологии и гомотопии

Между гомотопическими и гомологическими группами нет прямой связи. В частности, можно показать, что пространства S^2 и $\mathbb{C}P^\infty \times S^3$ имеют одинаковые гомотопические группы, но разные группы гомологий. С другой стороны, пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ и $S^1 \times S^1$ имеют одинаковые гомологические группы, но разные гомотопические группы.

Тем не менее у связного пространства первая нетривиальная гомотопическая группа изоморфна соответствующей гомологической группе. Чтобы формализовать это утверждение, введем некоторые определения.

Пусть X — топологическое пространство с отмеченной точкой x_0. Обозначим через s_n каноническую образующую группы $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $n = 1, 2, ...$ Для любого $\varphi \in \pi_n(X, x_0)$ положим

$$h(\varphi) = f_*(s_n) \in H_n(X),$$

где $f : S^n \to X$ — произвольный сфероид класса φ. Очевидно, что $h(\varphi)$ не зависит от выбора f. Ясно также, что отображение $\varphi \to h(\varphi)$ определяет гомоморфизм

$$h : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X).$$

Этот гомоморфизм называется *гомоморфизмом Гуревича*; он естественен по отношению к непрерывным отображениям (переводящим отмеченную точку в отмеченную). Если выбрать другую отмеченную точку x_1, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X,x_0) & \xrightarrow{s_\sharp} & \pi_n(X,x_1) \\ h\searrow & & \swarrow h \\ & H_n(X) & \end{array}$$

коммутативна для любого пути s, соединяющего точки x_0 и x_1.

Теорема (Гуревич). *Пусть* $\pi_0(X,x_0) = \pi_1(X,x_0) = ... = \pi_{n-1}(X,x_0) = 0$, $n \geq 2$. *Тогда* $H_1(X) = ... = H_{n-1}(X) = 0$ *и* $h : \pi_n(X,x_0) \to H_n(X)$ *есть изоморфизм.*

Следствие (обратная теорема Гуревича). *Если пространство* X *связно и односвязно и* $H_2(X) = ... = H_{n-1}(X) = 0$, *то* $\pi_2(X,x_0) = ... = \pi_{n-1}(X,x_0) = 0$ *и* $h : \pi_n(X,x_0) \to H_n(X)$ *есть изоморфизм.*

Приведенные, результаты можно выразить одной фразой: у односвязного пространства нетривиальные гомотопические и гомологические группы начинаются с одинаковой размерности и первые нетривиальные гомотопические и гомологические группы изоморфны.

Следствие. *Односвязное клеточное пространство с тривиальными гомологиями размерностей* ≥ 2 *стягивается.*

Связь между первой гомотопической группой (фундаментальной группой) и первой гомологической группой дает

Теорема (Пуанкаре). *Для любого связного пространства* X *гомоморфизм Гуревича* $h : \pi_1(X,x_0) \to H_1(X)$ *является эпиморфизмом, ядром которого служит коммутант* $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ *группы* $\pi_1(X)$. *Таким образом,*

$$H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Теорема 14. *Если отображение* $f : X \to Y$ *индуцирует изоморфизм в гомотопических группах, то оно индуцирует изоморфизм и в гомологических группах.*

1.11. Гомологии с коэффициентами и когомологии

Пусть G – абелева группа. К сингулярному клеточному комплексу топологического пространства X можно применить алгебраические операции $-\otimes G$ и $\mathrm{Hom}(-, G)$. Получатся новые комплексы, которые имеют свои гомологии; эти гомологии называются, соответственно гомологиями и когомологиями пространства X с коэффициентами в G.

Определение. Пусть G — абелева группа. *Сингулярная q-мерная цепь* пространства X с коэффициентами в G есть линейная комбинация вида

$$\sum g_i f_i, \;\; g_i \in G, \;\; f_i : T^q \to X.$$

Группа сингулярных q-мерных цепей пространства X с коэффициентами в G обозначается $C_q(X,G)$; очевидно $C_q(X;G) = C_q(X) \otimes G$; наша прежняя группа цепей $C_q(X)$ в этих обозначениях есть $C_q(X;\mathbb{Z})$. *Сингулярная q-мерная коцепь* пространства X с коэффициентами (со значениями) в G определяется как функция на множестве q-мерных сингулярных симплексов пространства X, принимающих значения в G. Группа этих коцепей обозначается $C^q(X;G)$; очевидно, $C^q(X;G) = \mathrm{Hom}(C_q(X), G)$. Значение коцепи c на цепи a обозначается $< c, a >$.

Граничный и кограничный операторы

$$\partial = \partial_q : C_q(X;G) \to C_{q-1}(X;G),$$

$$\delta = \delta^q : C^q(X;G) \to C^{q+1}(X;G)$$

определяются формулами:

$$\partial \left(\sum g_i f_i\right) = \sum g_i \sum_{r=0}^{q} (-1)^r \Gamma_r f_i,$$

$$(\delta c)(f) = \sum_{r=0}^{q} (-1)^r c\,(\Gamma_r f)\,.$$

Очевидно, для любых c и a

$$< c, \partial a > = < \delta c, a > .$$

Проверка показывает, что $\partial \circ \partial = 0$ и $\delta \circ \delta = 0$, и мы полагаем:

$$H_q(X;G) = \mathrm{Ker}[\partial_q : C_q(X;G) \to C_{q-1}(X;G)]/$$
$$/\mathrm{Im}[\partial_{q+1} : C_{q+1}(X;G) \to C_q(X;G)],$$

$$H^q(X;G) = \mathrm{Ker}[\delta^q : C^q(X;G) \to C^{q+1}(X;G)]/$$
$$/\mathrm{Im}[\delta^{q-1} : C^{q-1}(X;G) \to C^q(X;G)].$$

Имеются также канонические операторы

$$\varepsilon : C_0(X;G) \to G \;\; (\text{сумма коэфициентов}),$$

$$\varepsilon^* : G \to C^0(X;G) \;\; (\text{константы}),$$

и мы полагаем

$$\widetilde{H}_0(X;G) = \mathrm{Ker}\,\varepsilon/\mathrm{Im}\,\partial_1, \;\; \widetilde{H}^0(X;G) = \mathrm{Ker}\,\delta^0/\mathrm{Im}\,\varepsilon^*.$$

$$\widetilde{H}_q(X;G) = H_q(X;G),$$
$$\widetilde{H}^q(X;G) = H^q(X;G) \;\; \text{при} \;\; q > 0$$

(приведенные гомологии и когомологии).

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ индуцирует гомологические и когомологические гомоморфизмы, причем первые направлены в ту же сторону, что и f, а вторые в противоположную сторону:

$$f_* : H_q(X;G) \to H_q(Y;G),$$

$$f^* : H^q(Y;G) \to H^q(X;G).$$

Гомологии и когомологии с коэффициентами гомотопически инвариантны: если $f \sim g$, то $f_* = g_*$ и $f^* = g^*$; в частности, гомологии и когомологии с коэффициентами одинаковы у гомотопически эквивалентных пространств.

Для несвязной суммы нескольких связных пространств $X = X_1 \sqcup ... \sqcup X_n$

$$H_q(X;G) = \oplus H_q(X_i;G), \ \ H^q(X;G) = \oplus H^q(X_i;G).$$

Например, у точки pt

$$H_0(pt;G) = G = H^0(pt;G),$$

$$H_q(pt;G) = 0 = H^q(pt;G) \ \text{ при } \ q > 0.$$

Теорема 15. *Пусть X — связное гладкое n-мерное многообразие. Если фиксировать его триангуляцию и вычислить n-мерные гомологии, то получим:*

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ если } X \text{ замкнуто и ориентируемо,} \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$H_n(X;\mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \text{ если } X \text{ замкнуто,} \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.12. Формулы универсальных коэффициентов

Пусть A, B — абелевы группы, $B = F_1/F_2$, где F_1 — свободная абелева группа, F_2 — ее подгруппа. Легко понять, что $A \otimes B$ есть факторгруппа группы $A \otimes F_1$ по образу естественного отображения $A \otimes F_2 \to A \otimes F_1$, но последнее, вообще говоря, не является мономорфизмом. Можно проверить, что ядро $\mathrm{Ker} : A \otimes F_2 \to A \otimes F_1$ не зависит от выбора представления $B = F_1/F_2$ и называется *периодическим произведением* групп A и B, обозначается $\mathrm{Tor}(A, B)$. Справедливо

Предложение 2.

1) $\mathrm{Tor}(A, B) \simeq$ (кручение A) $\otimes$ (кручение B).

2) *Если $A = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ для любой абелевой группы B.*

Двойственная операция Ext определяется следующим образом. Пусть A, B — абелевы группы, $A = F_1/F_2$, где F_1 — свободная абелева группа, F_2 — ее подгруппа. Тогда $\mathrm{Hom}(A, B)$ есть ядро отображения $\mathrm{Hom}(F_1, B) \to \mathrm{Hom}(F_2, B)$, $f \to f|_{F_2}$, но это отображение не является, вообще говоря, эпиморфизмом. Факторгруппа группы $\mathrm{Hom}(F_2, B)$ по образу этого отображения (то есть коядро этого отображения) обозначается через $\mathrm{Ext}(A, B)$.

Предложение 3.

1) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, B) = 0$ *для любой группы* B; $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$; $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_m$ (*в отличие от* $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = 0$).

2) *Если одна из групп A и B есть $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то* $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$.

Зная целочисленные гомологии (или когомологии) можно вычислить гомологии и когомологии с произвольными коэффициентами.

Предложение 4. *Для любых X, q, G имеют место изоморфизмы:*

$$H_q(X;G) \simeq H_q(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(X), G);$$

$$H^q(X;G) \simeq H^q(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H^{q+1}(X), G);$$

$$H^q(X;G) \simeq \mathrm{Hom}(H_q(X), G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{q+1}(X), G).$$

Эти изоморфизмы не являются естественными. Естественны только отображения, входящие в следующие точные последовательности:

$$0 \to H_q(X) \otimes G \to H_q(X;G) \to \mathrm{Tor}(H_{q-1}(X), G) \to 0;$$

$$0 \to H^q(X) \otimes G \to H^q(X;G) \to \mathrm{Tor}(H^{q+1}(X), G) \to 0;$$

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(H_q(X), G) \leftarrow H^q(X;G) \leftarrow \mathrm{Ext}(H_{q+1}(X), G) \leftarrow 0.$$

Следствие. *Предположим, что группа $H_q(X)$ конечно порождена. Тогда*

$$H^q(X) \simeq$$
$$\simeq (\text{свободная часть } H_q(X)) \otimes (\text{кручение } H_{q-1}(X)).$$

В частности, группа $H^1(X)$ свободна.

1.13. Умножение

Хотя гомологии геометричнее, чем когомологии, они играют в топологии значительно более скромную роль. Главная причина в том, что когомологические классы можно перемножать, а потому для любого коммутативного кольца G сумма

$$\oplus H^q(X;G) = H^*(X;G)$$

представляет собой ассоциативное косокоммутативное кольцо. Для гомологий ничего подобного нет.

Наиболее прозрачный способ определения когомологического умножения состоит в следующем. Пусть G — коммутативное кольцо и X_1, X_2 — клеточные пространства. По клеточным коцепям $c_1 \in C^{q_1}(X_1;G)$, $c_2 \in C^{q_2}(X_2;G)$ строим клеточную коцепь

$$c_1 \times c_2 \in C^{q_1+q_2}(X_1 \times X_2;G),$$

которая на клетке $\sigma \times \tau \subset X_1 \times X_2$ принимает значение, равное

$$(-1)^{q_1 q_2} c_1(\sigma) c_2(\tau) \ \text{ (умножение в } G).$$

Проверка показывает, что

$$\delta(c_1 \times c_2) = \delta(c_1) \times c_2 + (-1)^{q_1} c_1 \times \delta(c_2),$$

так, что, если c_1, c_2 — коциклы, то $c_1 \times c_2$ тоже коцикл. Мы получаем корректно определенное умножение:

$$[\gamma_1 \in H^{q_1}(X_1;G),\ \gamma_2 \in H^{q_2}(X_2;G)] \to \\ \to \gamma_1 \times \gamma_2 \in H^{q_1+q_2}(X_1 \times X_2;G).$$

Важное различие между гомологиями и когомологиями состоит в том, что первые ковариантны, а вторые контравариантны.

1.14. Проблема Пуанкаре и $D(2)$-гипотеза

Читатель, прочитавший предыдущую часть настоящего параграфа, сможет понять формулировку гипотезы Пункаре. Чтобы разобраться с доказательством, предложенным Перельманом, надо затратить гораздо больше усилий. Признаемся, что нам этого сделать так и не удалось.

Вначале немного истории. В 1900 году Пуанкаре предположил, что трехмерное многообразие M, у которого группы гомологий $H_k(M)$ изоморфны группам гомологий $H_k(S^3)$ сферы S^3, при всех $k = 0, 1, \ldots$, гомеоморфно S^3. В 1904 году он же нашел контрпример, называемый теперь *сферой Пуанкаре*, и сформулировал окончательный вариант своей гипотезы: *всякое односвязное компактное трехмерное многообразие без края гомеоморфно трехмерной сфере.*

Позже эта гипотеза была обобщена на произвольные размерности и получила название *обобщенная гипотеза Пуанкаре*: *для любого натурального числа $n \geq 3$ всякое многообразие размерности n гомотопически эквивалентно сфере S^n тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно ей.* Понятно, что исходная гипотеза Пуанкаре является частным случаем обобщенной гипотезы при $n = 3$.

Попытки доказать гипотезу Пуанкаре привели к многочисленным продвижениям в топологии многообразий. Доказательства обобщенной гипотезы Пуанкаре для $n \geq 5$ получены в начале 1960–1970-х. Почти одновременно Смейл и независимо Столлингс нашли доказательство для $n \geq 7$. Затем доказательство Столлингса было распространено на случаи $n = 5$ и $n = 6$ Зееманом. Доказательство значительно более трудного случая $n = 4$ было получено только в 1982 году Фридманом. Отметим, что из теоремы Новикова о топологической инвариантности характеристических классов Понтрягина следует, что существуют гомотопически эквивалентные, но не гомеоморфные многообразия в высоких размерностях.

Доказательство исходной гипотезы Пуанкаре было найдено в 2002 году Я. Г. Перельманом. Впоследствии его доказательство было проверено и представлено в развернутом виде как минимум тремя группами ученых. Доказательство использует поток Риччи с хирургией и во многом следует плану, намеченному Гамильтоном, который также первым применил поток Риччи.

Покажем теперь как проблема Пуанкаре связана с одной из проблем комбинаторной теории групп (см. [1]). Напомним, что Σ_g – компактная ориентируемая поверхность рода g. Пусть $\varphi : \pi_1(\Sigma_g) \to F_g \times F_g$ — эпиморфизм на прямое произведение свободных групп ранга g. Говорят, что *φ существенно пропускается через свободное произведение*, если существует нетривиальное свободное произведение $A * B$, $A \neq 1$, $B \neq 1$, и гомоморфизмы ψ и α такие, что $\psi : \pi_1(S_g) \to A * B$ — эпиморфизм и диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(S_g) \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ A * B \arrow[rr, "\alpha"] & & F_g \times F_g \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Следующая теорема Столлингса и Джако [11] устанавливает связь между гипотезой Пуанкаре и гипотезой о том, что всякий эпиморфизм $\varphi : \pi_1(\Sigma_g) \to F_g \times F_g$ существенно пропускается через свободное произведение.

Теорема 16. *Гипотеза Пуанкаре верна в том и только в том случае, когда для каждого $g > 1$ каждый гомоморфизм $\varphi : \pi_1(\Sigma_g) \to F_g \times F_g$ существенно пропускается через свободное произведение.*

Сформулируем теперь одну из открытых проблем гомотопической топологии, которая менее знаменита, по сравнению с проблемой Пуакаре, но решение которой наверняка сделают вас известным. Говорят, что пространство X обладает свойством $D(n)$, если $H_i(\widetilde{X}) = 0$ при $i > n$, где $\widetilde{X}$ – универсальная накрывающая X и $H^{n+1}(X, \mathcal{M}) = 0$ для любой локальной системы коэффициентов $\mathcal{M}$ на X. Уолл [4] установил, что если $n \neq 2$, то (конечный) CW комплекс имеет гомотопический тип (конечного) n-комплекса тогда и только тогда, когда он обладает свойством $D(n)$. Утверждение о том, что конечный 3-комплекс имеет гомотопический тип конечного 2-комплекса тогда и только тогда, когда он обладает свойством $D(2)$, называется *$D(2)$-гипотезой.*

2. Комбинаторная теория групп

Комбинаторная теория групп изучает группы, заданные порождающими и соотношениями. Такое задание называется *генетическим кодом* соответствующей группы. Способы задания группы с помощью порождающих и определяющих соотношений уходит корнями в топологию: он применялся вначале для фундаментальных групп многообразий. Его простота и универсальность сыграли важную роль в развитии теории групп. Наличие такого способа проявляется в родственности ряда черт топологии и теории групп. И действительно, многие вопросы, рассматриваемые в комбинаторной теории групп, имеют топологические аналоги. Это относится к алгоритмическим проблемам, теоремам о вложении, свободным конструкциям и т. д.

Приведем примеры задания групп порождающими и соотношениями:

1) $\mathbb{Z} = \langle a \mid\mid \emptyset \rangle$ – бесконечная циклическая группа порождается одним элементом и определяется пустым множеством соотношений;

2) $\mathbb{Z}_n = \langle a \mid\mid a^n = 1 \rangle$ – циклическая группа порядка n порождается одним элементом и определяется одним соотношением;

3) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid\mid ab = ba \rangle$ – свободная абелева группа ранга 2 порождается двумя элементами и определяется одним соотношением;

4) $F_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid\mid \emptyset \rangle$ – свободная группа ранга n порождается n элементами и определяется пустым множеством соотношений;

5) Фундаментальная группа замкнутой ориентируемой поверхности рода g порождается $2g$ элементами и определяется одним соотношением:

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \ldots [a_g, b_g] = 1 \rangle,$$

где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

При этом одна и та же группа может быть задана разными системами порождающих и определяющих соотношений. Возникает вопрос о сравнении этих представлений.

Символом $d(G)$ будем обозначать наименьшее число порождающих группы G. Очевидно, что наименьшее число порождающих $d(G)$ группы G не меньше ранга первой группы гомологий $H_1(G) = G/[G, G]$, т. е.

$$\mathrm{rk} H_1(G) \leq d(G).$$

Легко привести примеры групп, для которых это неравенство является строгим.

Если зафиксировать некоторую систему порождающих и изучать вопрос о минимальном числе соотношений в этой системе порождающих, то можно считать, что G имеет представление F/R, где F – свободная группа, а R – ее нормальная подгруппа. Тогда вопрос о наименьшем числе соотношений в этой системе порождающих сводится к вопросу о наименьшем числе элементов, порождающих R как нормальную подгруппу. Действие F сопряжениями на R индуцирует действие G на абелевой группе $R_{ab} = R/[R, R]$. Относительно этого действия R_{ab} является $\mathbb{Z}[G]$-модулем, который называется *модулем соотношений группы* G. Для полноты картины остановимся более подробно на этом понятии (см., например, [10]).

2.1. Модуль соотношений

Если

$$P = \langle X \mid\mid \mathcal{R} \rangle \tag{1}$$

– конечное представление группы G, то $G = F/R$, где $R = \langle \mathcal{R} \rangle^F$ – нормальное замыкание множества $\mathcal{R}$ в группе $F = F(X)$, и мы имеем короткую точную последовательность:

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1.$$

По представлению (1) стандартным образом строится 2-комплекс $K = K_P$, фундаментальная группа которого $\pi_1(K)$ изоморфна G. Группа G действует на второй гомотопической группе $\pi_2(K)$ при стандартном действии фундаментальной группы на K.

Гомоморфизм $\varphi : F \mapsto G$ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\varphi^* : \mathbb{Z}[F] \mapsto \mathbb{Z}[G]$.

Рассмотрим модули $\mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|}$ и $\mathbb{Z}[G]^{\oplus|\mathcal{R}|}$. Тогда $\mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \simeq \Delta_F/\Delta_F\Delta_R$, где Δ_F (соответственно, Δ_R) – фундаментальный идеал $\mathbb{Z}[F]$ (соответственно, $\mathbb{Z}[R]$). Определим

$$\kappa : \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \longrightarrow \mathbb{Z}[G],$$

полагая

$$\kappa : (\alpha_x)_{x\in X} \mapsto \sum_{x\in X}(x-1)\alpha_x, \quad \alpha_x \in \mathbb{Z}[G].$$

С другой стороны, определим

$$\tau : \mathbb{Z}[G]^{\oplus|\mathcal{R}|} \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|},$$

полагая

$$\tau : (\beta_r)_{r\in\mathcal{R}} \mapsto \sum_{r\in\mathcal{R}}(J_{rx}\beta_r)_{x\in X}, \quad \beta_r \in \mathbb{Z}[G],$$

где J_{rx} – образ в $\mathbb{Z}[G]$ производной Фокса

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad r \in \mathcal{R}, \quad x \in X.$$

Имеет место точная последовательность модулей

$$0 \longrightarrow \pi_2(K) \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\oplus|\mathcal{R}|} \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \xrightarrow{\kappa} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow^{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

где ε – гомоморфизм тривиализации.

Заметим, что образ $\mathrm{Im}(\tau)$ это в точности модуль соотношений R/R', возникающий из представления (1). Вложение

$$i : R/R' \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|}$$

– хорошо известное вложение Магнуса

$$i : rR' \mapsto \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{x\in X}, \quad r \in R,$$

и мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow R/R' \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \xrightarrow{\kappa} \Delta_G \longrightarrow 0.$$

Отметим также, что можно изучать и высшие модули соотношений представления F/R, которые определяются следующим образом:

$$\gamma_n(R)/[\gamma_n(R), R] = \gamma_n(R)/\gamma_{n+1}(R).$$

В частности, при $n = 1$ имеем обычный модуль соотношений.

2.2. Представления со скачком соотношений

Очевидно, что ранг $\mathbb{Z}[G]$-модуля R_{ab} не превосходит числа элементов, необходимых для порождения R как нормальной подгруппы группы F. Следовательно, ранг этого модуля дает нижнюю оценку минимального числа соотношений, необходимых для представления G в данной системе порождающих. Конечное представление F/R, у которого ранг модуля R_{ab} меньше наименьшего числа элементов, требуемых для порождения R как нормальной подгруппы F, называется *представлением со скачком соотношений.*

Проблема скачка соотношений. Существуют ли конечно определенные группы со скачком соотношений?

Если отказаться от условия конечной определенности, то ответ положительный. Бествина и Бради [6] построили конечно порожденную группу, которая не является конечно определенной, но у которой модуль соотношений конечно порожден. Поэтому можно говорить, что эта группа имеет бесконечный скачок соотношений.

Кандидатами на группы со скачком соотношений являются группы вида $H_{m,n}$=$(\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z})*(\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z})$, изучавшиеся в работе Епстейна [5]. Эти группы имеют стандартное представление:

$$H_{m,n} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^m = z^n = [x, y] = [z, t] = 1\rangle,$$

т. е. задаются четырьмя порождающими и четырьмя соотношениями. Вместе с тем в работе Грюнберга и Линнела [7] было доказано, что при $(m, n) = 1$ модуль соотношений группы $H_{m,n}$ имеет ранг 3.

Проблема. Доказать, что группа $H_{3,2} =$ $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z})*(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z})$ в стандартных порождающих не может быть задана тремя соотношениями.

Из положительного решения этой проблемы последует решение проблемы скачка соотношений. Отметим, что используя метод, предложенный в следующем параграфе, нетрудно показать, что группа $H_{2,2}$ не может быть определена тремя соотношениями.

Другими возможными кандидатами на группы со скачком соотношений являются группы из работы Бридсона и Твидейла [9].

Напомним некоторые результаты из этой работы. Рассмотрим группу $Q_n = \langle x, t \mid\mid \rho_n = x^n = 1\rangle$, где

$$\rho_n(x, t) = (txt^{-1})x(txt^{-1})^{-1}x^{-n-1}.$$

Если ввести новый порождающий $b = txt^{-1}$, то

$$Q_n = \langle x, b, t \mid\mid [b, x] = x^n = b^n = 1, b = txt^{-1}\rangle,$$

т. е. Q_n является HNN-расширением группы $\mathbb{Z}_n\times$ $\mathbb{Z}_n$ с проходной буквой t.

Обозначим $q_n = (n + 1)^n - 1$ и $c_n = nq_n$. Если $(q_m, q_n) = 1$, то группа $\Gamma_{m,n} = Q_m * Q_n$ имеет представление:

$$Q_m * Q_n = \langle x_m, t_m, x_n, t_n \mid \\ \mid \rho_m(x_m, t_m) = \rho_n(x_n, t_n) = x_m^m = x_n^n = 1\rangle,$$

а модуль соотношений R_{ab} этого представления порождается как $\mathbb{Z}[G_{m,n}]$-модуль образами ρ_m, ρ_n и $x_m^m x_n^n$. Более того, при попарно взаимно простых $m_1, m_2, \ldots, m_r$ модуль соотношений группы $Q_{m_1} * Q_{m_2} * \ldots * Q_{m_r}$ имеет ранг $r + 1$.

Проблема скачка соотношений тесно связана со знаменитой $D(2)$-гипотезой, о которой мы говорили в конце предыдущего параграфа. В работе [9] по каждой группе $\Gamma_{m,n}$ строится некоторый 3-комплекс, который является контрпримером к $D(2)$-гипотезе если при $(m, n) = 1$ группа $\Gamma_{m,n}$ обладает скачком соотношений.

Видим, что проблема скачка соотношений сводится к такой проблеме комбинаторной теории групп.

Проблема минимального нормального порождения. Пусть F – неабелева свободная группа, $r_1, r_2, \ldots, r_m$ – некоторые ее элементы, $R = \langle r_1, r_2, \ldots, r_m\rangle^F$ – нормальное замыкание этих элементов в F. Построить алгоритм, позволяющий находить минимальное число нормальных порождающих группы R.

Решение этой проблемы было бы интересно даже для случая, когда слова r_i являются либо степенями порождающих группы F, либо коммутаторами порождающих.

Рассмотрим некоторые примеры представлений, в которых удается уменьшить число соотношений. Наиболее простым является представление

$$(Z_2 * Z_3) \times Z = \langle a, b, c \mid\mid a^2 = b^3 = [c, a] = [c, b] = 1\rangle.$$

Нетрудно проверить, что эта группа может быть задана тремя соотношениями:

$$\langle a, b, c, d \mid\mid a^2 b^3 = a^2[c, a] = b^3[c, b] = 1\rangle.$$

Заметим, что в этом представлении соотношение $a^2b^3 = 1$ можно заменить соотношением $[a, c][b, c] = 1$. Этот пример сообщил нам Р. Михайлов.

Другие примеры такого род могут быть найдены в работах [3, 7, 9].

В следующем параграфе предлагается метод, позволяющий для некоторых представлений доказать, что число соотношений при заданной системе порождающих нельзя уменьшить. Используя этот метод, будет доказано, что если m и n не являются взаимно простыми, то группа $K_{m,n} = (\mathbb{Z}_m*\mathbb{Z}_n)\times\mathbb{Z}$ не может быть задана тремя соотношениями в стандартных порождающих.

К сожалению, этот метод не работает для групп из работы [9].

3. Представления с неуменьшаемым числом соотношений

В настоящем параграфе мы рассматриваем группы

$$K_{m,n}=F/R = \langle x,y,z|\ x^m=y^n=[x,z]=[y,z]=1\rangle,$$

$m,n \in \mathbb{N}, m,n>1$ и изучаем условия, при которых число соотношений можно уменьшить, и условия, при которых этого сделать нельзя. Как мы видели ранее, группа $K_{2,3}$ может быть задана в тех же порождающих тремя соотношениями.

Вначале введем необходимые обозначения. Символом $\gamma_i G$, $i=1,2,\ldots$, будем обозначать члены нижнего центрального ряда группы G, где $\gamma_1 G = G$, а $\gamma_{i+1}G=[\gamma_i G, G]$ при $i=1,2,\ldots$ Под коммутаторами понимаем следующие выражения:

$$[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh, \quad [g,h,f]=[[g,h],f], \quad g,h,f\in G.$$

На протяжении этого параграфа символом $F=\langle x,y,z\rangle$ будем обозначать свободную группу ранга 3.

Теорема 1. *Пусть m и n – натуральные числа.*

1)*Если наибольший общий делитель (m,n) отличен от 1, то группа $K_{m,n}$ в стандартных порождающих не может быть задана тремя соотношениями.*

2)*Если $(m,n)=1$, то группа $K_{m,n}$ имеет представление*

$$K_{m,n}=F/R=\langle x,y,z||\ x^z=x^r,\ \ y^z=y^s,\ \ x_m=y^n\rangle,$$

где $a^b=b^{-1}ab$, а r и s – некоторые целые числа.

Доказательство. 1) Положим $d=(m,n)$. По условию $d>1$. Предположим, что группа

$$G=K_{m,n}=F/R= \\ =\langle x,y,z||\ x^m=y^n=[x,z]=[y,z]=1\rangle,$$

где $R=\langle\mathcal{R}\rangle^F$, $\mathcal{R}=\{x^m,y^n,[x,z],[y,p]\}$, имеет представление с тремя соотношениями:

$$G=F/R=\langle x,y,z\ ||\ A=B=C=1\rangle,$$

т. е.

$$R=\langle\mathcal{R}\rangle^F=\langle\mathcal{R}_1\rangle^F,$$

где $\mathcal{R}_1=\{A,B,C\}$, A,B,C – слова от порождающих x,y,z и обратных к ним.

Не уменьшая общности, можно считать, что

$$A=x^m a, \quad B=y^n b,$$

а элементы a,b,C лежат в коммутанте F'. Действительно, рассматривая фактор-группу

$$R/(R\cap F')\simeq\langle x^m\rangle\times\langle y^n\rangle\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},$$

видим, что образы элементов A,B,C – это слова от x^m,y^n. Здесь и далее мы обозначаем элементы группы и их образы в фактор-группе одними и теми же символами. Применяя преобразования Тице, можно привести их к виду $x^m,y^n,1$, а это и означает, что A,B,C имеют требуемый вид.

Рассмотрим фактор-группу $F/\gamma_3 F$ и найдем образ группы $\langle\mathcal{R}_1\rangle^F$ в этой фактор-группе. Чтобы найти порождающие $\langle\mathcal{R}_1\rangle^F$, будем сопрягать элементы из $\mathcal{R}_1$ порождающими группы G. Имеем

$$A^y\equiv y^{-1}x^m y a^y\equiv y^{-1}yx^m[x^m,y]a^y\equiv \\ \equiv x^m a[x,y]^m = A[x,y]^m \ (\mathrm{mod}\gamma_3 F).$$

Отсюда получаем, что $A^{-1}A^y\equiv$ $\equiv[x,y]^m\in\langle\mathcal{R}_1\rangle^F$ $(\mathrm{mod}\gamma_3 F)$. Сопрягая далее элементом z, получим:

$$A^z\equiv z^{-1}x^m z a^z\equiv z^{-1}zx^m[x^m,z]a^z\equiv x^m a[x,z]^m= \\ =A[x,z]^m\ (\mathrm{mod}\gamma_3 F).$$

Следовательно,
$A^{-1}A^z\equiv[x,z]^m\in\langle\mathcal{R}_1\rangle^F$ $(\mathrm{mod}\gamma_3 F)$.

Таким образом, мы показали, что в фактор-группе $\langle\mathcal{R}_1\rangle^F/(\langle\mathcal{R}_1\rangle^F\cap\gamma_3 F)$ лежат коммутаторы

$$[x,y]^m, \quad [x,z]^m.$$

Аналогичным образом, сопрягая B последовательно элементами x,z, можно показать, что в фактор-группе $\langle\mathcal{R}_1\rangle^F/(\langle\mathcal{R}_1\rangle^F\cap\gamma_3 F)$ лежат коммутаторы

$$[y,x]^n, \quad [y,z]^n.$$

Учитывая, что $(m,n)=d$, заключаем, что образ подгруппы $\langle\mathcal{R}_1\rangle^F$ по модулю $\gamma_3 F$ имеет вид:

$$\langle\mathcal{R}_1\rangle^F/(\langle\mathcal{R}_1\rangle^F\cap\gamma_3 F)=\langle A,B,C,[x,y]^d,[x,z]^m,[y,z]^n\rangle.$$

Учитывая, что элемент C лежит в коммутанте F', можно считать, что по модулю $\gamma_3 F$ он имеет вид:

$$C\equiv[x,y]^{\delta_1}[x,z]^{\delta_2}[y,z]^{\delta_3}\ (\mathrm{mod}\gamma_3 F),$$

где

$$0\le\delta_1<d, \ \ 0\le\delta_2<m, \ \ 0\le\delta_3<n.$$

Покажем, что коммутаторы $[x,z]$ и $[y,z]$ не могут одновременно лежать в подгруппе $\langle\mathcal{R}_1\rangle^F$. Это и приведет к противоречию с тем, что

$$\langle\mathcal{R}\rangle^F=\langle\mathcal{R}_1\rangle^F.$$

Если $[x,z]\in\langle\mathcal{R}_1\rangle^F$, то по модулю $\gamma_3 F$ справедливо равенство

$$[x,z]\equiv[x,y]^{d\alpha_1}[x,z]^{m\alpha_2}[y,z]^{n\alpha_3}C^\alpha\ (\mathrm{mod}\gamma_3 F),$$

для некоторых целых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha$. Вспоминая выражение для C, перепишем последнее равенство в таком виде:

$$[x,z]\equiv \\ \equiv[x,y]^{d\alpha_1+\alpha\delta_1}[x,z]^{m\alpha_2+\alpha\delta_2}[y,z]^{n\alpha_3+\alpha\delta_3}\ (\mathrm{mod}\gamma_3 F).$$

Отсюда получим систему:

$$\begin{cases} 0 = d\alpha_1 + \alpha\delta_1, \\ 1 = m\alpha_2 + \alpha\delta_2, \\ 0 = n\alpha_3 + \alpha\delta_3. \end{cases}$$

Аналогично получим равенство

$$[y, z] \equiv [x, y]^{d\beta_1}[x, z]^{m\beta_2}[y, z]^{n\beta_3}C^{\beta} \equiv$$

$$\equiv [x, y]^{d\beta_1+\beta\delta_1}[x, z]^{m\beta_2+\beta\delta_2}[y, z]^{n\beta_3+\beta\delta_3} \ (\mathrm{mod}\gamma_3 F),$$

которое должно выполняться для некоторых целых $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta$. Это равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} 0 = d\beta_1 + \beta\delta_1, \\ 0 = m\beta_2 + \beta\delta_2, \\ 1 = n\beta_3 + \beta\delta_3. \end{cases}$$

Заметим, что α и β отличны от нуля. Действительно, если $\alpha = 0$, то из второго уравнения первой системы получим равенство $m\alpha_2 = 1$, которое не может быть выполнено в целых числах. Аналогично, если $\beta = 0$, то из третьего уравнения второй системы получим равенство $n\beta_3 = 1$, которое также не может быть выполнено в целых числах.

Из уравнения $1 = m\alpha_2 + \alpha\delta_2$ следует, что $(m, \alpha) = 1$, но тогда из уравнения $0 = d\alpha_1 + \alpha\delta_1$ следует, что либо δ_1 делится на d, либо $\alpha_1 = \delta_1 = 0$. Учитывая, что $0 \leq \delta_1 < d$, заключаем, что $\alpha_1 = \delta_1 = 0$. Рассматривая аналогичным образом третье уравнение первой системы, приходим к равенству $\alpha_3 = \delta_3 = 0$.

Положим $m = dm_1$, $n = dn_1$, где $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$, $(d, m_1) = (d, n_1) = 1$. Из уравнений

$$1 = m\alpha_2 + \alpha\delta_2, \quad 1 = n\beta_3 + \beta\delta_3,$$

следует, что $(m, \alpha\delta_2) = 1$, $(n, \beta\delta_3) = 1$. В частности, $(m, \delta_2) = (n, \delta_3) = 1$. Тогда из уравнения $0 = n\alpha_3 + \alpha\delta_3$, которое равносильно уравнению $0 = dn_1\alpha_3 + \alpha\delta_3$, следует, что $\alpha\delta_3$ делится на d, а учитывая, что $(\delta_3, n) = 1$, заключаем, что α делится d. Но это противоречит равенству $1 = m\alpha_2 + \alpha\delta_2$.

2) Покажем, что группа при взаимно простых m и n представление

$$\mathcal{P} = \langle x, y, z \mid\mid x^z = x^r, \quad y^z = y^s, \quad x^m = y^n \rangle$$

определяет группу $K_{m,n}$ при некоторых r и s. Действительно, возводя первое соотношение в степень m, а второе – в степень n, получим соотношения

$$(x^m)^z = x^{rm}, \quad (y^n)^z = y^{sn}.$$

Преобразуем первое из этих соотношений:

$$x^{rm} = (x^m)^z = (y^n)^z = y^{sn} = (y^n)\, s = x^{ms},$$

т. е.

$$x^{rm} = x^{ms} \Leftrightarrow x^{m(r-s)} = 1.$$

Аналогичным образом, приходим к соотношению

$$y^{n(r-s)} = 1.$$

Если $r - s = 1$, то $x^n = y^m = 1$. Полагая $r = s + 1$, видим, что представление $\mathcal{P}$ дает ту же группу, что и представление

$$\mathcal{P}_1 = \langle x, y, z \mid\mid x^z = x^{s+1}, \quad y^z = y^s, \quad x^m = y^n = 1 \rangle.$$

Мы хотим выбрать такое s, чтобы выполнялись соотношения

$$x^z = x, \quad y^z = y.$$

Для этого должны выполняться сравнения

$$s + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m), \quad s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n),$$

т. е.

$$s \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m), \quad s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n).$$

Учитывая, что $(m, n) = 1$, найдем такое натуральное число t, для которого $mt \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$. Положим $s = mt$. Тогда для этого t наша группа будет иметь представление

$$\langle x, y, z \mid\mid x^z = x, \quad y^z = y, \quad x^p = y^q = 1 \rangle,$$

а это и есть исходное представление группы $K_{m,n}$. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 1 у нас возникли группы такого вида

$$G = G(m, n, p, q) = \langle a, b, c \mid\mid a^c = a^m, \ b^c = b^n, \ a^p = b^q \rangle,$$

где m, n, p, q – некоторые целые числа. Они интересны тем, что имеют сбалансированные представления (число порождающих равно числу соотношений). Интересно изучить свойства этих групп и, в частности, попытаться ответить на такой

Вопрос. При каких наборах $(m, n; p, q)$ и $(m', n'; p', q')$ группа $G(m, n; p, q)$ изоморфна группе $G(m', n'; p', q')$?

Используем тот же прием, что мы использовали в доказательстве теоремы. Возведя первое соотношение группы $G(m, n, p, q)$ в степень p, а второе в степень q, получим соотношения

$$(a^p)^c = a^{mp}, \quad (b^q)^c = b^{qn}.$$

Из которых, ввиду третьего соотношения группы G, заключаем, что

$$a^{mp} = a^{pn}$$

а потому

$$a^{p(m-n)} = 1.$$

Аналогичным образом приходим к соотношению

$$b^{q(m-n)} = 1.$$

Следовательно, в группе G элементы a и b конечного порядка.

Если $m - n = 1$, то $a^p = b^q = 1$. Если при этом $m = p+1$, $n = q+1$, т. е.

$$m = p+1, \quad q = p-1, \quad n = p,$$

то $a^c = a$, $b^c = b$ и в этом случае

$$G \simeq (\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_{p-1}) \times \mathbb{Z},$$

т. е. мы получили группу $K_{p,p-1}$.

Если положить $m = p+1$, $n = q+1$, то получим группу

$$G(p+1, q+1; p, q) \equiv G(p,q) = \\ = \langle a, b, c \mid\mid a^c = a^{p+1}, \quad b^c = b^{q+1}, \quad a^p = b^q \rangle.$$

В ней

$$a^{p(p-q)} = b^{q(p-q)} = 1.$$

Возведем соотношение $a^c = a^{p+1}$ в степень $p - q$:

$$(a^{p-q})^c = a^{(p+1)(p-q)} = a^{p-q}.$$

Итак,

$$(a^{p-q})^c = a^{p-q}.$$

Аналогично,

$$(b^{p-q})^c = b^{p-q}.$$

Пример. В случае $q = 1$ имеем группу

$$G(p,1) = \langle a, b, c \mid\mid a^c = a^{p+1}, \ b^c = b^2, \ a^p = b \rangle = \\ = \langle a, c \mid\mid a^c = a^{p+1}, \ (a^p)^c = a^{2p} \rangle,$$

в которой, как легко заметить, справедливо соотношение $a^{p(p-1)} = 1$.

Далее, из соотношений $a^c = a^{p+1}$ и $a^{p(p-1)} = 1$ следует соотношение $(a^p)^c = a^{2p}$. Действительно,

$$(a^p)^c = (a^c)^p = a^{(p+1)p},$$

$$a^{p(p+1)} a^{-2p} = a^{p(p-1)} = 1.$$

Итак,

$$G(p,1) = \langle a, c \mid\mid a^c = a^{p+1}, \quad a^{p(p-1)} = 1 \rangle.$$

Если $(p+1, p(p-1)) = 1$, то

$$G(p,1) \simeq \mathbb{Z}_{p(p-1)} \rtimes \mathbb{Z},$$

где первая циклическая группа порождается элементом a, а вторая – элементом c.

Если $(p+1, p(p-1)) \neq 1$, то такого изоморфизма уже нет, так как элемент a^{p+1} имеет меньший порядок чем элемент a. Учитывая, что $(p, p+1) = 1$, заключаем, что $(p+1, p-1) \neq 1$. Ясно, что $(p+1, p-1) = (p+1, p+1-(p-1)) = (p+1, 2)$. Следовательно,

$$(p+1, p(p-1)) = 2,$$

и p – нечетное число. В частности, справедливо

Предложение 1. *Пусть $p = 3$. Тогда*

$$G(p,1) = \langle a, c \mid\mid a^c = a^4, \quad a^6 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Как было замечено выше, в $G(3,1)$ справедливо соотношение

$$(a^3)^c = (a^c)^3 = a^{12} = 1,$$

а потому $a^3 = 1$ и группа имеет представление

$$G(3,1) = \langle a, c \mid\mid a^c = a^4, \quad a^3 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}.$$

Предложение доказано.

Для произвольного p имеем соотношение

$$\left(a^{p(p-1)/2}\right)^c = (a^c)^{p(p-1)/2} = \\ = a^{(p+1)(p-1)p/2} = \left(a^{p(p-1)}\right)^{(p+1)/2} = 1,$$

из которого следует, что $a^{p(p-1)/2} = 1$ и

$$G(p,1) = \langle a, c \mid\mid a^c = a^{p+1}, \quad a^{p(p-1)} = 1 \rangle = \\ = \langle a, c \mid\mid a^c = a^{p+1}, \quad a^{p(p-1)/2} = 1 \rangle.$$

Учитывая, что $(p+1, p(p-1)/2) = 1$ или 2, заключаем,

$$G(p,1) \simeq \mathbb{Z}_{p(p-1)/2^s} \times \mathbb{Z},$$

где s – максимальная степень двойки, которая делит $p - 1$. Таким образом, мы получили

Предложение 2. *Для всякого натурального p группа $G(p,1)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_{p(p-1)} \rtimes \mathbb{Z}$ в случае, когда p четно, и изоморфна группе $\mathbb{Z}_{p(p-1)/2^s} \rtimes \mathbb{Z}$, где s – максимальная степень двойки, которая делит $p-1$, в случае, когда p – нечетно.*

В общем случае, справедлива

Теорема 2. *Имеет место изоморфизм*

$$G(p,q) \simeq \left(\mathbb{Z}_{p(p-q)/D} \underset{\mathbb{Z}_{(p-q)/D}}{*} \mathbb{Z}_{q(p-q)/D}\right) \rtimes \mathbb{Z},$$

где $D = 1$, если $(p+1, q+1) = 1$, и D – наибольший делитель $p - q$, такой, что $(p+1, (p-q)/D) = 1$, если $(p+1, q+1) \neq 1$.

Доказательство. По определению

$$G(p,q) = \langle a, b, c \mid\mid a^c = a^{p+1}, \quad b^c = b^{q+1}, \quad a^p = b^q \rangle.$$

Как было замечено выше, в группе $G(p,q)$ имеют место соотношения

$$a^{p(p-q)} = b^{q(p-q)} = 1.$$

Учитывая, что элементы a и a^{p+1}, а также b и b^{q+1} сопряжены, заключаем, что они должны иметь одинаковые порядки. Следовательно:

$$(p+1, p(p-q)) = (p+1, p-q) = (p+1, q+1),$$

$$(q+1, q(p-q)) = (q+1, p-q) = (q+1, p+1).$$

Если $(p+1, q+1) = 1$,, то

$$G(p,q) \simeq \left(\mathbb{Z}_{p(p-q)} \underset{\mathbb{Z}_{p-q}}{*} \mathbb{Z}_{q(p-q)}\right) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Если же $(p+1, q+1) \neq 1$, то надо взять такое число D, для которого $(p+1, (p-q)/D) = 1$. Ясно, что в этом случае $(q+1, (p-q)/D) = 1$, а потому

$$G(p,q) \simeq \left(\mathbb{Z}_{p(p-q)/D} \underset{\mathbb{Z}_{(p-q)/D}}{*} \mathbb{Z}_{q(p-q)/D}\right) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы получили частичный ответ на сформулированный выше вопрос. Вопрос о том, существует ли аналогичное разложение для произвольной группы $G(m, n, p, q)$ остается открытым. Также сформулируем и такой

Вопрос. При каких наборах (m, n, p, q) группа $G(m, n, p, q)$ тривиальна?

Отметим, что этот вопрос тесно связан с проблемой Уайтхеда об асферических комплексах из гомотопической топологии (см. [10]).

Литература

[1] Линдон, Р. *Комбинаторная теория групп* / Р. Линдон, П. Шупп. – М.: Мир, 1980.

[2] Фоменко, А. Т. *Курс гомотопической топологии* / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. – М.: Наука, 1989.

[3] Rapaport, E. S. *On the defining relations of a free product* / E. S. Rapaport // Pacific J. Math. – 1964. – Vol. 14, no. 4. – P. 1389 – 1393.

[4] Wall, C. T. C. *Finiteness conditions for CW-complexes* / C. T. C. Wall // Ann. of Math. – 1965. – Vol. 81, no. 1. – P. 56 – 69.

[5] Epstein, D. B. A. *Finite presentations of groups and 3-manifolds* / D. B. A. Epstein // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1961. – Vol. 12 – P. 205 – 212.

[6] M. Bestvina, M. *Morse theory and finiteness conditions of groups* / M. Bestvina and N. Brady // Invent. of Math. – 1997. – Vol. 129. – P. 445 – 470.

[7] Gruenberg, K. W. *Generation gaps and abelianized defects of free products* / K. W. Gruenberg, P. A. Linnell // J. Group Theory. – 2008. – Vol. 11, no. 5. – P. 587 – 608.

[8] Hog, C. *Presentation classes, 3-manifolds and free products* / C. Hog, M. Lustig, W. Metzler// Geometry and topology.– Berlin, 1985.

[9] Bridson, M. *Deficiency and abelianized deficiency of some virtually free groups* / M. Bridson, M. Tweedale // Math. Proc. – Cambridge Philos. Soc., 2007. – Vol. 143, no. 2 – P. 257 – 264.

[10] Mikhailov, R. *Lower central and dimension series of groups, Lecture Notes in Mathematics* / R. Mikhailov, I. B. S. Passi. – Berlin, 2009.

[11] Jaco, W. *Heegaard splittings and splitting homomorphisms* / W. Jaco // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 365 – 379.

УДК 514.772.22

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Д. А. Бердинский

ON MINIMAL SURFACES IN HEISENBERG GROUP

D. A. Berdinsky

В работе предложен метод построения минимальных поверхностей в группе Гейзенберга, наделенной метрикой Терстона. Конструкция основана на представлении типа Вейерштрасса, и порождающие спиноры поверхности выражены в терминах функций Бейкера–Ахиезера.

It's proposed the method for constructing minimal surfaces in Heisenberg group, endowed with Thurston's metric. The construction is based on Weierstrass type representation, and generating spinors of surface are expressed in terms of Baker-Akhiezer functions.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, минимальные поверхности, функции Бейкера–Ахиезера.

Keywords: Heisenberg group, minimal surfaces, Baker–Akhiezer functions.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-91056).

1. Введение

В данной работе изложен метод построения минимальных поверхностей в группе Гейзенберга с терстоновской метрикой, основанный на использовании представлений типа Вейерштрасса минимальных поверхностей в этой группе [1].

Предложенный метод находится в русле работы Бобенко [3], где описываются торы постоянной средней кривизны в трехмерном евклидовом пространстве.

Как и в евклидовом случае, здесь возникает эллиптическое уравнение типа sine–Gordon:

$$v_{z\bar{z}} + 2\sinh v = 0,$$

но записанное не для логарифма конформного фактора, а для логарифма потенциала оператора Дирака, возникающего из представления Вейерштрасса [2]. В геометрических терминах этот потенциал также можно представить как $e^v = \frac{i}{4}n_3 e^{\alpha}$ [1], где n_3 — скалярное произведение вектора нормали к поверхности с выделенным направлением e_3 в группе Гейзенберга, а $e^{2\alpha}$ — это фактор метрики на поверхности по отношению к конформному параметру z.

Все это позволяет применить методы теории конечнозонного интегрирования [3],[4] к построению минимальных поверхностей в группе Гейзенберга. В данной работе мы не касаемся вопроса о замыкании поверхностей и вопроса об их особенностях.

Следует также отметить связь минимальных поверхностей в группе Гейзенберга с известным в физике уравнением электролитического типа:

$$\Delta\sigma - \sinh\sigma = 0.$$

Действительно, поскольку e^v чисто мнимое, то взяв $Re[v]$, после соответствующей замены, получим в точности уравнение электролитического типа.

2. Группа Гейзенберга

Группа Гейзенберга Nil образована всеми матрицами вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

с обычным матричным умножением и левоинвариантной метрикой вида:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2.$$

Алгебра Ли образована элементами:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

В нашем случае удобно перейти к экспоненциальным координатам x^1, x^2, x^3, которые связаны с исходными следующим образом:

$$x = x^1, y = x^2, z = x^3 + \frac{1}{2}x^1x^2.$$

В экспоненциальных координатах метрика имеет вид:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (\frac{1}{2}x^2dx^1 - \frac{1}{2}x^1dx^2 + dx^3)^2.$$

3. Представление Вейерштрасса минимальных поверхностей в группе Гейзенберга

В этом разделе мы кратко напомним представление Вейерштрасса для минимальных поверхностей в группе Nil [1]. Всякую поверхность в группе Nil локально можно представить следующим образом:

$$x^1(z,\bar{z}) = \int_{z_0}^{z} Z_1dz + \overline{Z}_1d\bar{z},$$

$$x^2(z,\bar{z}) = \int_{z_0}^{z} Z_2dz + \overline{Z}_2d\bar{z},$$

$$x^3(z,\bar{z}) = \int_{z_0}^{z} (Z_3dz + \overline{Z}_3d\bar{z}) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} x^1(Z_2dz + \overline{Z}_2d\bar{z}) - \frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} x^2(Z_1dz + \overline{Z}_1d\bar{z}),$$

где z—конформный параметр, а $Z_1(z,\bar{z}), Z_2(z,\bar{z})$ и $Z_3(z,\bar{z})$ выражаются через спинорные функции $\psi_1(z,\bar{z}), \psi_2(z,\bar{z})$ следующим образом:

$$Z_1 = \frac{i}{2}(\overline{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad Z_2 = \frac{1}{2}(\overline{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad Z_3 = \psi_1\overline{\psi}_2.$$

При этом сами спинорные функции $\psi_1(z,\bar{z}), \psi_2(z,\bar{z})$ удовлетворяют нелинейному уравнению Дирака:

$$\mathcal{D}_{Nil}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{Nil} & 0 \\ 0 & V_{Nil} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{1}$$

$$U_{Nil} = V_{Nil} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2),$$

где $H(z,\bar{z})$ – средняя кривизна поверхности. Для минимальных поверхностей $H = 0$, и потенциал $U_{Nil} = V_{Nil} = \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)$ является чисто мнимым.

4. Деривационные уравнения поверхностей постоянной средней кривизны в терминах спинорных функций

На поверхности постоянной средней кривизны квадратичный дифференциал $\widetilde{A}dz^2$, заданный следующим выражением, является голоморфным [1]:

$$\widetilde{A} := \overline{\psi}_2 \partial\psi_1 - \psi_1\partial\overline{\psi}_2 + \frac{2Hi}{2H+i}\psi_1^2\overline{\psi}_2^{\,2}. \qquad (2)$$

Далее положим $U_{Nil} = e^v$ и, используя (1), получим следующее выражение для производной потенциала U_{Nil}:

$$\frac{\partial}{\partial z}U_{Nil} = v_z e^v =$$

$$= \frac{1}{4}(2H+i)\psi_2\partial\overline{\psi}_2 + \frac{1}{4}(2H-i)\overline{\psi}_1\partial\psi_1 - \frac{iH}{2}\psi_1\overline{\psi}_2|\psi_2|^2. \qquad (3)$$

Объединяя (2), (3) и (1), мы получим уравнения Гаусса–Вейнгартена в терминах спинорных функций ψ_1, ψ_2:

$$\partial_z \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_z & Be^{-v} \\ -e^v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

$$\partial_{\bar z} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^v \\ -\overline{B}e^{-v} & v_{\bar z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

где $B = \frac{1}{4}(2H+i)\widetilde{A}$. Поскольку мы считаем, что $H = 0$, то B—голоморфная функция, и условие совместности уравнений Гаусса–Вейнгартена принимает вид:

$$v_{z\bar z} + e^{2v} - |B|^2e^{-2v} = 0. \qquad (4)$$

Далее будем предполагать, что решение (1) периодическое по некоторой решетке и $B \neq 0$. С помощью замены координат можем считать, что $|B| = 1$. В этом случае, уравнение (4) примет вид:

$$v_{z\bar z} + e^{2v} - e^{-2v} = 0. \qquad (5)$$

Для того чтобы решение (5) отвечало некоторой минимальной поверхности, необходимо потребовать, чтобы функция e^v являлась чисто мнимой. Необходимость этого условия очевидно следует из вида потенциала (1), достаточность см. [2].

Без ограничения общности будем считать, что $B = -1$. Теперь задачу можно сформулировать следующим образом — построить нетривиальные периодические решения $\psi_1(z,\bar z), \psi_2(z,\bar z)$ следующей системы:

$$\partial_z \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_z & -e^{-v} \\ -e^v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

$$\partial_{\bar z} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^v \\ e^{-v} & v_{\bar z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

так, чтобы e^v являлась чисто мнимой функцией.

5. Решение уравнений Гаусса-Вейнгартена в терминах функций Бейкера–Ахиезера

Положим $v = -\frac{u}{2}$ и $\widehat{\psi}_1 = i\psi_1$, $\widehat{\psi}_2 = e^{-v}\psi_2$. Сделав замену аргумента $z = \frac{1}{2}w$, можно убедиться, что в новых обозначениях $\widehat{\psi}_1(w,\bar w)$ и $\widehat{\psi}_2(w,\bar w)$ система (6) принимает вид:

$$\partial_w \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_w}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{u_w}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}_2 \end{pmatrix},$$

$$\partial_{\bar w} \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}e^{-u} \\ -\frac{i}{2}e^{u} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}_2 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Система (7) допускает возможность введения спектрального параметра следующим образом:

$$\partial_w \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_w}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2}\lambda & \frac{u_w}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}_2 \end{pmatrix},$$

$$\partial_{\bar w} \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2\lambda}e^{-u} \\ -\frac{i}{2}e^{u} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}_2 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Отметим, что (8) совпадает с (7) при $\lambda = -1$. Условие совместности (8) принимает вид:

$$u_{w\bar w} + \sinh u = 0. \qquad (9)$$

Пусть Γ — риманова поверхность, для которой существует мероморфная функция λ, обладающая нулем второго порядка в точке $P_1 \in \Gamma$ и полюсом второго порядка в точке $P_2 \in \Gamma$. Пусть k_1^{-1} и k_2^{-1} локальные параметры в окрестностях точек P_1 и P_2 соответственно, такие, что $\lambda = k_1^{-2}$ в окрестности P_1 и $\lambda = k_2^2$ в окрестности P_2. Пусть $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$—дивизор степени g, где g—род Γ.

Далее мы позволим себе пропустить элементы теории функций Бейкера–Ахиезера и ограничимся лишь необходимыми для нашего случая определениями.

Определение. *Функцией Бейкера–Ахиезера, отвечающей спектральным данным*

$$\{\Gamma, P_1, P_2, k_1^{-1}, k_2^{-1}, D\},$$

будем называть функцию $\psi(w,\bar w) : \Gamma \to \mathbb{C}$ заданную на Γ и зависящую от $w, \bar w$, такую, что:
1) ψ мероморфна на поверхности Γ всюду, кроме точек P_1, P_2, и имеет на $\Gamma\backslash\{P_1,P_2\}$ простые полюса лишь в точках $\gamma_1, .., \gamma_g$ дивизора D.
2) в окрестностях точек P_1 и P_2 функция ψ имеет существенные особенности, такие, что произведения $\psi\exp(\frac{i}{2}k_1\bar w)$ и $\psi\exp(\frac{i}{2}k_2 w)$ являются аналитическими функциями в окрестностях точек P_1 и P_2 соответственно.

Функция Бейкера–Ахиезера с такими данными существует и единственна с точностью до умножения на константу. Тем самым функция

$\widehat{\psi}_1(w,\bar{w})$, обладающая простыми полюсами в точках $\gamma_1,\ldots,\gamma_g$ и асимптотикой в точке P_1, вида:

$$\widehat{\psi}_1(w,\bar{w}) = = exp\left(-\frac{i}{2}k_1\bar{w}\right)\left(c_1(w,\bar{w})+\frac{d_1(w,\bar{w})}{k_1}+o(k_1^{-1})\right),$$

а в точке P_2 вида:

$$\widehat{\psi}_1(w,\bar{w}) = exp\left(-\frac{i}{2}k_2 w\right)\left(1+\frac{f_1(w,\bar{w})}{k_2}+o(k_2^{-1})\right),$$

существует и единственна.

Определим $\widehat{\psi}_2(w,\bar{w})$ следующим образом:

$$\widehat{\psi}_2(w,\bar{w}) = 2i\left(\psi_{1w}-\psi_1\frac{c_{1w}}{c_1}\right).$$

Асимптотика $\widehat{\psi}_2(w,\bar{w})$ в окрестности точки P_1 имеет вид:

$$\widehat{\psi}_2(w,\bar{w}) = =exp\left(-\frac{i}{2}k_1\bar{w}\right)k_1^{-1}\left(c_2(w,\bar{w})+\frac{d_2(w,\bar{w})}{k_1}+o(k_1^{-1})\right),$$

и в точке P_2 вид:

$$\widehat{\psi}_2(w,\bar{w})=exp\left(-\frac{i}{2}k_2 w\right)k_2\left(1+\frac{f_2(w,\bar{w})}{k_2}+o(k_2^{-1})\right).$$

Лемма 1. *Полагая* $u = \ln\left(-\frac{i}{2f_{1\bar{w}}}\right)$, *вектор-функция* $\begin{pmatrix}\widehat{\psi}_1\\ \widehat{\psi}_2\end{pmatrix}$ *является решением системы (8).*

Доказательство леммы почти сразу вытекает из вида существенных особенностей левых и правых частей равенств системе (8). Также легко заметить, что $c_1 = Ke^{-\frac{u}{2}}$ и $c_2 = Ke^{\frac{u}{2}}$ для некоторой константы K.

Поскольку для минимальных поверхностей e^v чисто мнимая функция, то e^u является вещественной и отрицательной функцией. Для того чтобы e^u была вещественной функцией, необходимо наложить дополнительную редукцию. Такая редукция сформулирована в следующей лемме.

Лемма 2. *Предположим, что* $\tau : \Gamma \mapsto \Gamma$ *допускает антиголоморфную инволюцию, такую, что* τ *переставляет местами точки* P_1 *и* P_2, *при этом* $\tau(k_1^{-1}) = \bar{k}_2^{-1}$ *и* $\tau(k_2^{-1}) = \bar{k}_1^{-1}$. *Предположим также, что существует мероморфная 1–форма* Ω, *обладающая нулями в точках* $\gamma_1,\ldots,\gamma_g,\tau\gamma_1,\ldots,\tau\gamma_g$ *и простыми полюсами в* P_1, P_2. *Тогда* c_1 *является вещественной функцией.*

Действительно, рассмотрим мероморфную 1–форму $\Omega_1 = \widehat{\psi}_1(P)\widehat{\psi}_2(\tau P)\Omega$. Форма Ω_1, очевидно, обладает простыми полюсами лишь в точках P_1 и P_2. Сумма вычетов Ω_1 равна:

$$Res_{P_1}\Omega_1 + Res_{P_2}\Omega_2 = c_1 Res_{P_1}\Omega + \bar{c}_1 Res_{P_2}\Omega = 0.$$

Но, поскольку $Res_{P_1}\Omega + Res_{P_2}\Omega = 0$, то $c_1 - \bar{c}_1 = 0$, т.е. c_1 вещественная функция. Тем самым лемма доказана.

Но из того факта, что $c_1 = Ke^v$ и e^v удовлетворяет (5), следует что e^v либо чисто мнимая и либо вещественная функция и, следовательно, e^u является вещественной функцией.

Примером, удовлетворяющим нашим требованиям, может послужить гиперэллиптическая кривая $\mu^2 = \nu\Pi_{i=1}^{2g}(\nu-\nu_i)$. В качестве точек P_1 и P_2 следует рассматривать нулевую $\mu = 0, \nu = 0$ и бесконечно удаленную точку соответственно. В качестве мероморфной функции λ следует рассматривать проекцию $\lambda : (\mu,\nu) \mapsto \nu$. Антиголоморфная инволюция τ будет иметь вид $\tau : \nu \mapsto \frac{1}{\bar{\nu}}$, при этом нужно потребовать, чтобы $\nu_i, i = 1\ldots 2g$ разбивались на пары таким образом, чтобы под действием τ точки ветвления переходили в точки ветвления. Для более подробного рассмотрения случая гладкой спектральной кривой Γ см. [3],[4].

В следующем разделе мы рассмотрим, пожалуй, самый простой случай, когда спектральная кривая Γ является сферой со склеенными точками. В этом случае решение (9) выражается в элементарных функциях.

6. Простейший случай, отвечающий сингулярной спектральной кривой

Пусть Γ — сфера $\mathbb{CP}^1$ с отождествленными g парами точек $a_i \sim -a_i, i = 1,..,g$. Тогда функция Бейкера–Ахиезера $\widehat{\psi}_1$ имеет вид:

$$\widehat{\psi}_1(w,\bar{w},\nu) = = e^{-\frac{i}{2}\frac{1}{\nu}\bar{w}-\frac{i}{2}\nu w}\left(1+\frac{\eta_1(w,\bar{w})}{\nu-\gamma_1}+\ldots+\frac{\eta_g(w,\bar{w})}{\nu-\gamma_g}\right),$$

где ν — параметр на сфере. Функцию λ положим равной ν^2, так, что она принимает одинаковые значения на отождествленных точках. Антиголоморфную инволюцию τ явно зададим отображением $\tau : \nu \mapsto \frac{1}{\bar{\nu}}$.

Пусть Ω — мероморфная 1–форма вида:

$$\Omega = \frac{\prod\limits_{i=1}^{g}(\nu-\gamma_i)(\nu-\frac{1}{\bar{\gamma}_i})}{\nu\prod\limits_{i=1}^{n}(\nu-a_i)(\nu+a_i)}d\nu.$$

Форма Ω имеет простые полюса в точках P_1, P_2 и $a_i, -a_i, i = 1\ldots g$, и нули в точках $\gamma_i, \tau\gamma_i, i = 1\ldots g$. Для регулярности Ω на Γ потребуем выполнения равенств

$$Res_{a_i}\Omega + Res_{-a_i}\Omega = 0, i = 1\ldots g. \qquad (10)$$

Нетрудно проверить, что равенства (10) справедливы, если и только если $a_i, i = 1\ldots g$ является корнем полинома $P(a)$ степени $2g$:

$$P(a) = (a-\gamma_1)(a-\frac{1}{\bar{\gamma}_1})\ldots(a-\gamma_g)(a-\frac{1}{\bar{\gamma}_g})+$$

$$+(a+\gamma_1)(a+\frac{1}{\bar{\gamma}_1})\dots(a+\gamma_g)(a+\frac{1}{\bar{\gamma}_g}) \qquad (11)$$

Заметим, что если $P(a)=0$, то $P(-a)=0$ и $P(\tau a)=0$. Тем самым в качестве $a_i, i=1\dots g$ следует выбрать корнями полинома $P(a)$ для некоторого набора $\gamma_i, i=1\dots g$, и тогда условие леммы 2 будет удовлетворено автоматически.

Согласно лемме 1:

$$e^u = \frac{1}{2i\sum\limits_{i=1}^{g}\eta_{i\bar{w}}+1}.$$

Коэффициенты $\eta_i(w,\bar{w})$ однозначно находятся из решения системы линейных уравнений, заданных равенствами $\widehat{\psi}_1(a_i)=\widehat{\psi}_1(-a_i), i=1\dots g$, возникающими из условия совпадения значений функций $\widehat{\psi}_1$ в точках a_i и $-a_i$, $i=1\dots g$. В качестве простой проверки знака e^u можно вычислить его значение в точке $w=0$. Это значение, как нетрудно проверить, равно $\frac{a_1^2\dots a_g^2}{\gamma_1^2\dots\gamma_g^2}$, и подставляя вместо $a_i, i=1\dots g$ корни полинома (11), получаем $\frac{2(-1)^g}{|\gamma_1|^2\dots|\gamma_g|^2}$. Таким образом, e^u отрицательно для нечетных g. Во избежание громоздкости случая $g\geqslant 3$, приведем в явном виде лишь случай $g=1$.

В простейшем случае $g=1$, полином (11) имеет вид $a^2+\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}$, и полагая $\gamma=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$, получаем, что $a=-\sin\phi+i\cos\phi$. Пусть $\tau(x,y)=\sin\phi\ x+\cos\phi\ y$, где $w=x+iy$ и тогда

$$e^u=-\frac{(\cos(\tau(x,y))+\rho\sin(\tau(x,y)))^2}{(\sin(\tau(x,y))-\rho\cos(\tau(x,y)))^2}.$$

Литература

[1] Бердинский, Д. А. *Поверхности в трехмерных группах Ли* / Д. А. Бердинский, И. А. Тайманов // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1248 – 1264.

[2] Бердинский, Д. А. *О поверхностях постоянной средней кривизны в группе Гейзенберга* / Д. А. Бердинский // Математические труды. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 1 – 7.

[3] Бобенко, А. И. *Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения* / А. И. Бобенко // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46, № 4. – С. 3 – 42.

[4] Тайманов, И. А. *Гладкие вещественные конечнозонные решения уравнений типа sin–Gordon* / И. А. Тайманов // Математические заметки. – 1990. – Т. 47, № 1. – С. 147 – 156.

УДК 515.162.8

ИНВАРИАНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАФОВ И ГРУППЫ КОКСЕТЕРА

А. Ю. Веснин

INVARIANTS OF SPATIAL GRAPHS AND COXETER GROUPS

A. Yu. Vesnin

В работе обсуждаются инварианты пространственных графов. Строится инвариант, имеющий структуру группы Коксетера. Приводятся примеры распознавания пространственных графов с помощью этого инварианта.

We discuss some invariants of spatial graphs. We construct an invariant which has a structure of a Coxeter group. We give examples to show that this invariant distinguishes some spatial graphs.

Ключевые слова: пространственный граф, инвариант, преобразования Рейдемейстера, группы Коксетера.

Keywords: spatial graph, invariant, Reidemeister moves, Coxeter groups.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00642, 10-01-91056-НЦНИ-а) и интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН.

1. Пространственные графы, диаграммы и движения Рейдемейстера

В работе обсуждаются инварианты пространственных графов, т. е. вложений графов в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$. В последние годы многие методы построения и исследования инвариантов узлов переносятся на случай пространственных графов. Мы приводим пример построения инварианта, связанного с распутывающими соотношениями и инварианта, связанного с расстановкой меток на дугах диаграммы. В обоих случаях даются примеры вычисления инвариантов для пространственных вложений тэта-графа.

Пусть $G=(V,E)$ – конечный граф с множеством вершин V и множеством ребер E, возможно, имеющий петли и кратные ребра. Пусть $\mathcal{G}=f(G)$ – его пространственное вложение (т. е. отображение $f : G\to\mathbb{R}^3$ является вложением, которое мы всегда предполагаем конечно-звенным полигональным). Граф $\mathcal{G}=f(G)$, вложенный в $\mathbb{R}^3$, будем называть пространственным графом. В частности, если G является циклом, то $\mathcal{G}$ есть узел, а если G является объединением конечного числа попарно непересекающихся циклов, то $\mathcal{G}$ есть зацепление. Очевидно, что теория пространственных графов сочетает в себе черты и методы как теории графов, так и теории узлов. Отметим, что графы, достаточно сложные в комбинаторном смысле, в топологическом смысле также устроены достаточно сложно. Проиллюстрируем это следующими результатами.

Обозначим через K_n полный граф на $n \geqslant 3$ вершинах. Конвей и Гордон в [1] и Закс в [2] доказали следующий результат о зацепленности пар циклов в пространственных вложениях полных графов.

Теорема 1. *Любое пространственное вложение полного графа K_6 содержит нетривиальное двухкомпонентное зацепление.*

Одно из пространственных вложений графа K_6 приведено на рис. 1, где также указано содержащееся в нем нетривиальное двухкомпонентное зацепление.

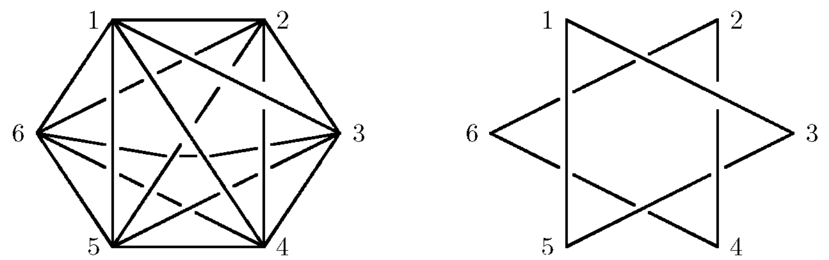


Рис. 1. Вложение графа K_6 и нетривиальное двухкомпонентное зацепление $(123) \cup (246)$

Кроме того, в [1] доказан следующий результат о заузленности циклов в пространственных вложениях полного графа.

Теорема 2. *Любое пространственное вложение полного графа K_7 содержит нетривиальный узел.*

Поскольку полный граф K_n, $n \geqslant 7$, содержит K_6 и K_7, то очевидно, что любое пространственное вложение K_n содержит как нетривиальный узел, так и нетривиальное двухкомпонентное зацепление.

Часто в приложениях теории графов возникает вопрос о нахождении цикла, проходящего через все вершины графа. Простой цикл γ в G, содержащий все вершины графа, назовем гамильтоновым, а пару непересекающихся простых циклов (α, β), объединение которых содержит все вершины графа, – гамильтоновой парой циклов.

Рассмотрим полный граф K_7, изображенный на рис. 2.

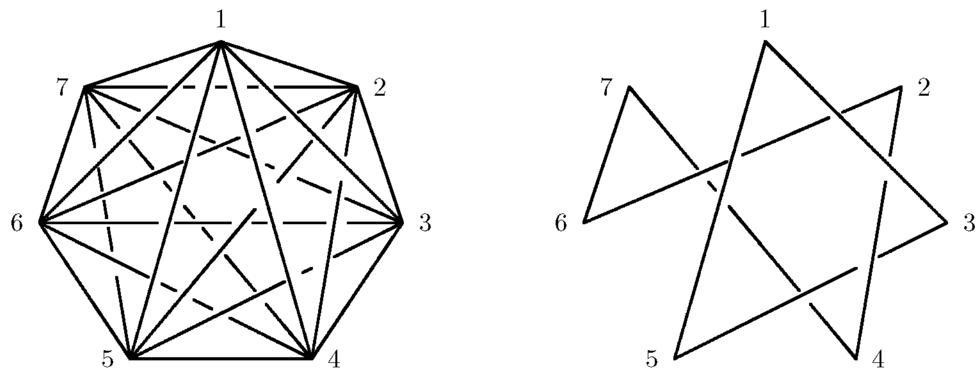


Рис. 2. Вложение графа K_7 и нетривиальное двухкомпонентное зацепление $(135) \cup (2476)$

Из приведенных выше результатов следует, что в любом пространственном вложении K_7 найдется пара циклов, образующих нетривиальное двухкомпонентное зацепление. А именно – такая пара найдется в любом подграфе K_6 графа K_7. Однако такая пара циклов не будет являться гамильтоновой парой. Вопрос о существовании в пространственных вложениях полных графов зацепленных гамильтоновых пар циклов был решен в [3].

Теорема 3. *При $n \geqslant 7$ любое пространственное вложение графа K_n содержит нетривиальное зацепление, являющееся вложением гамильтоновой пары циклов.*

Одно из пространственных вложений графа K_7 приведено на рис. 2, где также указана содержащаяся в нем гамильтонова пара циклов, реализующаяся при данном вложении как нетривиальное двухкомпонентное зацепление.

Существенное различие между теорией графов и теорией пространственных графов заключается в том, что вложения графов, достаточно простых с комбинаторной точки зрения, могут быть устроены весьма сложно. Пусть, например, Θ – мультиграф, состоящий из двух вершин, соединенных тремя ребрами, изображенный на рис. 3 слева. Такой граф будем называть тэта-графом.

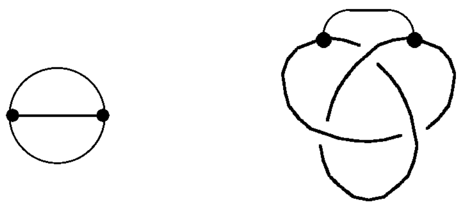


Рис. 3. Тэта-граф Θ и его нетривиальное вложение

Обозначим его ребра через e_1, e_2 и e_3. Тогда $S_1 = e_2 \cup e_3$, $S_2 = e_1 \cup e_3$ и $S_3 = e_1 \cup e_2$ – три цикла в Θ. При каждом вложении $f : \Theta \to \mathbb{R}^3$ множества $f(S_1)$, $f(S_2)$ и $f(S_3)$ являются узлами в $\mathbb{R}^3$, про которые мы будем говорить, что они ассоциированы с вложением. Например, для вложения, представленного на рис. 3 справа, одним из ассоциированных узлов является узел трилистник, а два других узла – тривиальные. Как установила Волкот, для любых трех заданных графов K_1, K_2 и K_3 найдется такое вложение f тэта-графа Θ, что данные узлы являются его ассоциированными узлами: $f(S_1) = K_1$, $f(S_2) = K_2$ и $f(S_3) = K_3$. При этом вложение f не определяется узлами K_1, K_2 и K_3 однозначно.

Центральное место в теории пространственных графов занимает следующий вопрос: для двух заданных пространственных графов определить, являются ли они эквивалентными или нет? В отличие от понятия эквивалентности узлов, понятие эквивалентности пространственных графов является более деликатным.

Напомним, что под диаграммой узла (или зацепления) понимают его регулярную проекцию на плоскость (не пересекающую узел), оснащенную в каждой двойной точке информацией о том, какая дуга узла проходит дальше (выше), а какая – ближе (ниже), относительно выбранной плоскости. Обычно эта информация указывается на диаграмме прерыванием в окрестности двойной точки проекции дуги, проходящей ниже. Типичные примеры диаграмм зацеплений приведены на рис. 1 и 2 справа. Диаграммы пространственных графов будут определены аналогично; их примеры приведены на этих же рисунках слева.

Говорят, что два узла K_1 и K_2 в $\mathbb{R}^3$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изотопия $\mathbb{R}^3$, при которой K_1 переходит в K_2. Классический результат Рейдемейстера [4] позволяет решать вопрос об эквивалентности узлов посредством изучения их диаграмм. А именно: узлы K_1 и K_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда от диаграммы D_1 первого узла можно перейти к диаграмме D_2 второго узла с помощью плоских изотопий и конечной последовательности преобразований диаграмм, называемых сейчас преобразованиями Рейдемейстера. Эти преобразования приведены на рис. 4 под номерами (I), (II) и (III).

Ситуация с понятием эквивалентности для пространственных графов несколько сложнее. Дадим два определения изотопности графов в зависимости от ситуации в окрестности каждой вершины.

Определение 1. *Пространственные графы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ гибко изотопны, если существует такая изотопия $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$, что $h_0 = id$ и $h_1(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2$.*

Если для каждой вершины v пространственного графа $\mathcal{G}$ существует шар $B_v \subset \mathbb{R}^3$ с центром в v и плоский диск P_v с центром в v, такие, что $\mathcal{G} \cap B_v \subset P_v$, то назовем $\mathcal{G}$ плосковершинным графом.

Определение 2. *Плосковершинные графы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ плоско изотопны, если существует такая изотопия $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1]$, что $h_0 = id$, $h_1(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2$ и $h_t(\mathcal{G}_t)$ – плосковершинный граф для каждого $t \in [0,1]$.*

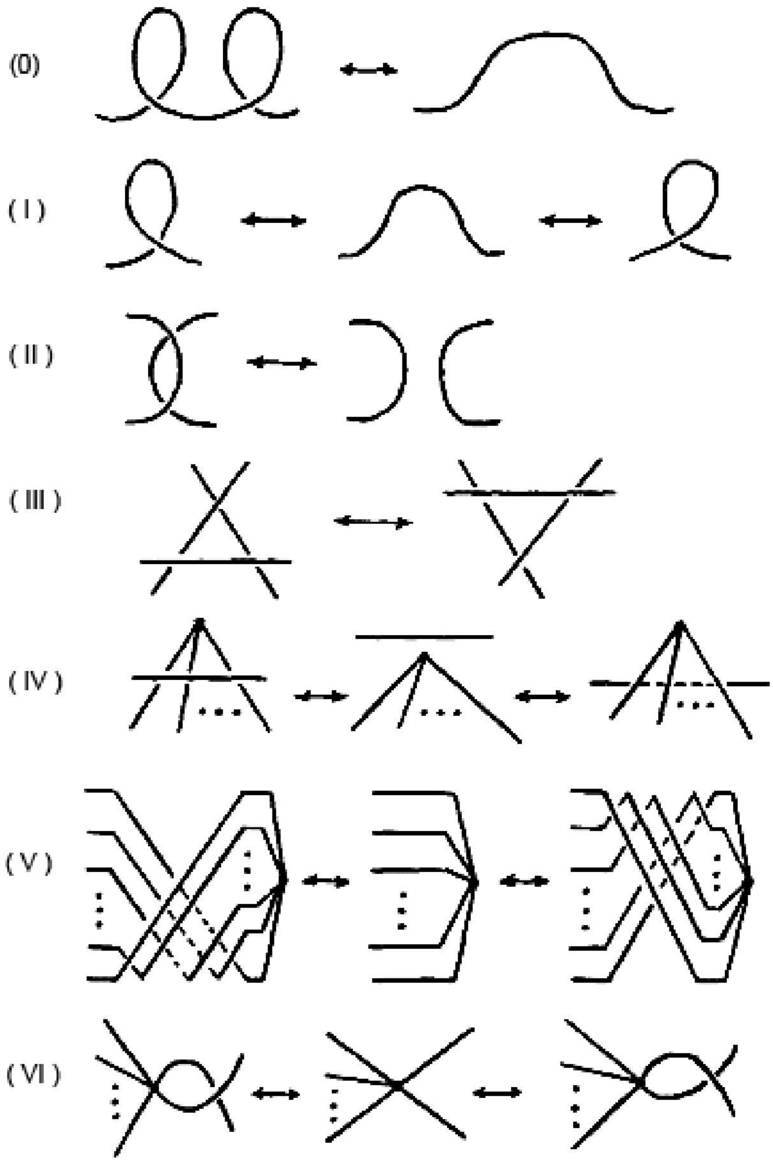


Рис. 4. Расширенные преобразования Рейдемейстера

Укажем связь между введенными понятиями изотопии пространственных графов и преобразованиями их диаграмм.

Пусть $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ – пространственный граф. Отображение $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ назовем регулярной проекцией, если образ каждой точки графа $\mathcal{G}$ имеет либо один прообраз, либо два прообраза, лежащих на двух трансверсально проходящих одно под другим ребрах $\mathcal{G}$, причем число точек в $p(\mathcal{G})$, имеющих два прообраза (называемых двойными точками) конечно. Очевидно, для пространственного графа $\mathcal{G}$ всегда можно добиться малыми шевелениями, чтобы проекция p являлась регулярной.

Диаграммой пространственного графа $\mathcal{G}$ называется образ $p(\mathcal{G})$ с информацией о том, какое ребро проходит сверху в каждой двойной точке. Аналогично случаю узлов, пространственные графы также можно перечислять и классифицировать по минимальному числу двойных точек среди всех диаграмм. Пространственные вложения тэта-графа Θ принято называть тэта-кривыми. Диаграммы тэта-кривых, для которых минимальное число двойных точек в диаграмме не превосходит 5, приведены на рис. 5.

Рассмотрим элементарные преобразования диаграмм, приведенные на рис. 4. Эти преобразования содержат преобразования Рейдемейстера диаграмм узлов и зацеплений (они указаны под номерами (I) – (III)). Множество преобразований (0) – (VI) будем называть расширенными преобразованиями Рейдемейстера.

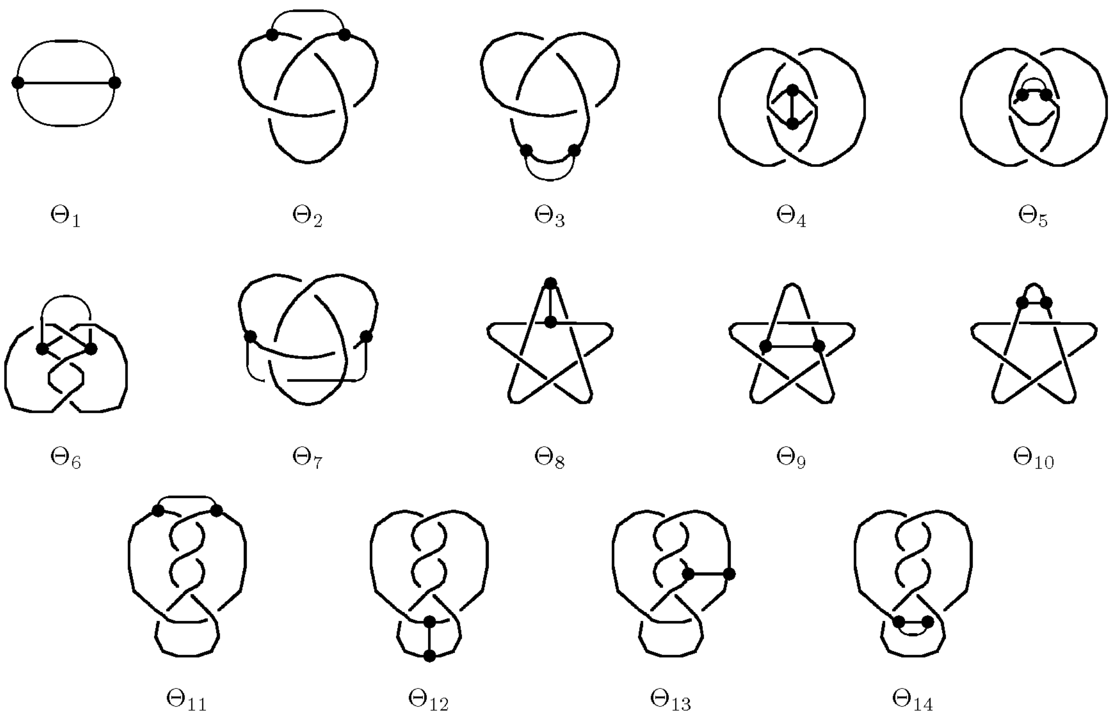


Рис. 5. Диаграммы тэта-кривых с не более, чем 5 двойными точками

Очевидно, преобразование (0) обобщается преобразованием (I); преобразование (I) является частным случаем преобразования (VI); преобразование (II) является частным случаем преобразования (IV); преобразование (V) является частным случаем комбинации преобразований (II),(III) и (VI).

Мы будем использовать следующую терминологию.

Определение 3. *(1) Преобразования (I) – (VI) называются гибкими деформациями.*
(2) Преобразования (I) – (V) называются плоскими деформациями.
(3) Преобразования (0) и (II) – (VI) называются регулярными деформациями.

Естественная связь между данными выше определениями следует из следующего результата, доказанного Кауффманом в [5].

Лемма 1. *(1) Пространственные графы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ гибко изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы связаны конечной последовательностью гибких деформаций и плоских изоторий.*
(2) Плосковершинные пространственные графы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ плоско изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы связаны конечной последовательностью плоских деформаций и плоских изотопий.

Этот результат открывает возможности изучения пространственных графов по их диаграммам, в частности, построения инвариантов, определяемых по диаграмме пространственного графа.

3. Полиномиальные инварианты пространственных графов

Направление, связанное с построением полиномиальных инвариантов, широко представлено в теории узлов. Прежде всего здесь нужно упомянуть полином Александера [6], полином Конвея [7], полином Джонса [8] и HOMFLY полином [9]. Как правило, полиномиальные инварианты строятся по диаграммам узлов или зацеплений, и доказательство инвариантности сводится к проверке инвариантности при преобразованиях Рейдемейстера.

Представляется естественным реализовать аналогичный подход и для построения полиномиальных инвариантов пространственных графов. Опираясь на расширенные преобразования Рейдемейстера, полиномиальные инварианты построили Ямада [10] и Йошинага [11]. Однако, как оказалось, эти полиномы пересчитываются один через другой [12]. Интересный подход для построения инвариантов тэта-кривых предложил Йокота [13].

В этом параграфе мы обсудим построение полиномиального инварианта из [10]. Прежде всего отметим, что инвариант пространственного графа должен являться инвариантом абстрактного (обычного) графа.

Пусть $G = (V, E)$ – граф, возможно с петлями и кратными ребрами, с множеством вершин V и множеством ребер E. Введем следующие обозначения: $p(G)$ – число вершин графа, $q(G)$ – число ребер графа, $\omega(G)$ – число компонент связности графа, $\beta(G) = q(G) - p(G) + \omega(G)$ – первое число Бетти. Определим для графа $G = (V, E)$ полином $h(G)(x, y)$ от двух переменных:

$$h(G)(x, y) = \sum_{F \subset E} (-x)^{-|F|} x^{\omega(G-F)} y^{\beta(G-F)},$$

где F пробегает все подмножества ребер из E, |F| – мощность множества F, а $G - F$ – граф с множеством вершин V и множеством ребер $E - F$. Как показано в [10], полином $h(G)$ – такой инвариант графа, который является и его топологическим инвариантом, то есть выдерживает вставку и стягивание двухвалентных вершин на его ребрах. Полиномом Ямады для абстрактного графа G назовем лорановский полином:

$$H(G)(A) = h(G)(-1, -A - 2 - A^{-1}).$$

Свойства полиномов $h(G)$ и $H(G)$ описаны в [10].

Пусть пространственный граф $\mathcal{G}$ является вложением графа $G = (V, E)$ в трехмерное пространство, а $g = g(\mathcal{G})$ – его диаграмма. Для произвольной двойной точки $z \in g$ определим три операции: A–разводка, A^{-1}–разводка и 0–разводка, как локальные изменения диаграммы g в окрестности точки z (см. рис. 6).

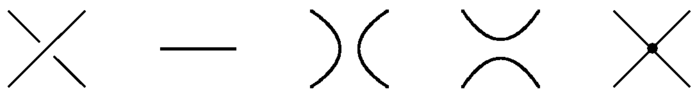


Рис. 6. Три типа разводки в двойной точке

Пусть плоский граф S получен из g применением к каждой двойной точке одной из операций разводки. Обозначим через $U(g)$ множество всех плоских графов, полученных из диаграммы g таким образом. Графу $S \in U(g)$ поставим в соответствие моном $c(g|S) = A^{m_1 - m_2}$, где m_1 и m_2 – число A–разводок и A^{-1}–разводок, соответственно примененных к g для получения S.

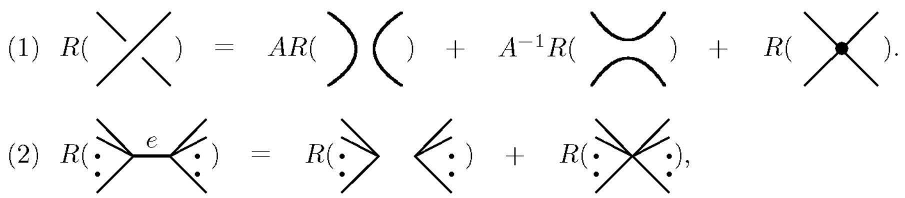
Определение 4. *Полиномом Ямады диаграммы $g = g(\mathcal{G})$ заузленного графа $\mathcal{G}$ называется лорановский полином от переменной A, задаваемый выражением:*

$$R(g)(A) = \sum_{S \in U(g)} c(g|S) H(S).$$

Для пустого графа положим $R(\emptyset) = 1$. В [10] установлен следующий результат:

Теорема 4. *Полином $R(g)(A)$ является инвариантом диаграммы g заузленного графа $\mathcal{G}$ при следующих преобразованиях g:*
(1) при регулярных деформациях;
(2) при плоских деформациях с точностью до множителя $(-A)^n$, $n \in \mathbb{Z}$;
(3) при гибких деформациях с точностью до множителя $(-A)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, для диаграмм графов с максимальной степенью меньше 4.

Из данного выше определения полинома $R(g)(A)$ следуют следующие пять свойств. Отметим, что эти свойства можно взять за определение полинома $R(g)(A)$.



где ребро e не является петлей.

(3) $R(g_1 \perp g_2) = R(g_1)R(g_2)$, где $g_1 \perp g_2$ обозначает несвязное объединение диаграмм g_1 и g_2.

(4) $R(B_n) = -(-A - 1 - A^{-1})^n$, где B_n – одновершинный граф с n петлями; в частности, при $n = 0$ имеем $R(\cdot) = -1$.

(5) $R(\emptyset) = 1$.

Полиномы Ямады для тэта-кривых, изображенных на рис. 5, вычисленные в [14], приведены ниже в таблице 1. Как видно из таблицы, все рассматриваемые тэта-кривые попарно не гибко изотопны.

Таблица 1

Граф	Полином Ямады
Θ_1	$-A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2}$
Θ_2	$A^6 - A^2 - 1 - A^{-2} - A^{-3} - A^{-4} - A^{-5} - A^{-6}$
Θ_3	$-A^7 + A^4 + 2A^3 + A^2 + A - 1 - A^{-1} - 2A^{-2} - 2A^{-3} - 2A^{-4} - A^{-5} - A^{-6}$
Θ_4	$A^7 - A^5 - A^3 - A^2 - 1 - A^{-2} - A^{-5} - A^{-8}$
Θ_5	$-A^8 + A^4 - A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2} + A^{-4} - A^{-8}$
Θ_6	$A^8 + A^7 - A^6 + A^5 + A^4 - A^3 + A$ $+2A^{-1} + A^{-2} + 2A^{-3} - A^{-5} + A^{-6} - 2A^{-7} - A^{-8} + A^{-9}$
Θ_7	$A^8 + A^7 - 2A^3 - 2A^2 - A - 2 - A^{-2} + A^{-3} + A^{-6} - A^{-7} - A^{-8}$
Θ_8	$-A^{11} - A^9 + A^7 + A^5 + A^3 + A^{-3} + A^{-4} + A^{-5} + A^{-6} + A^{-7}$
Θ_9	$-A^9 + A^8 + A^5 + A^3 + A - A^{-1} - A^{-2} - A^{-3} - 2A^{-4} - A^{-5} - A^{-6} - A^{-7} - A^{-8}$
Θ_{10}	$-A^{11} - A^9 + A^7 + A^6 + 2A^5 + A^4 + A^3$ $-A^{-2} - A^{-3} - 2A^{-4} - 2A^{-5} - 2A^{-6} - A^{-7} - A^{-8}$
Θ_{11}	$A^8 - A^6 - A^3 + A^2 + A + A^{-1} - A^{-2} - 2A^{-4} - A^{-5} - 2A^{-7} - A^{-8} - A^{-10}$
Θ_{12}	$-A^9 - A^6 + A^4 + A^2 + 2A + A^{-1} - A^{-2} + A^{-3} + 2A^{-6} + A^{-9}$
Θ_{13}	$-A^9 + A^7 + 2A^4 + A - 1 - 2A^{-2} - A^{-4} - 2A^{-5} - A^{-7} - 2A^{-8} - A^{-7} - 2A^{-8}$
Θ_{14}	$-A^9 + A^5 + A^4 + A^2 + A + A^{-1} - A^{-2} - 2A^{-4} - 2A^{-5} - A^{-6} - 2A^{-7} - A^{-8} - A^{-10}.$

4. Инвариант пространственных графов

Другое направление построения инвариантов узлов и зацеплений, также связанное с преобразованиями Рейдемейстера, – это построение инвариантного дистрибутивного группоида Матвеевым в [15] и построение инвариантного квандла Джойсом в [16]. Эти инварианты являются полными инвариантами узлов, но проблема изоморфизма для рассматриваемых объектов слишком сложна. Таким образом, на практике приходится пользоваться не столь сильными, но легче сравниваемыми инвариантами.

В этом параграфе мы опишем инвариант пространственных графов, связанный с разметкой дуг диаграммы. Рассматриваемый в этом и следующем параграфах подход был реализован в дипломной работе Кушнира [17], но так и остался неопубликованным. Доказательство инвариантности сводится к проверке инвариантности при расширенных преобразованиях Рейдемейстера и плоских изотопиях.

Здесь и далее мы будем предполагать, что каждой вершине графа инцидентны, по крайней мере, три ребра. Дугой на диграмме пространственного графа будем называть часть проекции, концами которой являются вершины графа или двойные точки, в которые дуга приходит «под», и внутренность которой не содержит других вершин графа или проходимых «под» двойных точек. Для заданного пространственного графа $\mathcal{G}$ обозначим через $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ множество всех его диаграмм. Как было отмечено выше, любые две диаграммы из $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ связаны между собой конечной последовательностью преобразований, каждое из которых является одним из преобразований Рейдемейстера (I) – (VI) или плоской изотопией.

Пусть $g_0 = g_0(\mathcal{G})$ – некоторая фиксированная диаграмма из множества $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. Каждой дуге диаграммы g_0 сопоставим метку, то есть элемент из некоторого множества M. Предположим, что на множестве M определена бинарная операция $f : M \times M \to M$. Мы потребуем, чтобы эта операция удовлетворяла приведенным ниже условиям.

Пусть P – двойная точка диаграммы g_0 и в ней встречаются дуги с метками a и c, которые подходят «под», и дуга с меткой b, которая проходит «над». В этом случае потребуем, чтобы выполнялось условие $f(a, b) = c$ (здесь равенство означает, что $f(a, b)$ и c – это один и тот же элемент множества M) и, в силу равноправности a и c в наших рассмотрениях, потребуем, чтобы $f(c, b) = a$ (см. рис. 7).

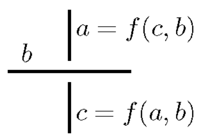


Рис. 7. Соотношения в двойной точке

Из соотношений $a = f(c, b)$ и $c = f(a, b)$ следует соотношение $f(f(a, b), b) = a$, которое мы будем рассматривать как уравнение на f. Аналогичное уравнение запишем для каждой двойной точки диаграммы g_0.

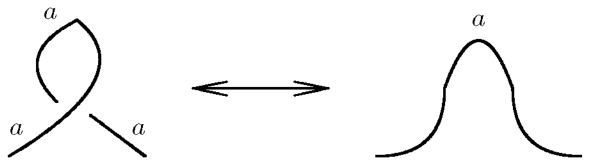
Пусть g – произвольная диаграмма из множества $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. Чтобы определить метки на дугах диаграммы g, напомним, что от диаграммы g_0 можно перейти к g при помощи конечного числа преобразований Рейдемейстера (I) – (VI) и плоских изотопий. Положим, что при плоских изотопиях метки на дугах сохраняются, т. е. при плоской изотопии дуге и ее образу соответствует один и тот же элемент из M.

Опишем правила изменения меток при расширенных преобразованиях Рейдемейстера. Начнем с преобразований Рейдемейстера (I) – (III).

Лемма 2. *Множество меток M с бинарной функцией $f : M \times M \to M$ является инвариантом при преобразованиях Рейдемейстера (I), (II) и (III), если выполнены следующие свойства:*

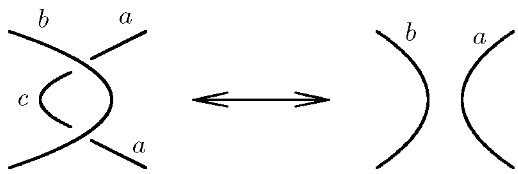
(A1) $f(a,a) = a$ *для любого* $a \in M$;
(A2) $f(f(a,b),b) = a$ *для любых* $a, b \in M$;
(A3) $f(f(c,b),a) = f(f(c,a),f(b,a))$ *для любых* $a, b, c \in M$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Рейдемейстера (I) с расставленными на дугах диаграммы метками:



Очевидно, инвариантность при преобразовании Рейдемейстера (I) будет иметь место тогда и только тогда, когда для каждого $a \in M$ выполнено свойство $f(a,a) = a$.

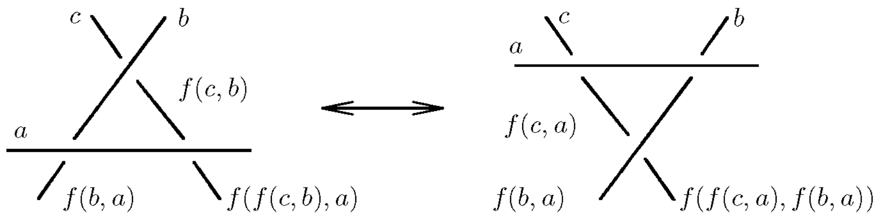
Рассмотрим преобразование Рейдемейстера (II):



Запишем соотношения в двойных точках: $c = f(a,b)$ и $a = f(c,b)$, откуда:

(A2) $f(f(a,b),b) = a$.

Рассмотрим преобразование Рейдемейстера (III):



Сопоставив соответствующие метки на дугах, которые состыкуются с дугами, лежащими вне окрестности локального преобразования (III), получаем следующее соотношение:
(A3) $f(f(c,b),a) = f(f(c,a),f(b,a))$.

Отметим, что объекты, удовлетворяющие условиям (A1) – (A3) леммы 2 были ранее построены Матвеевым [15] и Джойсом [16] и назывались инволютивным дистрибутивным группоидом или инволютивным квандлом.

Рассмотрим расширенные преобразования Рейдемейстера, в которых участвуют вершины графа. Напомним, что мы рассматриваем графы, у которых степень каждой вершины не менее трех. Наложим на M дополнительные требования, чтобы добиться инвариантности при преобразованиях Рейдемейстера (IV) – (VI).

Введем множество предикатов $\varphi_n : M^n \to \{0,1\}$, где $n \geq 3$. Если на рассматриваемой диаграмме графа есть вершина степени $n \geq 3$, в которой сходятся дуги с метками $a_1, a_2, \dots, a_n$, перечисленные по направлению часовой стрелки, то положим $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$. В силу произвольности выбора первой дуги при обходе вершины, сформулируем следующее условие.

Потребуем, чтобы выполнялось условие:
(B) $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_2, a_3, \dots, a_1) = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \varphi_n(a_n, a_1, \dots, a_{n-1}) = 1$, где $a_1, \dots, a_n$ – циклически перечисленные метки ребер инцидентных n-валентной вершине.

Посмотрим как меняются метки на дугах при расширенных преобразованиях Рейдемейстера (IV) –(VI).

Лемма 3. *Множество меток M с бинарной функцией $f : M \times M \to M$ и множеством предикатов φ_n является инвариантном при плоских изотопиях и преобразованиях Рейдемейстера (IV), (V) и (VI), если выполнены следующие свойства:*

(C1) $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varphi_n(f(a_1,b), \dots, (a_n,b)) = 1$ *для любого* $b \in M$;

(C2) $f(\dots f(f(b,a_n),a_{n-1}) \dots, a_1) = b$ *для лю-*

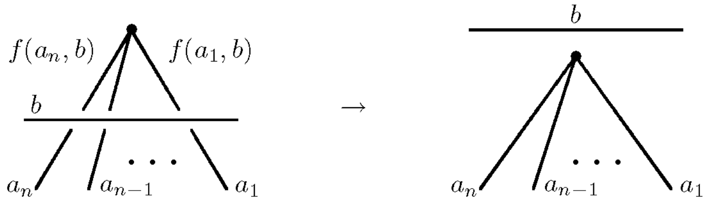
бого $b \in M$ и $a_1, \ldots, a_n$ из M таких, что $\varphi_n(a_1, \ldots, a_n) = 1$;

(C3) $\varphi_n(a_1, \ldots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(b_n, \ldots, b_1) = 1$, где $b_1 = a_1$, $b_k = f(b'_{k-1}, b_{k-1})$, $k = 2, \ldots, n$, и формула для b'_{k-1} отличается от формулы для b_k тем, что все a_{k-1} заменяются на a_k;

(C4) $\varphi_n(a_1, \ldots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(c_n, \ldots, c_1) = 1$, где $c_n = a_n$, $c_k = f(c'_{k+1}, c_{k+1})$, $k = 1, \ldots, n-1$, и формула для c'_{k+1} отличается от формулы для c_k тем, что все a_{k+1} заменяются на a_k;

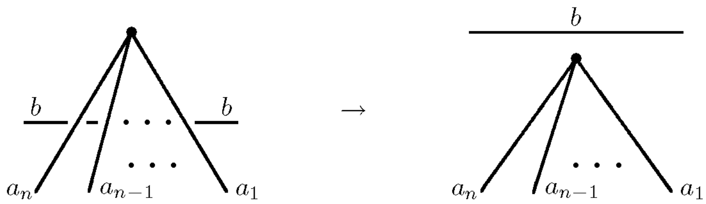
(C5) $\varphi_n(f(a_2, a_1), a_1, a_3, \ldots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_1, \ldots, a_n){=}1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_2, f(a_1, a_2), a_3, \ldots, a_n){=}1$.

Доказательство. Рассмотрим первую часть преобразования (IV):



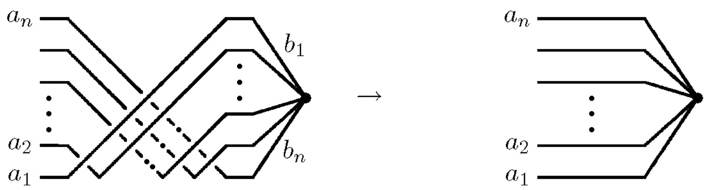
Соотношения в вершине и в двойных точках выписываются очевидным образом. Потребуем, чтобы для любого $b \in M$ выполнялось $\varphi_n(f(a_1, b), \ldots, (a_n, b)){=}1$ тогда и только тогда, когда $\varphi_n(a_1, \ldots, a_n){=}1$.

Рассмотрим вторую часть преобразования (IV):



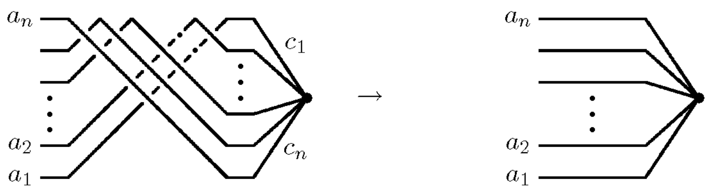
Выписав соотношения в вершине и в двойных точках, потребуем, чтобы для любого $b \in M$ выполнялось $f(\ldots f(f(b, a_n), a_{n-1}) \ldots, a_1) = b$, где $a_1, \ldots, a_n$ такие, что $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Рассмотрим первую часть преобразования (V):



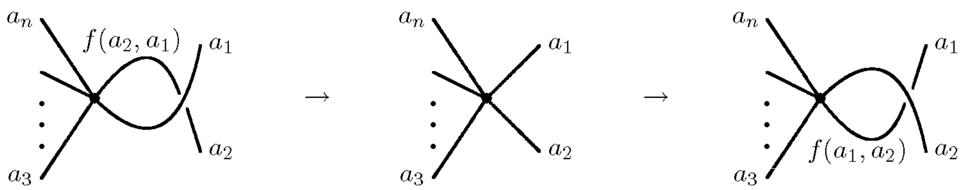
Используя соотношение в двойной точке и индукцию, можно показать, что $b_k = f(b'_{k-1}, b_{k-1})$, где $b_1 = a_1$ и формула для b'_{k-1}, $k \geq 2$, отличается от формулы для b_k тем, что вместо всех вхождений a_{k-1} стоит a_k. Действительно, ребро, которое начинается с метки a_k, на левой картинке проходит под теми же дугами, что и ребро, начинающееся с метки a_{k-1}, до последней двойной точки, из этих соображений получаем рекурентную формулу на b_k. Потребуем, чтобы выполнялось итоговое соотношение: $\varphi_n(a_1, \ldots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(b_n, \ldots, b_1) = 1$.

Рассмотрим вторую часть преобразования (V):



По аналогии с предыдущим случаем получаем $c_k = f(c'_{k+1}, c_{k+1})$, в формуле для c'_{k+1} вместо всех вхождений a_{k+1} стоит a_k и $c_n = a_n$. Потребуем, чтобы выполнялось итоговое соотношение: $\varphi_n(a_1, \ldots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(c_n, \ldots, c_1) = 1$.

Рассмотрим преобразование (VI):



Выписав соотношения в вершинах и в двойных точках диаграмм, потребуем выполнения условий: $\varphi_n(f(a_2,a_1),a_1,a_3,\ldots,a_n){=}1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_1,\ldots,a_n){=}1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_2,f(a_1,a_2),a_3,\ldots,a_n){=}1$.

Доказательство леммы завершено.

Из лемм 1, 2 и 3 вытекает следующий результат.

Теорема 5. *Пусть $g(\mathcal{G})$ – диаграмма пространственного графа $\mathcal{G}$. Пусть M – множество меток дуг диаграммы с такой бинарной функцией $f: M\times M \to M$, что если дуги с метками a,b,c сходятся в двойной точке, причем дуга с меткой b подходит «над», то $f(a,b)=c$; и множеством предикатов $\varphi_n : M^n \to \{0,1\}, n\geq 3$, где n пробегает множество валентностей вершин графа, таких, что если дуги с метками $a_1,\ldots,a_n$ сходятся в вершине степени n по ходу часовой стрелки, то $\varphi_n(a_1,\ldots,a_n)=1$. Если при этом f и φ_n таковы, что выполнены условия (A1) – (A3), (B), (C1) – (C5), то M является инвариантом графа $\mathcal{G}$ при гибких изотопиях.*

5. Инвариантная группа

Рассмотрим частный случай введенного выше инварианта. А именно, зафиксируем диаграмму $g = g(\mathcal{G})$ пространственного графа $\mathcal{G}$. Положим, что

1) множество M является группой Γ порождающие которой соответствуют меткам на дугах диаграммы g, а определяющие соотношения задаются бинарной операцией f и предикатами φ_n;

2) порождающие группы Γ являются элементами второго порядка;

3) бинарная операция $f:\Gamma\times\Gamma\to\Gamma$ записывается через групповое умножение следующим образом: $f(a,b)=ba^{-1}b$;

4) $\varphi_n(a_1,\ldots,a_n)=1$ означает, что элементы $a_1,\ldots,a_n$ попарно коммутируют и $a_1\cdots a_n=1$, где 1 – единичный элемент группы.

Лемма 4. *Группа Γ, описанная в 1)–4), корректно определена и введенные бинарная операция f и множество предикатов φ_n удовлетворяют условиям из теоремы 5.*

Доказательство. Если a элемент второго порядка, то можем записать $f(a,b)=bab$.

Если дуги с метками a,b,c сходятся в двойной точке так, что $f(a,b)=bab=c$, то c должен быть тоже второго порядка. Действительно, $c^2=babbab=baab=bb=1$.

Заметим, что если a,b коммутируют, то $f(a,b)=bab=abb=a$. Убедимся, что выполнены соотношения из теоремы 5:

(A1) $f(a,a)=aa^{-1}a=a$.

(A2) $f(f(a,b),b)=f(ba^{-1}b,b)=bb^{-1}ab^{-1}b=a$.

(A3) поскольку

$$f(f(c,b),a)=f(bc^{-1}b,a)=ab^{-1}cb^{-1}a$$

и

$$f(f(c,a),f(b,a))=f(ac^{-1}a,ab^{-1}a)= \\ =(ab^{-1}a)(ac^{-1}a)^{-1}(ab^{-1}a)=ab^{-1}cb^{-1}a.$$

(B) $a_1\cdots a_{n-1}a_n=1\Leftrightarrow a_2\cdots a_na_1=1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow a_n,\cdots,a_{n-2},a_{n-1}=1$ выполнено в силу попарной коммутативности элементов a_1, …, a_{n-1} и a_n.

(C1) по определению, $\varphi_n(f(a_1,b),\ldots,f(a_n,b)){=}1$ означает, что

$$1=f(a_1,b)\cdots f(a_n,b)= \\ =(ba_1^{-1}b)\cdots(ba_n^{-1}b)=b(a_1\cdots a_n)b^{-1},$$

где мы воспользовались тем, что порождающие $b,a_1,\ldots,a_n$ являются элементами второго порядка. Таким образом, $\varphi_n(f(a_1,b),\ldots,(a_n,b))=1$ тогда и только тогда, когда $\varphi_n(a_1,\ldots,a_n)=1$.

(C2) поскольку $b,a_1,\ldots,a_n$ являются элементами второго порядка, имеем:

$$f(\ldots f(f(b,a_n),a_{n-1})\ldots,a_1)= \\ =a_1\cdots a_nba_n\cdots a_1=a_1\cdots a_nba_n^{-1}\cdots a_1^{-1}= \\ =(a_1\cdots a_n)b(a_1\cdots a_n)^{-1}=b,$$

так как $\varphi_n(a_1,\ldots,a_n)=1$.

(C3) Покажем, что $b_k=a_k$, $k=1,\ldots,n$, индукцией по k. По условию, $b_1=a_1$. Тогда $b'_1=a_2$. По индукционному предположению, $b_{k-1}=a_{k-1}$ и $b'_{k-1}=a_k$. Тогда $b_k=f(b'_{k-1},b_{k-1})=b_{k-1}b'_{k-1}b_{k-1}=a_{k-1}a_ka_{k-1}=a_k$. Таким образом, $b_nb_{n-1}\cdots b_2b_1=a_na_{n-1}\cdots a_2a_1=a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ в силу попарной коммутативности элементов $a_1,\ldots,a_n$.

(C4) Доказывается аналогично (C3), замечая, что $c_k=a_k$, $k=1,\ldots,n$ и $c_n\cdots c_1=a_n\cdots a_1$.

(C5) Заметим, что

$$f(a_2,a_1)a_1a_3\cdots a_n= \\ =a_1a_2a_1a_1a_3\cdots a_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$$

и

$$a_2f(a_1,a_2)a_3\cdots a_n= \\ =a_2a_2a_1a_2a_3\cdots a_n=a_1a_2a_3\cdots a_n.$$

Чтобы убедиться в корректности определения φ_n, покажем, что попарная коммутативность элементов $a_1, \ldots, a_n$ влечет, что $a_1 \cdots a_n = 1 \Leftrightarrow a_{i_1} \cdots a_{i_n} = 1$ для любой перестановки $i_1, \ldots, i_n$ на элементах $1, \ldots, n$. В самом деле, симметрическая группа порождается инверсиями $(i, i+1)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Такие инверсии соответствуют коммутативности a_i и a_{i+1}. □

Как следствие теоремы 5 и леммы 4 получаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{G}$ – пространственный граф, а g – его диаграмма. Пусть порождающими группы Γ являются метки на дугах диаграммы. Положим, что порождающие являются элементами второго порядка и в каждой двойной точке диаграммы удовлетворяют соотношению $bab = c$, где b – это метка дуги проходящей «над»; кроме того, имеют место соотношения $a_1 \ldots a_n = 1$ и элементы $a_1, \ldots, a_n$ попарно коммутируют, если дуги с метками $a_1, \ldots, a_n$ инцидентны одной вершине. Тогда группа Γ является инвариантом пространственного графа $\mathcal{G}$ при гибких изотопиях.*

Далее группу Γ будем называть инвариантной группой пространственного графа $\mathcal{G}$.

6. Примеры вычисления инвариантной группы

В качестве иллюстрации полученных результатов вычислим инвариантные группы для некоторых тэта-кривых. Напомним, что диаграммы тэта-кривых с малым числом двойных точек были приведены на рис. 5.

Рассмотрим тэта-кривую Θ_1, которая представляет собой тривиальное вложение тэта-графа Θ. Пусть метки на дугах диаграммы расставлены как на рисунке 8.

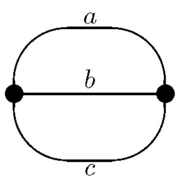


Рис. 8. Тэта-кривая Θ_1

Тогда инвариантная группа Γ_1 графа Θ_1 порождена тремя элементами второго порядка: a, b, c. Диаграмма не имеет двойных точек. Граф имеет две вершины и в каждой из них соотношение имеет вид $abc = 1$. Условия коммутирования порождающих имеют вид $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$. Получаем следующее представление:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \langle a, b, c \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1, abc = 1, \\ &\qquad ab = ba, ac = ca, bc = cb\rangle. \\ &\cong \langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = 1, ab = ba\rangle. \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

Рассмотрим тэта-кривую Θ_2 с метками на дугах как указано на рис. 9.

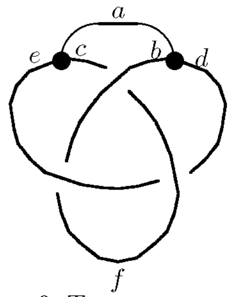


Рис. 9. Тэта-кривая Θ_2

Инвариантная группа Γ_2 тэта-кривой Θ_2 порождается элементами второго порядка a, b, c, d, e и f. Диаграмма имеет три двойных точки, которым соответствуют соотношения $bcb = f$, $ebe = f$ и $fef = d$. Граф имеет две вершины: одной из них соответствуют соотношения $ace = 1$, $ac = ca$, $ce = ec$ и $ae = ea$, а другой – соотношения $bad = 1$, $ba = ab$, $ad = da$ и $bd = db$. Таким образом, группа Γ_2 имеет следующее представление:

$$\begin{aligned}\Gamma_2 = \langle a, b, c, d, e, f :\ & \\ & a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1, \\ & bcb = f, ebe = f, fef = d, ace = 1, \\ & ac = ca, ce = ec, ae = ea, bad = 1, \\ & \qquad ba = ab, ad = da, bd = db\rangle.\end{aligned}$$

Выражая часть порождающих через остальные, а именно: $e = ac$, $d = ab$, $f = bcb$, получим представление:

$$\begin{aligned}\Gamma_2 = \{a, b, c \,|\, & a^2 = b^2 = c^2 = 1, \\ & ab = ba, ac = ca, (bc)^3 = 1\}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что группа Γ_2 изоморфна группе, порожденной отражениями в сторонах сферического треугольника с углами $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/3$.

Рассмотрим тэта-кривую Θ_4, приведенную на рис. 10.

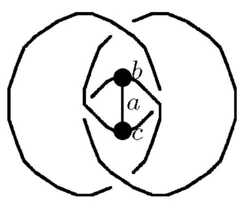


Рис. 10. Тэта-кривая Θ_4

Порождающие инвариантной группы Γ_4 пространственного графа Θ_4 соответствуют меткам на дугах диаграммы. Нетрудно заметить, что все метки могут быть выражены через метки a, b, c, указанные на рисунке. Представление группы Γ_4 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_4 = \{a, b, c \,|\, & a^2 = b^2 = c^2 = 1, \\ & ab = ba, ac = ca, (bc)^5 = 1\}.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что группа Γ_4 изоморфна группе, порожденной отражениями в сторонах сферического треугольника с углами $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/5$.

Из рассмотренных примеров видно, что группы Γ_1, Γ_2 и Γ_4 попарно не изоморфны, а значит, и пространственные графы Θ_1, Θ_2, Θ_4 попарно не гибко изотопны.

Литература

[1] Conway, J. H. *Knots and links in spatial graphs* / J. H. Conway, C. McA. Gordon // J. Graph Theory. – 2003. – Vol. 7. – P. 445 – 453.

[2] Sachs, H. *On spatial representations of finite graphs* /H. Sachs, A. Hajnal, L. Lovasz, V.T. Sos (Eds.) // Colloquia Mathematica Soc. Janos Bolyai, Vol. 37. – North-Holland, Amsterdam, 1984 – P. 649 – 662.

[3] Веснин, А.Ю. *О зацепленности гамильтоновых пар циклов в пространственных графах* / А. Ю. Веснин, А. В. Литвинцева // Сибирские электронные математические известия. – 2010. - Т. 7. – С. 383 – 393.

[4] Reidemeister, K. *Knot Theory* / K. Reidemeister // Chelsea Publ. Co. – N. Y., 1948.

[5] Kauffman, L. H. *Invariants of graphs in three-space* / L. H. Kauffman // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – Vol. 311. – P. 697 – 710.

[6] Alexander, J. W. *Topological invariants of knots and links* / J. W. Alexander // Trans. Amer. Math. Soc. – 1923. – Vol. 20. – P. 275 – 306.

[7] Conway, J. H. *On enumeration of knots and links and some of their algebraic properties* / J. H. Conway // Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press. – New York. 1970. – P. 329 – 358.

[8] Jones, V. F. R. *A polynomial invariant for links via von Newmann algebras* / V. F. R. Jones // Bull. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 129. – P. 103 – 112.

[9] Freyd, P. *A new polynomial invariant of knots and links* / P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu // Bull. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 12. – P. 239 – 246.

[10] Yamada, S. *An invariant of spatial graphs* / S. Yamada // J. Graph Theory. – 1989. – Vol. 13. – P. 537 – 551.

[11] Yoshinaga S. *An invariant of spatial graphs associated with $U_q(sl(2,C))$* / S. Yoshinaga // Kobe J. Math. – 1991. – Vol. 8. – P. 25 – 40.

[12] Dobrynin, A. A. *On the Yoshinaga polinomial of spatial graphs* / A. A. Dobrynin, A. Yu. Vesnin // Kobe J. Math. – 2003. – Vol. 20. – P. 31 – 37.

[13] Yokota, Y. *Polynomial invariants of θ_m-curves in 3-space* / Y. Yokota // a lecture given at 7th Japan-Korea School of Knots and Links, Kobe.– 1999.

[14] Веснин, А. Ю. *Полином Ямады для графов, заузленно вложенных в трехмерное пространство* / А. Ю. Веснин, А. А. Добрынин // Выч. системы. Теория графов и ее применения. – 1996. – Т. 155. – С. 37 – 86.

[15] Матвеев, С. В. *Дистрибутивные группоиды в теории узлов* / С. В. Матвеев // Матем. сборник. – 1982. – Т. 119. N. 1. – С. 78 – 88.

[16] Joyce, D. *A classifying invariant of knots: the knot quandle* / D. Joyce // Jour. Pure Appl. Alg. – 1982. – Vol. 23. – P. 37 – 65.

[17] Кушнир, Д. Ю. *Инварианты пространственных заузленных графов* / Д. Ю. Кушнир // Выпускная квалификационная работа бакалавра. – Новосибирск: НГУ, 2008. – 18 с.

УДК 519.177, 512.541

О СТРУКТУРЕ ГРУППЫ ПИКАРА ДЛЯ ЛЕСТНИЦЫ МЕБИУСА И ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ГРАФА

М. А. Зиндинова, И. А. Медных

ON THE STRUCTURE OF PICARD GROUP FOR MOEBIUS LADDER GRAPH AND PRISM GRAPH

M. A. Zindinova, I. A. Mednykh

Понятие группы Пикара для графа, которую также называют якобианом или критической группой, было независимо введено многими авторами. Она является важным алгебраическим инвариантом конечного графа. В частности, ее порядок совпадает с числом порождающих деревьев. Последнее число хорошо известно для некоторых простейших семейств графов, таких как колесо, веер, призма, лестница и лестница Мебиуса. В то же время структура группы Пикара известна только в некоторых случаях. Цель данной статьи – определить структуру группы Пикара для двух характерных случаев: лестницы Мебиуса и призматического графа.

The notion of the Picard group of graph (also known as Jacobian group, sandpile group, critical group) was independently given by many authors. This is a very important algebraic invariant of a finite graph. In particular, the order of the Picard group coincides with the number of spanning trees for a graph. The latter number is known for the simplest families of graphs such as Wheel, Fan, Prism, Ladder and Moebius ladder graphs. At the same time the structure of the Picard group is known only in several cases. The aim of this paper is to determine the structure of the Picard group of the Moebius ladder and Prism graphs.

Ключевые слова: граф, группа Пикара, абелева группа, полиномы Чебышева.

Keywords: Graph, Picard group, Abelian group, Chebyshev polynomial.

Работа поддержана грантами РФФИ (09–01–00255, 10-01-00642), грантом АВЦП развития научного потенциала высшей школы (2.1.1/3707) и Федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(02.740.11.0457).

1. Введение

Представим лестницу Мебиуса M_n порядка n как циклический граф $C_{2n}(1, n)$. В этом случае M_n может быть рассмотрена как правильный $2n-$угольник, у которого n пар противоположных вершин соединены ребром (см. рис. 1). Можно также представить M_n как лестницу с n ступеньками на листе Мебиуса. Призма $Pr(n)$ представляет собой граф с $2n$ вершинами, соединенных так, как показано на рис. 2.

Цель данной статьи – найти структуру группы Пикара для лестницы Мебиуса M_n и призматического графа $Pr(n)$.

Понятие группы Пикара для графа (которую также называют якобианом или критической группой) было независимо введено многими авторами ([1], [2], [3], [4]). Она является важным алгебраическим инвариантом конечного графа. В частности, ее порядок совпадает с числом порождающих деревьев графа. Последнее число хорошо известно для некоторых простейших семейств графов, таких, как колесо, веер, призма, лестница и лестница Мебиуса [5]. В то же время структура группы Пикара известна только в некоторых случаях (см. список литературы в [6]).

Следуя Бейкеру и Норину [2], определим группу Пикара (или якобиан) для графа следующим образом.

Рассмотрим конечный, связный граф G, допускающий кратные ребра, но не допускающий петли. Пусть $V(G)$ и $E(G)$ – это множества вершин и ребер G соответственно. Обозначим через $Div(G)$ свободную абелеву группу на $V(G)$. Элементы $Div(G)$ являются целочисленными линейными комбинациями элементов $V(G)$, то есть для любого $D \in Div(G)$ существует единственное представление $D = \sum_{x \in V(G)} D(x)(x)$, $D(x) \in \mathbb{Z}$. По аналогии с теорией римановых поверхностей элементы $Div(G)$ будем называть *дивизорами* на графе G. Определим степень элемента D следующей формулой: $deg(D) = \sum_{x \in V(G)} D(x)$. Обозначим через $Div^0(G)$ подгруппу группы $Div(G)$, состоящую из дивизоров нулевой степени.

Пусть f – $\mathbb{Z}$-значная функция на $V(G)$. Определим дивизор f по следующей формуле:

$$div(f) = \sum_{x \in V(G)} \sum_{xy \in E(G)} (f(x) - f(y))(x).$$

Дивизор $div(f)$ естественным образом может быть отождествлен с оператором Лапласа функции f на графе G. Дивизоры вида $div(f)$, где f как описано выше, называются *главными дивизорами*. Обозначим через $Prin(G)$ группу главных дивизоров на G. Нетрудно заметить, что каждый главный дивизор имеет степень 0, поэтому группа $Prin(G)$ является подгруппой группы $Div^0(G)$.

Определим группу $Jac(G)$, называемую *группой Пикара* (или *якобианом*) графа G, как фактор-группу

$$Jac(G) = Div^0(G)/Prin(G).$$

Группа $Jac(G)$ является конечной абелевой группой порядка t_G, где t_G – число порождающих деревьев графа G. (Это напрямую следует из теоремы Кирхгоффа, приведенной, например, в §14 в [7]). Более того, любая конечная абелева группа является группой Пикара некоторого графа.

Для фиксированной точки $x_0 \in V(G)$ определим отображение Абеля - Якоби $S_{x_0} : G \to Jac(G)$ следующей формулой: $S_{x_0}(x) = [(x) - (x_0)]$, где $[d]$ – это класс эквивалентности дивизора d.

Зададим на каждом ребре графа G одну из двух возможных ориентаций. Так как G не имеет петель, такая операция определена корректно. Пусть $\vec{E} = \vec{E}(G)$ – множество ориентированных ребер графа G. Для $e \in \vec{E}$ обозначим начальную вершину $o(e)$ и конечную вершину $t(e)$ соответственно. Определим поток e по формуле $\omega(e) = [t(e) - o(e)]$. Заметим, что

$$\omega(e) = [(t(e) - x_0) - (o(e) - x_0)] =$$
$$= [[t(e) - x_0] - [o(e) - x_0]] = S_{x_0}(t(e)) - S_{x_0}(o(e))$$

не зависит от выбора исходной точки x_0. В силу Леммы 1.8 в [2] (см. также [4]) группа Пикара $Jac(G)$ является абелевой группой, порожденной потоками $\omega(e), e \in \vec{E}$, подчиняющимся следующим двум законам Кирхгоффа:

(I) Поток через каждую вершину графа G равен нулю. Это означает, что

$$\sum_{e\in\vec{E},\, t(e)=x} \omega(e) = 0 \text{ для всех } x \in V(G).$$

(II) Поток вдоль каждого замкнутого ориентируемого пути W в G равен нулю, то есть

$$\sum_{e\in W} \omega(e) = 0.$$

Напомним, что замкнутый ориентированный путь в G – это последовательность ориентированных ребер $e_i \in \vec{E}(G)$, $i = 1, \ldots, n$, таких, что $t(e_i) = o(e_{i+1})$ для $i = 1, \ldots, n-1$ и $t(e_n) = o(e_1)$.

2. Предварительные сведения

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $GCD(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ наибольший общий делитель $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$. Мы будем использовать следующие очевидные свойства наибольшего общего делителя.

(i) $(a, a+b) = (a, b) = (a, a-b)$;

(ii) $(a, b, c) = (a, (b, c))$;

(iii) $(k\,a, k\,b) = k(a, b)$.

Введем полиномы Чебышева первого и второго рода:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),$$
$$U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos(x))/\sin(\arccos(x)).$$

Приведем следующие основные свойства этих полиномов.

1° $T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$, $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$,

2° $U_n(x)=2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$, $U_0(x)=1$, $U_1(x)=2x$.

В данной статье мы преимущественно будем интересоваться значениями полиномов Чебышева в точке $x = 2$. В этом случае

$$T_n(2) = ((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)/2 \quad \text{и}$$

$$U_{n-1}(2) = ((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)/(2\sqrt{3}).$$

Будем использовать следующую теорему о строении конечной абелевой группы.

Теорема А. *Пусть $\mathcal{A}$ – конечная абелева группа, порожденная элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и удовлетворяющая системе уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

где $A = \{a_{ij}\}$ – целочисленная $m \times n$ матрица. Пусть D_j, $j = 1, \ldots, r = \min(n, m)$ – это наибольшие общие делители всех $j \times j$ миноров матрицы A. Тогда

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}_{D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_2/D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_3/D_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{D_r/D_{r-1}}.$$

Последнее разложение известно также как нормальная форма Смита. Детальное доказательство этой теоремы можно найти в ([8], гл. 3.22).

3. Основной результат

3.1. Вычисление группы Пикара для лестницы Мебиуса

Рассмотрим лестницу Мебиуса M_n как граф, показанный на рис. 1, с пронумерованными вершинами $1, 2, \ldots, 2n$. Обозначим через d_i, $i = 1, \ldots, n$ поток вдоль ориентированного ребра $(i,\, i+n)$ с начальной вершиной i и конечной вершиной $i+n$. Также обозначим через x_i и X_i, $i = 1, \ldots, n$ потоки вдоль ориентированных ребер $(i-1,\, i)$ и $(n+i-1,\, n+i)$ соответственно. Для простоты отождествим вершины 0 и $2n$.

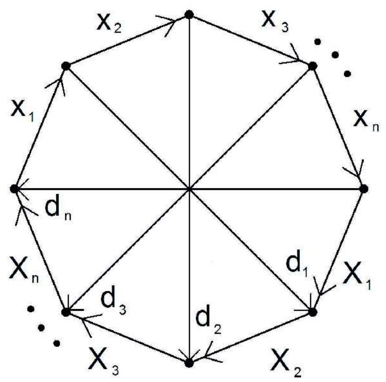


Рис. 1. Лестница Мёбиуса

Из первого закона Кирхгоффа имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} d_i{=}x_i{-}x_{i+1},\ i=1,\dots,n-1,\ d_n{=}x_n{-}X_1, \\ d_i=X_{i+1}{-}X_i,\ i=1,\dots,n-1,\ d_n{=}x_1{-}X_n. \end{cases} \tag{1}$$

Используя второй закон Кирхгоффа для замкнутых путей $W_i=(i,n+i,n+i+1,i+1)$, мы имеет следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{i+1}{+}d_{i+1}{-}X_{i+1}{-}d_i{=}0,\ i=1,\dots,n-1 \\ X_1-d_1-x_1-d_n=0. \end{cases} \tag{2}$$

Выразим d_i для $i=1,\dots,n-1$ из уравнений $d_i=x_i{-}x_{i+1}$, $i=1,\dots,n{-}1$. Подставим их в уравнения $x_{i+1}+d_{i+1}{-}X_{i+1}{-}d_i=\ 0$, $i=\ 1,\dots,n-2$. При этом мы получим представления для X_i, $i\ =\ 2,\dots,n-1$ через x_i, $i\ =\ 1,\dots,n$. Теперь, используя полученные выражения X_i, $i=\ 2,\dots,n-1$, а также уравнения $d_{n-1}=X_n-X_{n-1}=x_{n-1}-x_n$ и $d_1=X_2-X_1=x_1-x_2$, получим аналогичные представления для X_n и X_1 соответственно.

Имеем следующие соотношения между X_i и x_i.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Подставляя эти тождества в уравнения вида $x_i-x_{i+1}=X_{i+1}-X_i$, $i=2,\dots,n-2$, получим $n-3$ соотношения на $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$. Запишем их в первые $n-3$ строчки матрицы (4).

Используя уравнение $x_n+d_n-X_n-d_{n-1}=0$ и вспоминая, что $d_n=x_1-X_n$, $d_{n-1}=x_{n-1}-x_n$, получим следующее: $x_1+2x_{n-2}-9x_{n-1}+6x_n=0$.

Теперь, используя $X_1-d_1-x_1-d_n=0$ и замечая, что $d_1=x_1-x_2$, $d_n=x_n-X_1$, имеем $6x_1-9x_2+2x_3+x_n=0$.

Рассмотрим второй закон Кирхгоффа для контура $(0,1,2,\dots,n)$, он запишется следующим образом: $x_1+x_2+\ldots+x_n+d_n=0$. Откуда извлекаем еще одно выражения для d_n. Подставляем его в уравнение $x_n+d_n-X_n-d_n-1=0$. В результате получим еще одно соотношение на $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$. Оно записано в последней строчке матрицы (4).

Таким образом, получаем, что группа Пикара $Jac(M_n)$ порождена элементами $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -5 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -9 & 6 \\ 6 & -9 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

Теперь сократим число порождающих группы $Jac(M_n)$ с n до 3. А именно – покажем, что группа $Jac(M_n)$ порождена элементами $x_1,\ x_2,\ x_3$, удовлетворяющими трем линейным уравнениям.

Для этого, заметим, что порождающие $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ удовлетворяют следующему рекурсивному соотношению:

$$x_j-5x_{j+1}+5x_{j+2}-x_{j+3}=0,\ j=1,2,\dots,n-3.$$

Характеристический многочлен этого уравнения равен $1 - 5q + 5q^2 - q^3 = 0$.

Числа $q_1 = 1$, $q_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$ являются корнями этого многочлена. Отсюда общее решение рекурсии задается формулой $x_j = C_1 + C_2 q^j + C_3 q^{-j}$, где $q = 2 + \sqrt{3}$ и C_1, C_2, C_3 – константы, зависящие только от начальных значений x_1, x_2, x_3. В результате мы получаем $x_4, x_5, \ldots, x_n$ как линейную комбинацию x_1, x_2 и x_3, коэффициенты которой могут быть явно найдены.

Подставляя полученные соотношения в последние три строки системы (4), имеем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что $T_n(2)=(q^n+q^{-n})/2$ и $U_{n-1}(2)=(q^n-q^{-n})/(2\sqrt{3})$. Вычисляя напрямую, получаем следующие явные формулы для a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$.

$a_{11}=\frac{3}{2}T-\frac{5}{2}U$, $a_{12}=-2T+3U$, $a_{13}=\frac{1}{2}T-\frac{1}{2}U$,

$a_{21}=\frac{11}{2}T-\frac{19}{2}U$, $a_{22}=-7T+12U$, $a_{23}=\frac{3}{2}T-\frac{5}{2}U$,

$a_{31}=2T-\frac{7}{2}U-\frac{n}{2}$, $a_{32}=-\frac{5}{2}T+\frac{9}{2}U+2n$,

$a_{33}=\frac{1}{2}T-U-\frac{n}{2}$,

где $T = 1 + T_n(2)$ и $U = U_{n-1}(2)$.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть D_1- наибольший общий делитель a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда*

$$D_1 = GCD(n, T, U)/GCD(2, n).$$

Доказательство леммы 1. Имеем:

$$\begin{aligned} D_1 &= GCD(a_{ij}) = GCD(a_{11},\, a_{12},\, a_{13},\, a_{21},\, a_{22} - 4a_{12}, a_{23} - 3a_{13},\, a_{31},\, a_{32},\, a_{33}) = \\ &= GCD(a_{11},\, a_{12},\, a_{13},\, a_{21},\, T,\, -U,\, a_{31},\, a_{32},\, a_{33}) = \\ &= GCD(T, U, \frac{1}{2}(T-U),\, -\frac{1}{2}(U+n),\, \frac{1}{2}(-T+U)+2n,\, \frac{1}{2}(T-n)) = \\ &= GCD(T, U, \frac{1}{2}(T-U),\, \frac{1}{2}(T-n) - \frac{1}{2}(U+n) + \frac{1}{2}(-T+U), \frac{1}{2}(-T+U)+2n,\, \frac{1}{2}(T-n)) = \\ &= GCD(T, U, -n,\, \frac{1}{2}(T-U),\, \frac{1}{2}(-T+U)+2n,\, \frac{1}{2}(T-n)) = GCD(T, U, n,\, \frac{1}{2}(T-U),\, \frac{1}{2}(T-n)). \end{aligned}$$

Из основных рекурсивных соотношений для полиномов Чебышева 1° и 2°, имеем следующие свойства. Числа $T = 1 + T_n(2)$ и $U = U_{n-1}(2)$ той же четности, что и n. Более того, если n четно, то $\frac{T-n}{2}$ нечетно.

Рассмотрим два случая: n нечетно и n четно. В первом случае мы имеем:

$$\begin{aligned} D_1 &= GCD(T, U, n,\, \tfrac{1}{2}(T-U),\, \tfrac{1}{2}(T-n)) = \\ &= GCD(T, U, n,\, T-U,\, T-n) = \\ &= GCD(T, U, n) = GCD(n, T, U)/GCD(2, n). \end{aligned}$$

Во втором случае:

$$D_1 = GCD(T, U, n,\, \frac{1}{2}(T-U),\, \frac{1}{2}(T-n)).$$

Так как $\dfrac{T-n}{2}$ нечетно, получим:

$$\begin{aligned} D_1 &= GCD(\tfrac{1}{2}T, \tfrac{1}{2}U, \tfrac{1}{2}n,\, \tfrac{1}{2}(T-U),\, \tfrac{1}{2}(T-n)) = \\ &= GCD(\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}T, \tfrac{1}{2}U) = GCD(n, T, U)/2 = \\ &= GCD(n, T, U)/GCD(2, n). \end{aligned}$$

Теперь наша цель – найти наибольший общий делитель всех миноров порядка 2 матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Обозначим через m_{ij} минор порядка 2, полученный удалением i–ой строки и j–ого столбца матрицы A. В результате вычислений имеем:

$$m_{11} = -m_{22} = \frac{1}{2}((n+1)T) - nU,$$

$$m_{12} = -m_{23} = (-\frac{1}{2} - 2n)T + \frac{7n}{2}U,$$

$$m_{13} = \frac{1}{2}(1+15n)T - 13nU, \quad m_{21} = \frac{1}{2}T - \frac{n}{2}U,$$

$$m_{31} = -m_{32} = m_{33} = T.$$

Докажем также следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть D_2 – наибольший общий делитель миноров m_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда*

$$D_2 = GCD(T, nU)/GCD(2, n).$$

Доказательство леммы 2. Из явного вида формул для m_{ij} имеем:

$$\begin{aligned} D_2 &= GCD(m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, m_{33}) = GCD(m_{11}, m_{12} + m_{21}, m_{13}, m_{21}, m_{33}) = \\ &= GCD(m_{11}, m_{12} + m_{21} + 2nm_{33}, m_{13} - 7nm_{33} + m_{11} - (n+1)m_{33}, m_{21}, m_{33}) = \end{aligned}$$

$$= GCD(\tfrac{1}{2}((n+1)T) - nU, 3nU, -14nU, \tfrac{1}{2}T - \tfrac{n}{2}U, T) = GCD(\tfrac{1}{2}((n+1)T) - nU, nU, \tfrac{1}{2}T - \tfrac{n}{2}U, T).$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2m$ четно.

$$D_2 = GCD(\tfrac{1}{2}((2m+1)T) - 2mU,\ 2mU,\ \tfrac{1}{2}T - \tfrac{2m}{2}U,\ T) =$$
$$= GCD(\tfrac{1}{2}T,\ 2mU,\ \tfrac{1}{2}T - mU,\ T) = GCD(\tfrac{1}{2}T,\ 2mU,\ -mU) =$$
$$= GCD(\tfrac{1}{2}T,\ mU) = GCD(\tfrac{1}{2}T,\ \tfrac{2m}{2}U) = GCD(T,\ nU)/2 = GCD(T,\ nU)/GCD(2,n).$$

С другой стороны, когда $n = 2m+1$ нечетно, оба T и U нечетны. Получим:

$$D_2 = GCD((m+1)T - (2m+1)U,$$
$$(2m+1)U,\ \frac{1}{2}T - \frac{2m+1}{2}U,\ T) =$$
$$= GCD((2m+1)U,\ \frac{1}{2}T - \frac{2m+1}{2}U,\ T) =$$
$$= GCD((2m+1)U,\ T - (2m+1)U,\ T) =$$
$$= GCD(T,\ (2m+1)U) = GCD(T,\ nU).$$

Пусть D_3 — определитель матрицы $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. По теореме Кирхгоффа, D_3 совпадает с числом порождающих деревьев лестницы Мебиуса $M(n)$. Это число хорошо известно и было независимо вычислено многими авторами (J. Sedláček, J.W. Moon, N. Biggs и др.) [5]. Приведем этот результат в следующем виде.

Лемма 3. *Пусть D_3 – определитель матрицы $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Тогда D_3 выражается следующей формулой:*

$$D_3 = nT,$$

где $T = 1 + T_n(2)$, а $T_n(2) = ((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)/2$ — полином Чебышева первого рода.

Из основной теоремы о конечных абелевых группах (Теорема A) имеем следующее разложение группы Пикара для $M(n)$:

$$Jac(M(n)) = \mathbb{Z}_{D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_2/D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_3/D_2}.$$

Принимая во внимание леммы 1, 2 и 3, получим следующую теорему.

Теорема 1. *Группа Пикара лестницы Мебиуса $M(n)$ имеет следующее представление:*

$$Jac(M(n)) = \mathbb{Z}_{\frac{(n,T,U)}{(2,n)}} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{(T,nU)}{(n,T,U)}} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{(2,n)nT}{(T,nU)}},$$

где $(l,m,n) = GCD(l,m,n)$, $T = 1 + T_n(2)$, $U = U_{n-1}(2)$, а $T_n(2) = ((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)/2$ и $U_{n-1}(2) = ((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)/(2\sqrt{3})$ – полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно.

3.2. Вычисление группы Пикара для призматического графа

Рассмотрим призму $Pr(n)$ как граф, изображенный на рис. 2, с пронумерованными вершинами $1, 2, \dots, n, n+1, \dots, 2n$. Обозначим через d_i, $i = 1, \dots, n$ поток вдоль ориентированного ребра $(i, i+n)$ с начальной вершиной i и конечной вершиной $i+1$. Также обозначим через X_i и x_i потоки вдоль ориентированных ребер $(i, i+1)$ и $(i+n, i+n+1)$ соответственно.

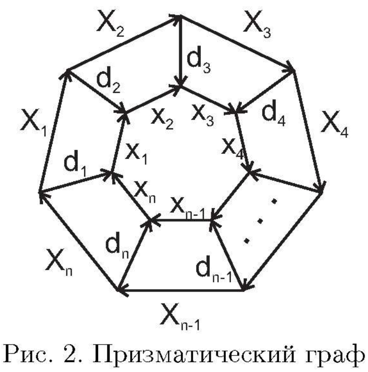


Рис. 2. Призматический граф

Из первого закона Кирхгоффа имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} d_1 = x_1 - x_n,\ d_i = x_i - x_{i-1},\ i = 2, \dots, n, \\ d_1 = X_n - X_1,\ d_i = X_{i-1} - X_i,\ i = 2, \dots, n. \end{cases} \qquad (6)$$

Используя второй закон Кирхгоффа для замкнутых путей $W_i = (i, n+i, n+i+1, i+1)$, мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} d_i + x_i - d_{i+1} - X_i = 0,\ i = 1, \dots, n-1 \\ d_n + x_n - d_1 - X_n = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Подставляя d_i, $i = 1, \dots, n$, выраженные из первой строки системы (6) в систему (7), имеем следующие соотношения между X_i and x_i.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Подставляем полученные выражения X_i через x_i в следующие выражения из системы (6): $x_1 - x_n = X_n - X_1$, $x_i - x_{i-1} = X_{i-1} - X_i$, $i = 2, \dots, n-1$, получим $n-1$ соотношение на x_i, $i = 1, \dots, n$. Заметим, что, по второму закону Кирхгоффа, для контура $(n+1, \dots, 2n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Таким образом, группа Пикара $Jac(Pr(n))$ порождена элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -5 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -5 \\ -5 & 5 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0. \tag{9}$$

Теперь сократим число порождающих группы $Jac(Pr(n))$ с n до 3. А именно – покажем, что группа $Jac(Pr(n))$ порождена элементами x_1, x_2, x_3, удовлетворяющими трем линейным уравнениям.

Для этого, заметим, что порождающие $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяют следующему рекурсивному соотношению:

$$x_j - 5x_{j+1} + 5x_{j+2} - x_{j+3} = 0,\ j = 1, 2, \dots, n-3.$$

Характеристический многочлен полученного уравнения равен $1 - 5q + 5q^2 - q^3 = 0$. Числа $q_1 = 1$, $q_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$ являются корнями этого многочлена. Отсюда, общее решение рекурсии задается формулой $x_j = C_1 + C_2 q^j + C_3 q^{-j}$, где $q = 2 + \sqrt{3}$ и C_1, C_2, C_3 – константы, зависящие только от начальных значений x_1, x_2, x_3. В результате мы получаем $x_4, x_5, \dots, x_n$ как линейную комбинацию x_1, x_2 и x_3, коэффициенты которой могут быть явно найдены.

Подставляя полученные соотношения в последние три строки системы (9), имеем:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + \widetilde{a}_{13}x_3 = 0, \\ \widetilde{a}_{21}x_1 + \widetilde{a}_{22}x_2 + \widetilde{a}_{23}x_3 = 0, \\ \widetilde{a}_{31}x_1 + \widetilde{a}_{32}x_2 + \widetilde{a}_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что $T_n(2) = (q^n + q^{-n})/2$ и $U_{n-1}(2) = (q^n - q^{-n})/(2\sqrt{3})$. Вычисляя напрямую, получаем следующие явные формулы для $\widetilde{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$:

$$\widetilde{a}_{11} = -7L + 12U, \quad \widetilde{a}_{12} = 9L - 15U, \quad \widetilde{a}_{13} = -2L + 3U,$$

$$\widetilde{a}_{21} = \frac{11}{2}L - \frac{19}{2}U, \quad \widetilde{a}_{22} = -7L + 12U, \quad \widetilde{a}_{23} = \frac{3}{2}L - \frac{5}{2}U,$$

$$\widetilde{a}_{31} = -2L + \frac{7}{2}U - \frac{n}{2}, \quad \widetilde{a}_{32} = \frac{5}{2}L - \frac{9}{2}U + 2n, \quad \widetilde{a}_{33} = -\frac{1}{2}L + U - \frac{n}{2},$$

где $L = T_n(2) - 1$ и $U = U_{n-1}(2)$.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть D_1 — наибольший общий делитель $\widetilde{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда*

$$D_1 = GCD(n, L, U)/GCD(2, n).$$

Доказательство леммы 4. Имеем:

$$\begin{aligned}
D_1 &= GCD(\widetilde{a}_{ij}) = GCD(\widetilde{a}_{11},\, \widetilde{a}_{12} - 5\widetilde{a}_{13},\, \widetilde{a}_{13},\, \widetilde{a}_{21} - 4\widetilde{a}_{23},\, \widetilde{a}_{22},\, \widetilde{a}_{23},\, \widetilde{a}_{31},\, \widetilde{a}_{32},\, \widetilde{a}_{33}) = \\
&= GCD(\widetilde{a}_{11},\, -L,\, \widetilde{a}_{13},\, -\frac{1}{2}L - \frac{1}{2}U,\, \widetilde{a}_{23},\, \widetilde{a}_{31},\, \widetilde{a}_{32},\, \widetilde{a}_{33}) = \\
&= GCD(-L, 3U, -\frac{1}{2}(L+U), -4U,\, \frac{1}{2}(7U-n),\, \frac{1}{2}(L-9U)+2n,\, -\frac{1}{2}(L+n)+U) = \\
&= GCD(L, U, -\frac{1}{2}(L+U),\, \frac{1}{2}(U-n), \frac{1}{2}(L-U)+2n, -\frac{1}{2}(L+n)) = \\
&= GCD(L, U, -\frac{1}{2}(L+U),\, \frac{1}{2}(U-n) - \frac{1}{2}(L+n),\, \frac{1}{2}(L-U)+2n, -\frac{1}{2}(L+n)) = \\
&= GCD(L, U, -\frac{1}{2}(L+U),\, -\frac{1}{2}(L-U) - n,\, \frac{1}{2}(L-U)+2n, -\frac{1}{2}(L+n)) = \\
&= GCD(L, U, n, \frac{1}{2}(L+U),\, \frac{1}{2}(L-U),\, \frac{1}{2}(L+n)) = GCD(L, U, n, \frac{1}{2}(U+n),\, \frac{1}{2}(L+n)).
\end{aligned}$$

Из основных рекурсивных соотношений для полиномов Чебышева 1° и 2° очевидно следующее свойство: числа $L = T_n(2) - 1$ и $U = U_{n-1}(2)$ той же четности, что и n.

Теперь рассмотрим два случая: когда n нечетно и когда n четно. В первом случае мы имеем:

$$D_1 = GCD(L, U, n,\, \frac{1}{2}(U+n),\, \frac{1}{2}(L+n)) =$$
$$= GCD(L, U, n,\, U+n,\, L+n) =$$
$$= GCD(L, U, n) = GCD(n, L, U)/GCD(2, n).$$

Во втором случае, учитывая четность n и свойства 1° и 2° полиномов Чебышева, получим:

$$D_1 = GCD(L, U, n, \frac{1}{2}(U+n),\, \frac{1}{2}(L+n)) =$$
$$= GCD(n, L, U)/2 = GCD(n, L, U)/GCD(2, n).$$

Теперь наша цель — найти наибольший общий делитель всех миноров порядка 2 матрицы $\widetilde{A} = \{\widetilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Обозначим через m_{ij} минор порядка 2, полученный удалением i−ой строки и j−ого столбца матрицы $\widetilde{A}$. В результате непосредственных вычислений имеем:

$$m_{11} = \frac{1}{2}(n+1)L - nU, \quad m_{12} = (-\frac{1}{2} - 2n)L + \frac{7n}{2}U,$$
$$m_{13} = \frac{1}{2}(1+15n)L - 13nU,$$
$$m_{21} = -(\frac{n}{2}+1)L + \frac{3n}{2}U, \quad m_{22} = (\frac{5n}{2}+1)L - \frac{9n}{2}U,$$
$$m_{23} = -(\frac{19n}{2}+1)L + \frac{33n}{2}U,$$
$$m_{31} = -m_{32} = m_{33} = L.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть D_2 – наибольший общий делитель миноров m_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда*

$$D_2 = GCD(T, nU)/GCD(2, n).$$

Доказательство леммы 5. Из свойств явной формулы для m_{ij} имеем:

$$\begin{aligned}
D_2 &= GCD(m_{11},\, m_{12},\, m_{13},\, m_{21},\, m_{22},\, m_{23},\, m_{31}) = \\
&= GCD(m_{11},\, m_{12} + 2nm_{31},\, m_{13} - 7nm_{31},\, m_{21} + m_{31},\, m_{22} - (2n+1)m_{31},\, m_{23} + (9n+1)m_{31},\, m_{31}) = \\
&= GCD(\frac{n+1}{2}L - nU,\, -\frac{1}{2}L + \frac{7n}{2}U,\, \frac{n+1}{2}L - 13nU,\, -\frac{n}{2}L + \frac{3n}{2}U,\, \frac{n}{2}L - \frac{9n}{2}U,\, -\frac{n}{2}L + \frac{33n}{2}U,\, L) = \\
&= GCD(\frac{n+1}{2}L - nU,\, -\frac{1}{2}L + \frac{7n}{2}U,\, -12nU,\, -\frac{n}{2}L + \frac{3n}{2}U,\, -3nU,\, 15nU,\, L) = \\
&= GCD(4nU,\, -\frac{1}{2}L + \frac{7n}{2}U,\, -\frac{n}{2}L + \frac{3n}{2}U,\, -3nU,\, L) = \\
&= GCD(nU,\, -\frac{1}{2}L + \frac{7n}{2}U,\, -\frac{n}{2}L + \frac{3n}{2}U,\, L) = GCD(nU,\, -\frac{1}{2}L + \frac{n}{2}U,\, -\frac{n}{2}L + \frac{n}{2}U,\, L).
\end{aligned}$$

Вначале рассмотрим случай, когда $n = 2m$ четно.

$$D_2 = GCD(nU,\, -\tfrac{1}{2}L + \tfrac{n}{2}U,\, -\tfrac{n}{2}L + \tfrac{n}{2}U,\, L) =$$
$$= GCD(2mU,\, -\tfrac{1}{2}L + mU,\, -mL + mU,\, L) =$$
$$= GCD(2mU,\, -\tfrac{1}{2}L + mU,\, mU,\, L) =$$
$$= GCD(\tfrac{1}{2}L,\, mU) = GCD(\tfrac{1}{2}L,\, \tfrac{2m}{2}U) =$$
$$= GCD(L,\, nU)/2 = GCD(L,\, nU)/GCD(2, n).$$

Пусть теперь $n = 2m+1$ нечетно, тогда, в силу свойств 1° и 2°, оба числа L и U нечетны. В результате получим:

$$\begin{aligned} D_2 &= GCD(nU,\, -\frac{1}{2}L+\frac{n}{2}U,\, -\frac{n}{2}L+\frac{n}{2}U,\, L) = \\ &= GCD((2m+1)U,\, -\frac{1}{2}L+\frac{2m+1}{2}U, \\ &\qquad -\frac{2m+1}{2}L+\frac{2m+1}{2}U,\, L) = \\ &= GCD((2m+1)U,\, -L+(2m+1)U, \\ &\qquad -(2m+1)L+(2m+1)U,\, L) = \\ &= GCD((2m+1)U,\, L) = GCD(nU,\, L). \end{aligned}$$

Пусть D_3 – определитель матрицы $\{\widetilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. По теореме Кирхгоффа, D_3 совпадает с числом порождающих деревьев призматического графа $Pr(n)$. Это число хорошо известно и было независимо вычислено многими авторами (J. Sedláček, J.W. Moon, N. Biggs и др.) [5]. Приведем этот результат в следующем виде.

Лемма 6. *Пусть D_3 – определитель матрицы $\{\widetilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Тогда D_3 выражается следующей формулой*

$$D_3 = nL,$$

где $L = T_n(2) - 1$, а $T_n(2) = ((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)/2$– полином Чебышева первого рода.

Из теоремы о строении конечных абелевых групп (Теорема А) получим разложение для группы Пикара графа $Pr(n)$:

$$Jac(Pr(n)) = \mathbb{Z}_{D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_2/D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_3/D_2}.$$

Принимая во внимание леммы 1, 2 и 3, установим следующую теорему:

Теорема 2. *Группа Пикара призматического графа $Pr(n)$ имеет следующее представление:*

$$Jac(Pr(n)) = \mathbb{Z}_{\frac{(n,L,U)}{(2,n)}} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{(L,nU)}{(n,L,U)}} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{(2,n)nL}{(L,nU)}},$$

где $(l,m,n) = GCD(l,m,n)$, $L = T_n(2) - 1$, $U = U_{n-1}(2)$, а $T_n(2) = ((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)/2$ и $U_{n-1}(2) = ((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)/(2\sqrt{3})$ – полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно.

Литература

[1] Cori, R. *On the sandpile group of a graph* / R. Cori, D. Rossin // European J. Combin. – 2000. – Vol. 21, no. 4. – P. 447 – 459.

[2] Baker, M. *Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs* / M. Baker, S. Norine // Int. Math. Res. Notes. –2009. – Vol.15. – P. 2914 – 2955.

[3] Biggs, N. L. *Chip-firing and the critical group of a graph* / N. L. Biggs // J. Algebraic Combin. – 1999. – Vol. 9, no. 1. – P. 25 – 45.

[4] Bacher, R. *The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph* / R. Bacher, P. de la Harpe and T. Nagnibeda // Bulletin de la Sociéte′ Mathématique de France. – 1997. – Vol. 125. – P. 167 – 198.

[5] Boesch, F. T. *Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials* / F. T. Boesch, H. Prodinger // Graphs and Combinatorics. – 1986. – Vol. 2, №. 1. – P. 191 – 200.

[6] Lorenzini, D. *Smith normal form and laplacians* / D. Lorenzini // Journal of Combinatorial Theory, Series B. – 2008. – Vol. 98, no. 6. – P. 1271 – 1300.

[7] Biggs, N. L. *Algebraic potential theory on graphs* / N. L. Biggs // Bulletin of the London Mathematical Society. – 1997. – Vol. 29, no. 6. – P. 641 –- 82.

[8] Marcus, M. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities* / M. Marcus, H. Minc. – New York: Dover Publications: Mineola, 1992. – 192 pp.

УДК 515.162

ОБОБЩЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ ЭВЕРИТА. ДИАГРАММЫ ХЕГОРА. СЛОЖНОСТЬ

Т. А. Козловская

GENERALIZATION OF EVERITT MANIFOLD. HEEGAARD DIAGRAMS. COMPLEXITY

T. Kozlovskaya

В данной работе исследуется класс замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий $M_n(p,q)$ ($n \geqslant 1$, $p \geqslant 3$, $0 < q < p$ и $(p,q) = 1$), определенных попарными отождествлениями граней фундаментальных многогранников и обладающих циклической симметрией. Найдены верхние оценки сложности (по Матвееву) многообразий $M_n(p,1)$, заданных их диаграммами Хегора.

In this paper we study a class of closed orientable three-dimensional manifolds $M_n(p,q)$ ($n \geqslant 1$, $p \geqslant 3$, $0 < q < p$ and $(p,q) = 1$) defined via pairwise identifications of the faces of fundamental polyhedra and having a cyclic symmetry. Using Heegaard diagram of $M_n(p,1)$, we obtain upper bounds for their Matveev complexity.

Ключевые слова: сложность многообразия, диаграммы Хегора, трехмерное многообразие.

Keywords: complexity of 3-manifolds, Heegaard diagrams, 3-manifolds.

Работа поддержана РФФИ (гранты № 10-01-00642 и № 10-01-91056) и Интеграционным грантом СО РАН и УрО РАН.

1. Построение многообразий из многогранников

Любое замкнутое трехмерное многообразие может быть представлено как результат попарного отождествления граней его фундаментального многогранника. Наиболее известными примерами такого рода являются: представление сферы Пуанкаре, как додекаэдра с двугранными углами $2\pi/3$, у которого грани отождествлены по некоторому правилу; представление гиперболического пространства Вебера-Зейферта, как додекаэдра с двугранными углами $2\pi/5$, у которого каждые две противоположные грани отождествлены, и представление линзового пространства как бипирамиды, у которой верхние треугольные грани отождествлены с нижними треугольными гранями. Построению трехмерных многообразий из правильных платоновых тел посвящено много работ. В работе [10] Эверит привел полный список многообразий, получаемых из правильных многогранников. Список содержит сферические многообразия $M_1, \ldots, M_8$, евклидовы $M_9, \ldots, M_{14}$ и гиперболические $M_{15}, \ldots, M_{28}$. Так, например, из додекаэдра с двугранными углами $2\pi/5$ получено восемь многообразий, одно из которых, M_{15}, является многообразием Вебера – Зейферта, построенного в [17]. Из икосаэдра с двугранными углами $2\pi/3$ получено шесть многообразий. В [10] приведено попарное отождествление граней $2\pi/3$ – икосаэдра, приводящее к многообразию M_{24}. Если все двугранные углы икосаэдра равны $2\pi/3$, то он может быть реализован как ограниченный многогранник в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. В работе будет построено семейство замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий $M_n(p,q)$, обобщающих конструкцию гиперболического многообразия M_{24} из списка Эверита.

По построению, гиперболическое многообразие Вебера — Зейферта [17] обладает симметрией пятого порядка, которая позволяет представить это многообразие как 5-листное циклическое накрытие трехмерной сферы, разветвленное над зацеплением Уайтхеда. В [6], как обобщение конструкции Вебера — Зейферта, описаны фундаментальные многогранники многообразий, являющихся n-листными ($n \geqslant 5$) циклическими накрытиями трехмерной сферы, разветвленными над зацеплением Уайтхеда. Различные способы построения трехмерных многообразий, которые циклически накрывают трехмерную сферу, разветвленно над двухмостовыми узлами и зацеплениями приведены в [13]. Трехмерные многообразия, являющиеся циклическими накрытиями линзовых пространств, разветвленными над узлами, исследовались в [14].

Авторы работы [7] строили трехмерные гиперболические многообразия, для которых фундаментальным многогранником является правильный икосаэдр с двугранными углами $2\pi/3$. Они установили, что гиперболическое многообразие M_{24} является трехлистным накрытием линзового пространства $L(3,1)$, разветвленным над некоторым двухкомпонентным зацеплением.

В работе [1] дано обобщение конструкции из [8], [9]. А именно – в терминах фундаментальных многогранников строится бесконечное семейство замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий, являющихся циклическими накрытиями линзового пространства $L(p,q)$, разветвленными над двухкомпонентными зацеплениями.

2. Построение многообразий $M_n(p,q)$ и их свойства

Введем двупараметрическое семейство трехмерных многообразий $M_n(p,q)$, определенных попарными отождествлениями граней некоторых симплициальных комплексов, обладающих циклической симметрией.

Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{P}_n(p)$, где $n \geqslant 1$, $p \geqslant 3$, изображенный на рис. 1. Комплекс имеет $6n+2$ граней, $(7+p)n$ ребер и $(p+1)n$ вершин. На каждом ребре S_iQ_i, $i = 1,\dots,n$, добавлены вспомогательные точки $T_i^1, T_i^2, \dots T_i^s$ (нумерация идет от S_i к Q_i), где $s = p-3$.

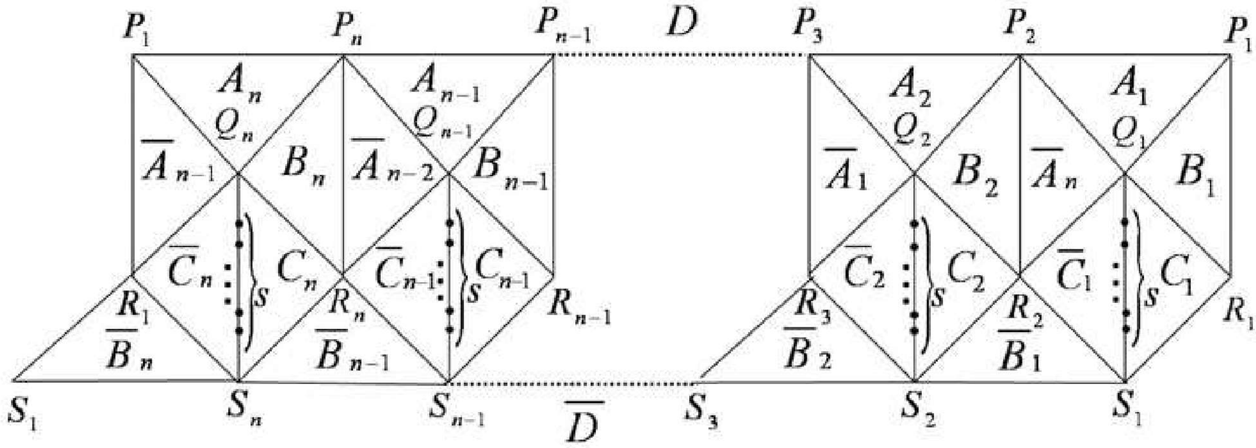


Рис. 1. Построение многообразия $M_n(p,q)$

Положим, что $\varphi_n(p,q)$ отождествляет грани $\mathcal{P}_n(p)$ следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
a_i : \mathbf{A_i} \to \mathbf{\bar{A}_i} & [P_iP_{i+1}Q_i \to R_{i+2}P_{i+2}Q_{i+1}],\\
b_i : \mathbf{B_i} \to \mathbf{\bar{B}_i} & [R_iP_iQ_i \to S_iS_{i+1}R_{i+1}],\\
c_i : \mathbf{C_i} \to \mathbf{\bar{C}_i} & [Q_iR_iS_iT_i^1 \dots T_i^s \to T_i^sQ_iR_{i+1}S_iT_i^1 \dots T_i^{s-1}], \quad \text{если } q = 1;\\
 & [Q_iR_iS_iT_i^1 \dots T_i^s \to T_i^{s-1}T_i^sQ_iR_{i+1}S_iT_i^1 \dots T_i^{s-2}], \quad \text{если } q = 2;\\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
 & [Q_iR_iS_iT_i^1 \dots T_i^s \to T_i^1 \dots T_i^sQ_iR_{i+1}S_i], \quad \text{если } q = p-3;\\
 & [Q_iR_iS_iT_i^1 \dots T_i^s \to S_iT_i^1 \dots T_i^sQ_iR_{i+1}], \quad \text{если } q = p-2;\\
 & [Q_iR_iS_iT_i^1 \dots T_i^s \to R_{i+1}S_iT_i^1 \dots T_i^sQ_i], \quad \text{если } q = p-1;\\
d : \mathbf{D} \to \mathbf{\bar{D}} & [P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n \to S_3S_4 \dots S_1S_2],
\end{array}
$$

где $i = 1,\dots,n$, все индексы берутся по модулю n и грани отождествляются в соответствии с указанным порядком вершин.

Теорема 1. [1] *Факторпространство $M_n(p,q) = \mathcal{P}_n(p)/\varphi_n(p,q)$, где $n \geqslant 2$, $p \geqslant 3$, $0 < q < p$, $(p,q) = 1$ является ориентируемым трехмерным многообразием.*

Для доказательства теоремы достаточно проверить эйлерову характеристику по теореме Зейферта–Трельфалля: комплекс, получающийся путем попарного отождествления сторон многогранника, является замкнутым трехмерным многообразием в том и только в том случае, когда его эйлерова характеристика равна 0 (см. [2]).

Теорема 2. [1] *Многообразия $M_n(p,q)$, где $n \geqslant 2$, $p \geqslant 3$, $0 < q < p$, $(p,q) = 1$ являются n- листными циклическими накрытиями линзового пространства $L(p,q)$, разветвленными над 2- компонентным зацеплением.*

Доказательство теоремы основано на построении диаграмм Хегора фактор-многообразий (рис. 2) и их преобразовании к каноническим диаграммам линзовых пространств с помощью последовательности движений Зингера. Хорошо известно, что две диаграммы Хегора предстваляют одно и то же трехмерное многообразие тогда и только тогда, когда от одной диаграммы к другой можно перейти с помощью конечной последовательности преобразований, каждое из которых является движением Зингера [15].

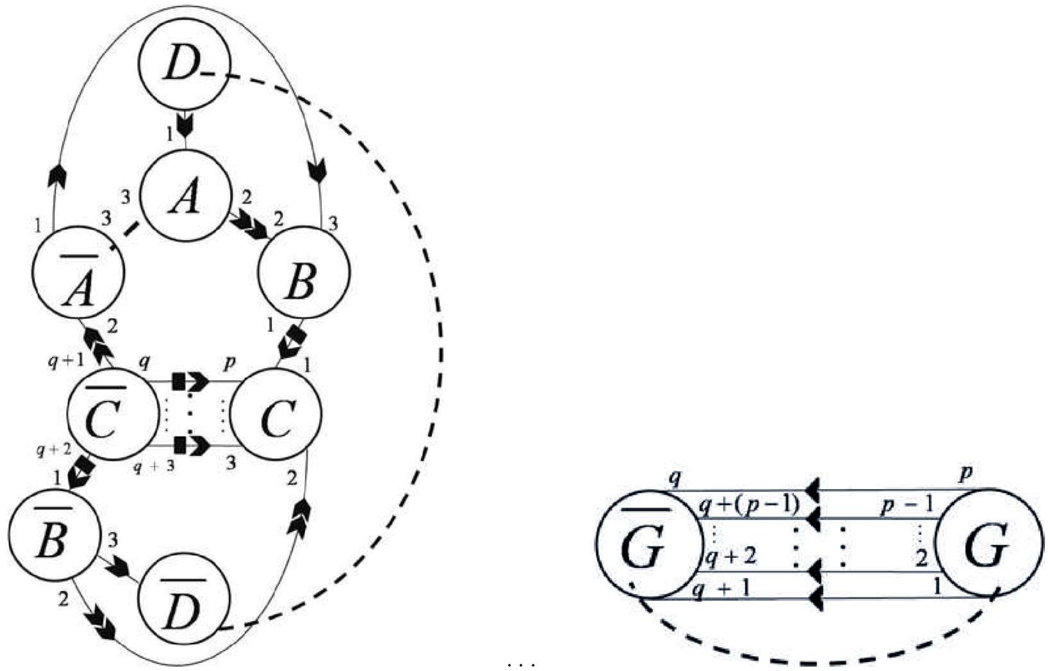


Рис. 2. Преобразования диаграммы Хегора факторпространства $M_n(p, q)/\rho_n$

Построенный класс многообразий $M_n(p, q)$ содержит, в частности, бесконечные серии многообразий из [7, 8, 9].

3. Оценки сложности для класса замкнутых трехмерных многообразий, обобщающих многообразие Эверита

В последние годы задача вычисления сложности трехмерных многообразий является актуальной и довольно полезной для классификации трехмерных многообразий. Её полезность состоит в том, что значение сложности многообразия показывает, насколько сложно устроено это многообразие. А известно, что обычно классификация геометрических объектов ведется в порядке возрастания их сложности. По настоящее время точные значения сложности известны для табличных многообразий [4], а также для двух бесконечных серий гиперболических многообразий с краем [5], для нескольких бесконечных серий линзовых пространств и для обобщенных пространств кватернионов [11],[12]. Точные значения сложности многообразий Паолюци–Циммермана получены в работе [2]. В данной работе найдены верхние оценки сложности для некоторых многообразий из двухпараметрического класса замкнутых ориентируемых трехмерных мноогобразий $M_n(p, q)$ ($n \geqslant 1$, $p \geqslant 3$, $0 < q < p$ и $(p, q) = 1$).

Напомним, что разбиение трехмерного многообразия M в объединение двух полных кренделей рода g без общих внутренних точек называется *разбиением Хегора рода* g многообразия M. *Род Хегора* многообразия определяется как минимальный род его разбиений Хегора. Известно, что любое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие M можно представить в виде объединения двух полных кренделей H и H' с общим краем: $M = H \cup H'$ и $H \cap H' = \partial H = \partial H'$ (крендели H и H' обязаны иметь одинаковый род). Считается, что, чем больше род, тем многообразие сложнее. Трехмерная сфера S^3 является единственным ориентируемым многообразием с нулевым родом Хегора. Род Хегора равен единице лишь для линзовых пространств, включая многообразие $S^2 \times S^1$.

Пусть H_g — полный крендель рода g, и $D_1, D_2, \ldots, D_g$— собственные непересекающиеся диски в H_g. Говорят, что $D_1, D_2, \ldots, D_g$ составляют *систему меридиональных дисков*, если они разбивают H_g до шара, т. е. если $H_g \setminus (D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_g) \cong B^3$. Границы меридиональных дисков называются *меридианами*.

Наиболее распространенным способом задания замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий является задание их через диаграммы Хегора. Пусть $M = H_g \cup H'_g$ — разбиение Хегора, $S_g = \partial H_g = \partial H'_g$ — поверхность Хегора, $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_g\}$ — система меридианов первого кренделя H_g, $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_g\}$ — система меридианов второго кренделя H'_g. Тройка (S_g, u, v) называется *диаграммой Хегора* многообразия M.

На основе построенной теории спайнов С. В. Матвеевым было введено понятие сложности трехмерного многообразия $c(M)$ [4]. Напомним, что полиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M с краем, если $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$. Полиэдр P называется спайном замкнутого многообразия M, если P является спайном многообразия $M \setminus IntD^3$, где $IntD^3$ –

открытый трехмерный шар в M.

Простой двумерный полиэдр имеет особенности только двух типов: конус над полным графом с четырьмя вершинами и конус над окружностью с диаметром. В первом случае особая точка называется *истинной* вершиной,во втором – тройной точкой. Тройные точки организуются в тройные линии, соединяющие истинные вершины, и тройные окружности. Неособые точки организуются в 2-компоненты. Если спайн имеет хотя бы одну истинную вершину и все его 2-компоненты являются клетками, то полиэдр называется *специальным.*

Почти простой полиэдр получается из простого добавлением графа, валентности вершин которого не меньше двух, и приклеиванием к компонентам связности дуг по обоим концам. Спайн P трехмерного многообразия M называется *специальным, простым* или *почти простым,* если он является специальным, простым или почти простым полиэдром соответственно.

Сложность $c(M)$ многообразия M определяется как число истинных вершин его минимального (в смысле числа вершин) почти простого спайна.

Пусть T – произвольная триангуляция замкнутого трехмерного многообразия M, содержащая k тетраэдров. Тогда двумерный остов двойственного разбиения многообразия M на клетки является специальным спайном n раз пунктированного M, то есть многообразия M с удаленными шаровыми окрестностями вершин. Число истинных вершин этого спайна равно k. Удаление 2-компонент, разделяющих различные шаровые окрестности, приводит к почти специальному спайну $c \leq k$ истинными вершинами (см. [4]). Таким образом, сложность $c(M)$ замкнутого трехмерного многообразия M может быть найдена как минимальное число тетраэдров, необходимых для построения многообразия M, попарными отождествлениями их граней.

Например, сложность трехмерной сферы S^3, проективного пространства RP^3 и линзового пространства $L(3,1)$ равна 0. Поскольку в первом случае, в качестве ее почти простого спайна, можно взять точку (которая, конечно, не является истинной вершиной), во втором и третьем – их естественные почти специальные спайны представляют собой соответственно проективную плоскость RP^2 и факторпространство диска D^2 по стандартному действию поворотами группы Z^3 на его крае. Оказывается, что это единственные замкнутые неприводимые многообразия сложности 0.

Пусть $(F, \mu_i, \lambda_i, 1 \leq i \leq g)$ – диаграмма Хегора замкнутого трехмерного многообразия M. Здесь F – поверхность в M, разбивающая его на два полных кренделя рода g, а μ_i, λ_i – полные наборы меридианов этих кренделей. Тогда объединение поверхности F с $2g$ меридиональными дисками является простым спайном дважды пунктированного многообразия M. Число истинных вершин этого спайна равно общему числу точек пересечения меридианов. При слиянии двух шаров в один путем удаления одной из областей диаграммы число истинных вершин может только уменьшится.Так как диаграммная сложность Хегора строится по разбиению Хегора определенного рода, то сложность Хегора определяется только для замкнутых многообразий [4].

Теорема 1. *Для сложности многообразий* $M_n(3,1)$ *(*$n \geq 2$*) имеет место следующая оценка* $C(M_n(3,1)) \leq 10(n-1)$.

Доказательство теоремы состоит в построении диаграммы Хегора H многообразия $M_n(3,1)$ (рис. 3) и в использовании понятия сложности (по Матвееву), где $10n$ – общее число точек пересечния меридианов, а 10 – число вершин на границе дисков A_1, B_1, C_1, $\overline{C}_1$, $\overline{A}_n$ в области $(A_1 B_1 C_1 \overline{C}_1 \overline{A}_n)$

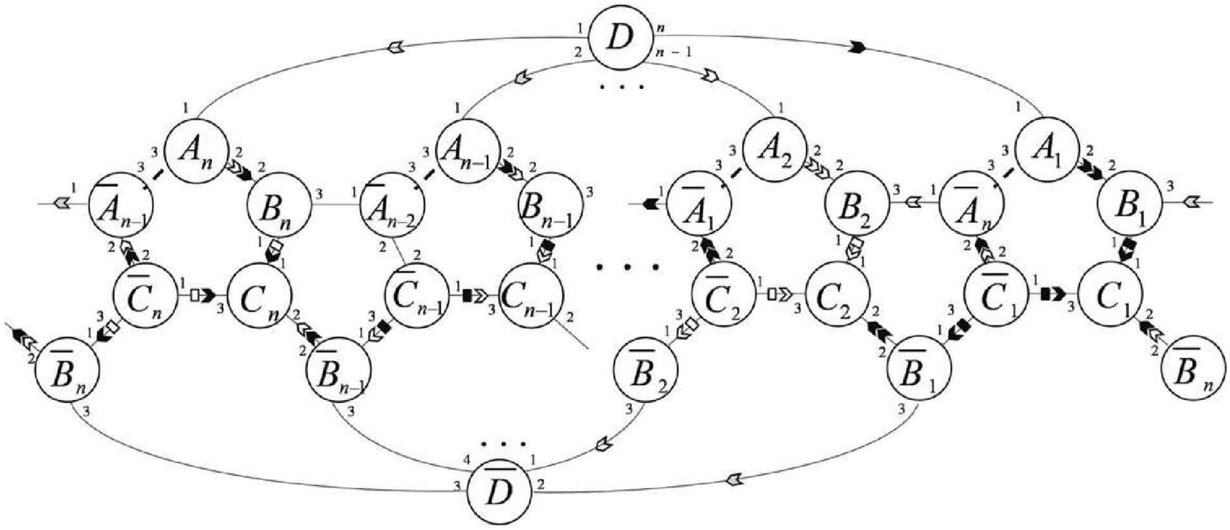


Рис. 3. Диаграмма Хегора многообразия $M_n(3,1)$

Теорема 2. *Для сложности многообразий $M_n(p,1)$ $(n \geq 2, p \geq 3)$ имеет место следующая оценка $C(M_n(p,1)) \leq 10(n-1) + n(p-3)$.*

Аналогично доказательству теоремы 1, мы строим диаграмму Хегора H многообразия $M_n(p,1)$ (рис. 4) и используем понятие сложности многообразия.

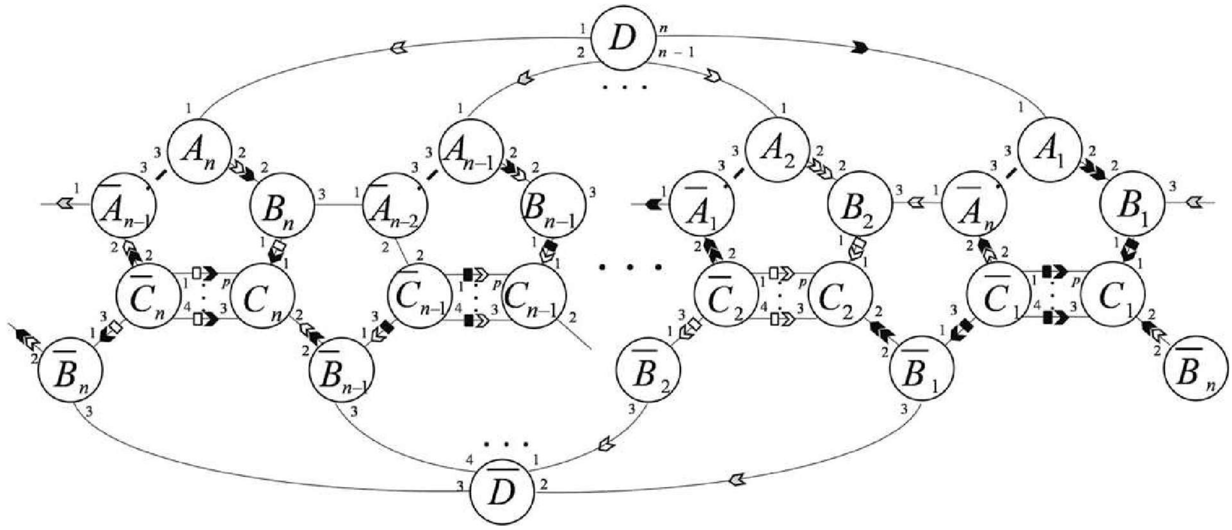


Рис. 4. Диаграмма Хегора многообразия $M_n(p,1)$

Замечание. *Вычисление сложностей многообразий $M_n(3,1)$ $(n = 2,3,4,5)$ и $M_3(5,q)$ $(q = 1,2,3,4)$ с помощью программы "Распознаватель многообразий" [15] позволило получить следующие верхние оценки:*

M	$M_2(3,1)$	$M_3(3,1)$	$M_4(3,1)$	$M_5(3,1)$	$M_3(5,1)$	$M_3(5,2)$	$M_3(5,3)$	$M_3(5,4)$
$C(M)$	≤ 6	≤ 15	≤ 22	≤ 29	≤ 21	≤ 18	≤ 18	≤ 21

Литература

[1] Веснин, А. Ю. *Разветвленные циклические накрытия линзовых пространств* / А. Ю. Веснин, Т. А. Козловская // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 3. – С. 542 – 554.

[2] Веснин, А. Ю. *Точные значения сложности многообразий Паолюци–Циммермана* / А. Ю. Веснин, Е. А. Фоминых // Доклады РАН. – 2011. – Т. 439, № 6. – С. 727 – 729.

[3] Зейферт, Г. *Топология* / Г. Зейферт, В. Трельфалль – Ижевск, 2001. – 448 с.

[4] Матвеев, С. В. *Распознавание и табулирование трехмерных многообразий* / С. В. Матвеев // Доклады РАН. – 2005. – Т. 400, № 1. – С. 26 – 28.

[5] Anisov, S. *Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds* / S. Anisov // Mosc. Math. J. – 2005. – V. 5, № 2. – C. 305 – 310.

[6] Barbieri, E. *Some series of honey-comb spaces* / F. Barbieri, A. Cavicchioli, F. Spaggiari, // Rocky Mountain J. Math. – 2009. – Vol. 39.,№. 2. – P. 381 – 398.

[7] Cavicchioli, A. *Topology of compact space forms from Platonic solids. I* / A. Cavicchioli, F. Spaggiari, A. Telloni // Topology Appl. – 2009. – Vol. 156. – P. 812 – 822.

[8] Cavicchioli, A. *Topology of compact space forms from Platonic solids. II* / A. Cavicchioli, F. Spaggiari, A. Telloni // Topology Appl. – 2010. – Vol. 157. – P. 921 – 931.

[9] Cristofori, P. *Cyclic generalizations of two hyperbolic icosahedral manifolds* / P. Cristofori, T. Kozlovskaya, A. Vesnin // Topology Appl. submitted.

[10] Everitt, B. *3-manifolds from compact space forms from Platonic solids* / B. Everitt // Topology Appl. – 2004. – Vol. 138. – P. 253 – 263.

[11] Jaco, W. *Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces* / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // J. Topology. – 2009. – Vol. 2., №. 1. – P. 253 – 263.

[12] Jaco, W. *Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds* / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // To appear in Algebr. Geom. Topol.– arXiv:0903.0112.

[13] Mulazzani, M. *The many faces of cyclic branched coverings of 2-bridge knots and links* / M. Mulazzani, A. Vesnin // Atti Sem. Mat. Fis. Univ.

Modena. – 2001. – Vol. IL. – P. 177 – 215.

[14] Mulazzani, M. *Cyclic presentation of groups and cyclic branched covering of* $(1,1)$ *knots* / M. Mulazzani // Bull. Korean Math. Soc. – 2003. – Vol. 40, №. 1. – P. 101 – 108.

[15] Recognizer *Three-manifold Recognizer*, the computer program developed by members of the topology group of Chelyabinsk State University.

[16] Singer, J. *Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams* / J. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – Vol. 35, №. 1. – P. 88 – 111.

[17] Weber, C. *Die Beiden Dodekaederäume* / C. Weber, H. Seifert // Math. Z. – 1933. – Vol. 37 – P. 237 – 253.

УДК 515.162.8

ПРИМАРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ

Ф. Г. Кораблев

PRIME DECOMPOSITIONS OF VIRTUAL KNOTS

Ph. G. Korablev

Доказывается, что произвольный виртуальный узел представляется в виде связной суммы нескольких примарных и тривиальных виртуальных узлов, причем примарные слагаемые такого разложения определены однозначно, то есть определяются только исходным виртуальным узлом. Для этого на множестве узлов в утолщенных поверхностях вводятся два типа редукций и доказывается, что результат применения этих редукций к произвольному узлу в утолщенной поверхности существует и однозначно определен.

We prove that any virtual knot can be presented as a connected sum of several prime and trivial virtual knots. Prime summands of the presentation are defined uniquely, i.e. they are determined by the original knot. We introduce two types of reductions on the set of knots in thickened surfaces and prove that the result of any sequence of reductions exists and is defined uniquely.

Ключевые слова: виртуальный узел, связная сумма, теория корней.

Keywords: virtual knot, connected sum, root theory.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение и предварительные сведения

Под *узлом в утолщенной поверхности* понимается простая замкнутая кривая K в прямом произведении $F \times I$, где F — замкнутая ориентируемая поверхность, $I = [0;1]$ — отрезок. Удобно понимать такие узлы, как пары $(F \times I, K)$. Все узлы в утолщенных поверхностях рассматриваются с точностью до гомеоморфизмов, сохраняющих основания прямого произведения и рассматриваемых как гомеоморфизмы пар. Пусть $(F \times I, K)$ – узел в утолщенной поверхности. Выберем такую пару непересекающихся дисков $D_1, D_2 \subset F$, что $(D_i \times I) \cap K = \emptyset$, $i = 1,2$. Операция *стабилизации* узла $(F \times I, K)$ состоит в вырезании из многообразия $F \times I$ цилиндров $D_i \times I$, $i = 1,2$ и склеивании копий колец $\partial D_i \times I$ на крае получившегося многообразия по такому гомеоморфизму $\partial D_1 \times I \to \partial D_2 \times I$, чтобы в результате получился узел в утолщенной поверхности. Операция, обратная стабилизации, называется *дестабилизацией* и состоит в уменьшении рода поверхности F без изменения кривой K.

Два узла в утолщенных поверхностях $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ *эквивалентны*, если от одного к другому можно перейти с помощью последовательности преобразований стабилизации и дестабилизации. *Виртуальным узлом* называется класс эквивалентности узлов в утолщенных поверхностях (см. [1, 2, 3]).

Пусть $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ – два узла в утолщенных поверхностях. Для каждого $i = 1,2$ выберем такой диск $D_i \subset F_i$, что пересечение $l_i = (D_i \times I) \cap K_i$ является тривиальной дугой в топологическом шаре $D_i \times I$. Склеим пары $((F_i \setminus Int\ D_i) \times I, K_i \setminus Int\ l_i)$ по такому обращающему индуцированные ориентации гомеоморфизму $\varphi\colon \partial D_1 \times I \to \partial D_2 \times I$, что $\varphi(\partial D_1 \times \{0\}) = \partial D_2 \times \{0\}$ и $\varphi(\partial l_1) = \partial l_2$. Получившийся в результате узел в утолщенной поверхности $(F \times I, K)$ называется *кольцевой связной суммой* узлов $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ (также см. [4, 5]). Операция кольцевой связной суммы является прямым обобщением операции связного суммирования классических узлов в S^3 на случай узлов в утолщенных поверхностях.

Операция кольцевой связной суммы узлов в утолщенных поверхностях индуцирует операцию *связного суммирования* виртуальных узлов. Результат связного суммирования $v_1 \# v_2$ зависит как от выбора конкретных реализаций виртуальных узлов v_1, v_2 узлами в утолщенных поверхностях, так и от выбора дисков D_1, D_2, необходимых для задания кольцевой связной суммы. Будем говорить, что разложение $v = v_1 \# v_2$ одного виртуального узла в связную сумму двух других *тривиально*, если один из узлов v_1, v_2 совпадает с узлом v, а второй тривиален. Нетривиальный виртуальный узел v называется *примарным*, если его нельзя представить в виде нетривиальной связной суммы.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Любой виртуальный узел раскладывается в связную сумму нескольких примарных и нескольких тривиальных виртуальных узлов. При этом примарные слагаемые такого разложения определены однозначно, т. е. зависят только от исходного виртуального узла.*

Тривиальные виртуальные узлы выделяются отдельно в силу того, что существуют нетривиальные виртуальные узлы, являющиеся связной суммой тривиальных (см. [6]).

Пусть $(F \times I, K)$ – узел. Собственное кольцо $A \subset F \times I$ называется *вертикальным*, если оно изотопно кольцу вида $c \times I$, где $c \subset F$ – простая замкнутая кривая на поверхности F. Определим два типа редукций узлов в утолщенных поверхностях.

1. Пусть $A \subset F \times I$ – вертикальное кольцо, трансверсально пересекающее кривую K в двух точках. *Редукция типа 1* вдоль кольца A состоит в разрезании пары $(F \times I, K)$ по кольцу A и заклеивании двух получившихся копий кольца A ручками индекса 2 с тривиальными дугами в них. В результате получаются две пары $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ (рис. 1(а)).

2. Пусть $A_1, A_2 \subset F \times I$ – такая пара непересекающихся вертикальных колец, что их объединение разбивает многообразие $F \times I$ на две части, и каждое из колец пересекается с кривой K в одной точке. *Редукция типа 2* вдоль колец A_1, A_2 состоит в разрезании пары $(F \times I, K)$ по кольцам A_1, A_2 и склеивании копий этих колец на крае каждой части так, чтобы получились две пары $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ (рис. 1(б)).

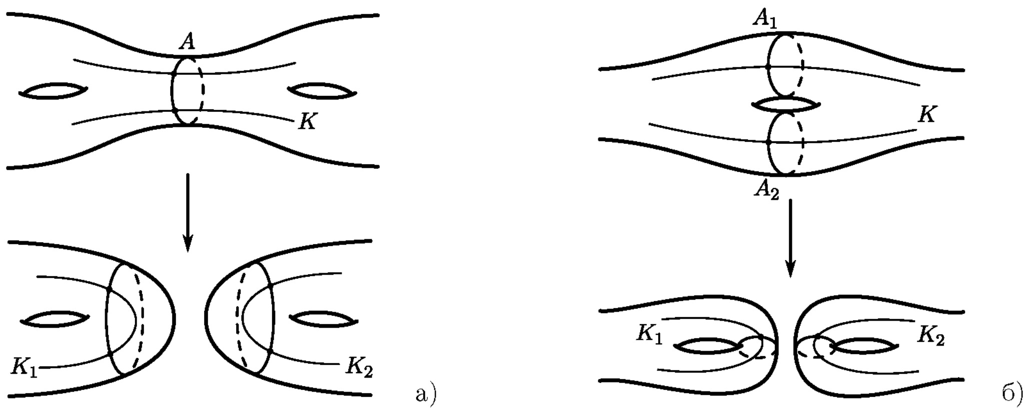


Рис. 1. Редукция типа 1 (а) и редукция типа 2 (б).

Отметим, что если узлы в утолщенных поверхностях $(F \times I, K)$, $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ являются реализациями виртуальных узлов v, v_1 и v_2 соответственно, и узлы $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ получаются в результате редукции типа 1 или 2 из узла $(F \times I, K)$, то $v = v_1 \# v_2$. Это следует из того, что редукция типа 1 является операцией, обратной кольцевой связной сумме, а редукция типа 2 является суперпозицией стабилизации и редукции типа 1. Отметим также, что редукция типа 1 вдоль сжимаемого кольца эквивалентна *сферической редукции* (также см. [7]), которая состоит в вырезании заузленной дуги кривой $K \subset F \times I$ в некотором шаре $B \subset F \times I$ (локального узла). В результате сферической редукции получается узел $(F \times I, K_1)$ в той же самой утолщенной поверхности $F \times I$ и некоторый узел в утолщенной сфере $(S^2 \times I, K_2)$. Удобно все редукции типа 1 вдоль сжимаемых колец заменять на соответствующие им сферические редукции. Дестабилизация узла $(F \times I, K)$ задается несжимаемым вертикальным кольцом, которое не пересекается с кривой K.

Редукция типа 1 или 2 называется *тривиальной*, если в результате нее один из получившихся узлов совпадает с исходным. Узел в утолщенной поверхности *примарен*, если он не допускает дестабилизаций и нетривиальных редукций типа 1 и 2.

Реализация $(F \times I, K)$ узлом в утолщенной поверхности виртуального узла v называется *минимальной*, если она не допускает дестабилизаций (также см. [2]). Из работы [2] следует, что для произвольного виртуального узла его минимальная реализация существует и определена однозначно.

Лемма 1. *Пусть v – виртуальный узел, $(F \times I, K)$ – его минимальная реализация. Тогда узел v примарен тогда и только тогда, когда узел*

$(F \times I, K)$ *примарен.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 5 работы [3]. Пусть виртуальный узел v представляется в виде связной суммы (возможно тривиальной) $v = v_1 \# v_2$. Основной момент в доказательстве леммы 1 состоит в том, что если неминимальная реализация $(F \times I, K)$ узла v допускает редукцию типа 1 или 2, в результате которой получаются реализации узлов v_1 и v_2, то узел в утолщенной поверхности, получающийся из $(F \times I, K)$ в результате одной дестабилизации, также допускает редукцию типа 1 или 2, в результате которой получаются реализации узлов v_1 и v_2.

Для доказательства теоремы 1 будем использовать методы теории корней, разработанной в [7]. Построим ориентированный граф Γ с множеством вершин $\mathbb{V}(\Gamma)$ и множеством ребер $\mathbb{E}(\Gamma)$. Каждая его вершина $V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ является либо парой вида $(F \times I, K)$, либо набором нескольких таких пар, рассматриваемых с точностью до добавления и удаления тривиальных узлов в $S^2 \times I$. Две вершины $U, V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ соединены ориентированным ребром $\overrightarrow{UV} \in \mathbb{E}(\Gamma)$, если набор узлов V получается из набора узлов U с помощью дестабилизации или нетривиальной редукции типа 1 или 2. Если различные редукции пар вершины U приводят к одной и той же вершине V, то мы проводим одно ребро $\overrightarrow{UV}$, запрещая тем самым двойные ребра. Вершина $V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ называется *корнем* вершины $U \in \mathbb{V}(\Gamma)$, если существует ориентированный путь по ребрам графа Γ из вершины U в вершину V и из вершины V не исходит ни одного ребра.

На множестве пар ребер с общим началом

$$\mathbb{E}^{(2)}(\Gamma) = \{(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) | U \in \mathbb{V}(\Gamma), \overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2} \in \mathbb{E}(\Gamma)\}$$

определим функцию $\mu\colon \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ правилом:

$$\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = \min_{X_1, X_2} \#(X_1 \cap X_2),$$

где минимум числа компонент связности $\#(X_1 \cap X_2)$ берется по всем поверхностям X_1, X_2, задающим ребра $\overrightarrow{UV_1}$ и $\overrightarrow{UV_2}$ соответственно. Отметим, что $\mu(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UV}) = 0$.

Приведем два условия на граф Γ, достаточные как для существования, так и для единственности корня любой его вершины (эти условия предложил С. В. Матвеев).

(FC): (от слов Finiteness Condition). Любой ориентированный путь по ребрам графа Γ имеет конечную длину;

(MF): (от слов Mediator Function). Для любой пары ребер $(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) \in \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma)$ выполнены следующие два условия:

(MF1): если $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$, то найдется вершина $W \in \mathbb{V}(\Gamma)$, в которую можно проложить ориентированные пути по ребрам графа Γ как из вершины V_1, так и из вершины V_2;

(MF2): если $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) > 0$, то найдется такое ребро $\overrightarrow{UW}$ с той же начальной вершиной, что $\mu(\overrightarrow{UV_i}, \overrightarrow{UW}) < \mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2})$ при $i = 1, 2$.

Лемма 2. *Если граф* Γ *удовлетворяет условиям* (FC) *и* (MF)*, то корень любой его вершины существует и единствен.*

Эта лемма аналогична теореме 1 из [7]. Конечность произвольного пути по ребрам гарантирует существование корня, а справедливость свойства (MF) – его единственность.

Из леммы 1 следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать существование и единственность корня произвольной вершины графа Γ.

2. Существование корня

Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех пар вида $(F \times I, K)$, и пусть Ω – вполне упорядоченное множество, состоящее из троек вида (g, s, w), где g, s – неотрицательные числа, w – лексикографически упорядоченная конечная последовательность неотрицательных чисел. На множестве Ω также вводится лексикографический порядок. Построим такую функцию сложности $\varphi\colon \mathcal{K} \to \Omega$, что для любой пары $(F' \times I, K') \in \mathcal{K}$, получающейся из пары $(F \times I, K) \in \mathcal{K}$ в результате дестабилизации или нетривиальной редукции типа 1 или 2, справедливо соотношение $\varphi(F \times I, K) > \varphi(F' \times I, K')$.

Пусть $(F \times I, K)$ – узел. *Числом Шуберта* $s(F \times I, K)$ называется максимальное число таких попарно не пересекающихся трехмерных шаров $B_1, B_2, \ldots$ в $F \times I$, что для каждого $i = 1, 2, \ldots$ пересечение $K \cap B_i$ является заузленной дугой в B_i. Из результатов работы [8] следует, что число Шуберта $s(F \times I, K)$ конечно и однозначно определяется парой $(F \times I, K)$. Это следует также из теоремы 7 работы [7].

Пусть $(F \times I, K)$ – узел, $g(F)$ – род поверхности F, и $c_1, \ldots, c_{2g(F)}$ – такой упорядоченный набор простых замкнутых кривых на F, что каждая следующая кривая трансверсально пересекает предыдущую ровно в одной точке. Упорядоченный набор $\mathcal{C} = \{C_i \subset F \times I \mid 1 \leqslant i \leqslant 2g(F)\}$ трансверсальных кривой K вертикальных колец называется *контрольным*, если каждое кольцо C_i изотопно кольцу $c_i \times I$, $i = 1, \ldots, 2g(F)$. *Весом* узла $(F \times I, K)$ называется величина $w(F \times I, K) = \min_{\mathcal{C}}(\#(C_1 \cap K), \ldots, (C_{2g(F)} \cap K))$, где минимум берется по всем возможным контрольным наборам колец, а на множестве всех упорядоченных последовательностей вида $(\#(C_1 \cap K), \ldots, (C_{2g(F)} \cap K))$, где $\#(C_i \cap K)$ – число точек пересечения кольца C_i и кривой K, вводится лексикографический порядок.

Опишем функцию $\varphi\colon \mathcal{K} \to \Omega$ следующим образом:

$$\varphi(F \times I, K) = (g(F), s(F \times I, K), w(F \times I, K)),$$

где $g(F)$ — род поверхности F, $s(F\times I, K)$ — число Шуберта пары $(F\times I, K)$, и $w(F\times I, K)$ — вес узла $(F\times I, K)$. Значением $\varphi(F\times I, K)$ является тройка, где первые два элемента – неотрицательные числа, а третий – упорядоченная последовательность длины $2g(F)$.

Лемма 3. *Пусть узел $(F' \times I, K')$ получается из узла $(F \times I, K)$ в результате дестабилизации или нетривиальной редукции типа 1 или 2. Тогда $\varphi(F \times I, K) > \varphi(F' \times I, K')$.*

Непосредственно проверяется, что при дестабилизации, редукции типа 1 вдоль несжимаемого кольца и редукции типа 2 вдоль пары непараллельных колец уменьшается род поверхности F. При редукции типа 1 вдоль сжимаемого кольца уменьшается число Шуберта, а при редукции типа 2 вдоль пары параллельных колец уменьшается вес узла $(F \times I, K)$.

Из леммы 3 следует, что произвольная последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$, состоящая из дестабилизаций и нетривиальных редукций типов 1 и 2, конечна. Отсюда следует, что граф Γ удовлетворяет свойству (FC).

3. Единственность корня

Лемма 4. *Граф* Γ *удовлетворяет свойствам* (MF1) *и* (MF2).

В самом деле, пусть поверхности X_1, X_2 задают такие ребра $\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2} \in \mathbb{E}(\Gamma)$ соответственно, что $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$. Каждая из поверхностей X_1, X_2 задает либо дестабилизацию, либо нетривиальную редукцию типа 1 или 2. Так как $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$, то можно считать, что $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Предположим, что копия поверхности X_2 задает либо дестабилизацию, либо редукцию типа 1 или 2 некоторого узла, составляющего вершину V_1, а поверхность X_1 задает дестабилизацию или редукцию некоторого узла, составляющего вершину V_2. В этом случае непосредственно проверяется, что если каждая из поверхностей X_1, X_2 задает нетривиальную редукцию или дестабилизацию узлов, составляющих V_2 и V_1 соответственно, то искомая вершина W получается из V_1 с помощью редукции или дестабилизации вдоль X_2 (та же самая вершина получается из V_2 с помощью редукции или дестабилизации вдоль X_1). Если X_1 задает тривиальную редукцию типа 1 или 2 узла, составляющего вершину V_2, то искомая вершина W совпадает с V_2.

Сформулированное выше условие на существование редукций вдоль поверхностей X_1, X_2 нарушается только в случае, если обе поверхности лежат в одной и той же утолщенной поверхности $F \times I$, каждая из них является парой колец, и при обходе вдоль кривой K кольца из X_1, X_2 встречаются поочередно. Тогда искомая вершина W получается из каждой вершины V_i, $i = 1, 2$, двумя редукциями по образам соседних колец из $X_1 \cup X_2$.

Предположим теперь, что $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) > 0$. Пусть $(F \times I, K)$ – один из узлов, составляющих вершину U, и пусть $X_1, X_2 \subset F \times I$ – поверхности, задающие ребра $\overrightarrow{UV_1}$ и $\overrightarrow{UV_2}$ соответственно. Основной момент в доказательстве свойства (MF2) состоит в построении *поверхности-посредника* $X \subset F \times I$, которая задает дестабилизацию или нетривиальную редукцию типа 1 или 2 узла $(F\times I, K)$, и $\#(X \cap X_i) < \#(X_1, X_2)$, $i = 1, 2$. Для этого используется стандартная техника устранения пересечений поверхностей подобно тому, как это описано в [7].

Из лемм 3 и 4 следует, что каждая вершина графа Γ имеет единственный корень. Покажем справедливость теоремы 1. Предположим противное, пусть v – виртуальный узел, и пусть $v_1, \ldots, v_n$ и $v'_1, \ldots, v'_l$ – два разных набора примарных виртуальных узлов, являющиеся слагаемыми в разложении узла v в связную сумму. Пусть $\mathcal{F} = \{(F_1 \times I, K_1), \ldots, (F_n \times I, K_n)\}$ – минимальные реализации виртуальных узлов $v_1, \ldots, v_n$ соответственно, и $\mathcal{F}' = \{(F'_1 \times I, K'_1), \ldots, (F'_l \times I, K'_l)\}$ – минимальные реализации виртуальных узлов $v'_1, \ldots, v'_l$ соответственно. Тогда некоторая реализация $(F \times I, K)$ виртуального узла v получается из набора узлов $\mathcal{F}$ с помощью операций стабилизации, дестабилизации и кольцевой связной суммы, и некоторая другая реализация $(F' \times I, K')$ того же узла v получается из набора узлов $\mathcal{F}'$ с помощью тех же операций.

В силу леммы 1, каждый из узлов наборов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ является примарным, следовательно набор узлов $\mathcal{F}$ является корнем вершины V графа Γ, состоящей из одного узла $(F \times I, K)$, а набор узлов $\mathcal{F}'$ является корнем вершины V' графа Γ, состоящей из одного узла $(F' \times I, K')$. Так как при стабилизации корень не меняется, то корни вершин V и V' совпадают. Следовательно наборы $v_1, \ldots, v_n$ и $v'_1, \ldots, v'_l$ также совпадают.

Литература

[1] Carter, J. S. *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms* / Carter J. S., Kamada S., Saito M. // J. Knot Theory Ramifications – 2002. – Vol. 11. – P. 311 – 322.

[2] Kuperberg, G. *What is a virtual link?* / G. Kuperberg // Algebraic and Geometric Topology. – 2003. – Vol. 13 – P. 587 – 591.

[3] Кауффман, Л. *Виртуальные узлы и зацепления* /Л. Кауффман, В. О. Мантуров // Труды МИРАН – 2006. – Т. 252, no 1. – С. 114 – 134.

[4] Матвеев, С. В. *Разложение гомологически*

тривиальных узлов в $F \times I$ /С. В. Матвеев// Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 433, no. 1. – С. 13 – 15.

[5] Кораблев, Ф. Г. *Редукции узлов в утолщенных поверхностях и виртуальные узлы* / Ф. Г. Кораблев, С. В. Матвеев // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 437, no. 6. – С. 748 – 750.

[6] Kishino, T. *A note on non-classical virtual knots* /T. Kishino, S. Satoh//J. of Knot Theory and Its Ramifications. – 2004. – Vol. 13, no. 7. – P. 845 – 856.

[7] Matveev, S. *Roots in 3-manifold topology* /C. Hog-Angelony, S. Matveev// Geometry and Topology Monograph. – 2008. – Vol. 14. – P. 295–319.

[8] Miyazaki, K. *Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds* /K. Miyazaki// Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – Vol. 313. – P. 785 – 804.

УДК 515.162.3

О ПРИМАРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С. В. Матвеев

ON PRIME DECOMPOSITIONS OF KNOTS IN THICKENED SURFACES

S. V. Matveev

Хорошо известно, что любой узел в сфере S^3 можно представить в виде связной суммы примарных слагаемых, причем такое представление единственно. Это – знаменитая теорема Х. Шуберта 1949 года. Верен ли аналогичный результат для узлов в утолщенных поверхностях, то есть в многообразиях вида $F \times I$, где F – замкнутая ориентируемая поверхность? Оказывается, теорема существования примарного разложения верна, а теорема единственности – нет (построены контрпримеры). В настоящей статье описывается структура множества всех возможных контрпримеров.

It is well known that any knot in S^3 can be represented as a connected sum of prime summands. Moreover, the summands are determined uniquely. This is the famous theorem of H. Schubert (1949). Is a similar result true for knots in thickened surfaces, that is, in 3-manifolds of the type $F \times I$, where F is a closed orientable surface? It turns out that the existence theorem is true but the uniqueness theorem is false (there are counterexamples). In the paper we describe the general structure of all possible counterexamples.

Ключевые слова: узел, связная сумма, утолщенная поверхность, примарное разложение.

Keywords: knot, connected sum, thickened surface, prime decomposition .

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение

Утолщенные поверхности, то есть многообразия вида $F \times I$, где F – замкнутая ориентируемая поверхность, являются самыми простыми трехмерными многообразиями после сферы S^3. Поэтому не удивительно, что теория узлов в утолщенных поверхностях имеет много общего с теорией классических узлов. В частности, теории узлов в S^3 и $S^2 \times I$ эквивалентны, поскольку второе многообразие получается из первого вырезанием двух шаров, а это ни на что не влияет. Как и в классическом случае, узлы в $F \times I$ задаются своими диаграммами, то есть проекциями на F. В каждой двойной точке проекции должно быть указано, какой из проходящих через нее участков узла расположен выше, какой – ниже (в смысле величины координаты $t \in I$). При этом роль преобразований Райдемайстера сохраняется: они реализуют изотопии узлов. Многие инварианты классических узлов (например, полиномы Кауффмана и Джоунса) обобщаются на случай узлов в утолщенных поверхностях.

Напомним, что на множестве классических узлов определена операция связного суммирования #, относительно которой они образуют свободную абелеву полугруппу с тривиальным элементом, но без нетривиальных обратимых элементов. Это следует из теоремы Х. Шуберта [1], которая утверждает, что любой узел в S^3 можно разложить в связную сумму однозначно определенных слагаемых, не допускающих нетривиальных разложений. По аналогии с простыми числами, неразложимые слагаемые называются примарными (от английского слова *prime* - простой). Операция связного суммирования определена и для узлов в утолщенных поверхностях. На уровне диаграмм ее определение в точности совпадает с классическим, а на уровне многообразий отличается от него, хотя и не очень существенно.

Верен ли результат, аналогичный теореме Шуберта, для узлов в утолщенных поверхностях? В недавней работе [2] было доказано, что если узел $K \subset F \times I$ определяет тривиальный элемент группы гомологий $H_1(F;\mathbb{Z}_2)$, то его разложение в связную сумму примарных узлов существует и единственно. В общем случае теорема существования примарного разложения верна, а теорема единственности – нет. Два примера узлов в утолщенных поверхностях, допускающих по паре различных примарных разложений, были построены автором и Ф. Г. Кораблевым [2, 3]. В настоящей статье доказывается, что эти два контрпримера к теореме единственности порождают (в некотором точном смысле) все другие контрпримеры.

2. Основные определения

Пусть F – связная замкнутая ориентируемая поверхность. *Узлом* в $F \times I$ называется произвольная простая замкнутая кривая $K \subset F \times I$. Часто узел удобно понимать как пару вида $(F \times I, K)$. Два узла $K \subset F \times I$ и $K' \subset F' \times I$ *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon (F \times I, K) \to (F' \times I, K')$, сохраняющий основания прямого произведения.

Пусть $K' \subset F' \times I$, $K'' \subset F'' \times I$ – два узла. Выберем диски $D' \subset F'$, $D'' \subset F''$ и изотопно продеформируем узлы K', K'' так, чтобы пересечения $l' = K' \cap (D' \times I)$ и $l'' = K'' \cap (D'' \times I)$ были тривиальными дугами в цилиндрах $D' \times I$, $D'' \times I$.

Определение 1. *Узел $K = K' \# K''$ в $F \times I$, где $F = F' \# F''$, полученный склеиванием многообразий $(F' \setminus \operatorname{Int} D') \times I$, $(F'' \setminus \operatorname{Int} D'') \times I$ по такому гомеоморфизму $\varphi\colon \partial D' \times I \to \partial D'' \times I$, что $\varphi(\partial l') = \partial l''$, называется связной суммой узлов $K' \subset F' \times I$ и $K'' \subset F'' \times I$.*

Обратная операция, то есть переход от пары $(F \times I, K)$ к парам $(F' \times I, K'), (F'' \times I, K'')$ называется кольцевой редукцией, (см. рис. 1.).

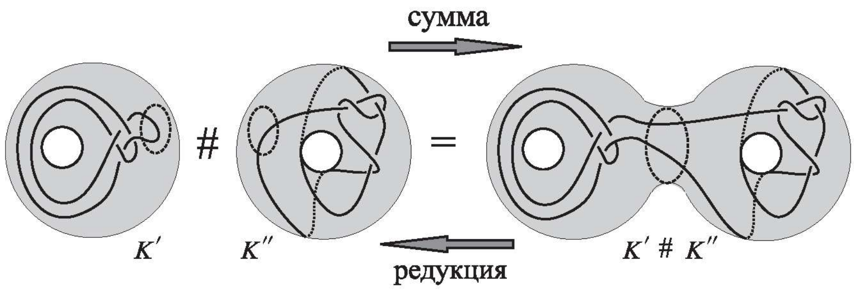


Рис. 1. Операции суммирования и редуцирования обратны друг другу

Она выполняется в два этапа. Сначала мы разрезаем $F \times I$ по вертикальному кольцу $A = \partial D' \times I = \partial D'' \times I$, которое разбивает $F \times I$ на части $(F' \setminus \operatorname{Int} D') \times I$, $(F'' \setminus \operatorname{Int} D'') \times I$, а затем заклеиваем копии кольца A на краях этих частей утолщенными дисками $D' \times I$, $D'' \times I$ с тривиальными дугами в них. Подчеркнем, что кольцевая редукция выполняется по вертикальному кольцу (или кольцу, изотопному вертикальному), которое обязано разбивать утолщенную поверхность и трансверсально пересекать данный узел ровно в двух точках. Такие кольца будем называть допустимыми.

Связная сумма $K' \# K''$ зависит как от выбора дисков D', D'' и изотопных деформаций узлов, так и от выбора гомеоморфизма φ. В общем случае число различных связных сумм двух данных узлов бесконечно. Однако, если один из узлов K', K'' является тривиальным узлом в $S^2 \times I$, то узел $K' \# K''$ эквивалентен второму узлу. Такое суммирование называется тривиальным.

Определение 2. *Узел в утолщенной поверхности называется примарным, если его нельзя представить в виде нетривиальной связной суммы двух других узлов.*

Теорема 1. *Если узел в утолщенной поверхности отличен от тривиального узла в $S^2 \times I$, то он либо является примарным, либо раскладывается в связную сумму нескольких примарных узлов.*

Доказательство этой теоремы затруднений не вызывает. Действительно, будем применять к данному узлу K и к его появляющимся при этом слагаемым нетривиальные кольцевые редукции до тех пор, пока это возможно. Так как при применении кольцевой редукции к узлу в связной утолщенной поверхности ее род строго уменьшается, то этот процесс заведомо остановится. В результате мы получим набор примарных узлов, одна из возможных связных сумм которых совпадает с K.

3. Две серии контрпримеров

Как уже отмечалось, один и тот же узел в утолщенной поверхности может допускать различные разложения в связную сумму примарных слагаемых. Такие узлы будем называть контрпримерами, имея в виду аналог теоремы Шуберта для классических узлов, вернее, ее второе заключение о единственности разложения.

Разобъем множество всех узлов в утолщенных поверхностях на два подмножества $\mathcal{R}$ и $\mathcal{C}$. Первое подмножество состоит из узлов, допускающих только одно примарное разложение. Будем называть их регулярными. Второе – из контрпримеров, то есть из узлов, имеющих различные примарные разложения.

Пусть $(F \times I, K)$ – узел. Если $(F \times\ I, K) = (F' \times\ I, K')\#(F'' \times I, K'')$ и одно из слагаемых, например, $(F' \times I, K')$, лежит в $\mathcal{C}$, то $(F \times I, K)$ тоже лежит в $\mathcal{C}$. В этом случае будем говорить, что контрпример $(F \times I, K)$ индуцирован контрпримером $(F' \times I, K')$.

Определение 3. *Узел $(F \times I, K) \in \mathcal{C}$ называется базисным, если он не индуцирован никаким узлом из $\mathcal{C}$ или, эквивалентно, если в любом его разложении в связную сумму двух узлов оба слагаемых регулярны. Множество всех базисных контрпримеров обозначим $\mathcal{B}$.*

Другими словами, если $(F \times I, K) \in \mathcal{B}$, то выполняется следующее.

1. Для любого допустимого кольца $A \subset (F \times I, K)$ узлы $(F'_A \times I, K'_A)$, $(F''_A \times I, K''_A)$, полученные из узла $(F \times I, K)$ редукцией по A, регулярны.
2. Найдется такая пара нетривиальных допустимых колец $P, Q \subset (F \times I, K)$, что объединение примарных слагаемых узлов $(F'_P \times I, K'_P), (F''_P \times I, K''_P)$, получающихся редукцией по P, отлично от объединения примарных слагаемых узлов $(F'_Q \times I, K'_Q), (F''_Q \times I, K''_Q)$, получающихся редукцией по Q. Будем называть такие пары колец исключительными.

Опишем два типа базисных контрпримеров. Пусть S – двумерная сфера и U, V, W – такие компактные ориентируемые поверхности, что край ∂U состоит из одной компоненты, а края ∂V, ∂W – из двух компонент каждый. Рассмотрим две окружности $p, q \subset S$, которые пересекаются в четырех точках. Выберем в S диск u и две пары дисков (v_1, v_2), (w_1, w_2) так, чтобы u лежал в одном из двух четырехугольников, составленных из дуг окружностей p, q, диски каждой пары лежали по одну сторону от каждой из этих окружностей, а диски различных пар – по разные стороны от каждой из них. Перестроим сферу S, вырезав из нее диск u, пару (v_1, v_2), пару (w_1, w_2) и вклеив вместо них поверхности U, V, W, соответственно. Получим поверхность F с двумя нетривиальными разбивающими окружностями p, q, см. рис. 2 слева. Справа показан частный случай этой конструкции, когда поверхность U– диск. В этом случае для построения поверхности F вырезать диск u и заменять его на диск U не нужно.

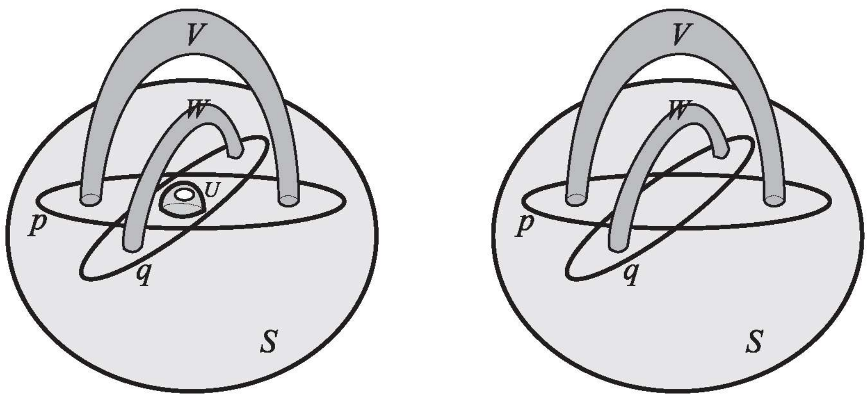


Рис. 2. Основание поверхности U лежит внутри четырехугольника, а основания поверхностей V, W – по разные стороны от каждой окружности

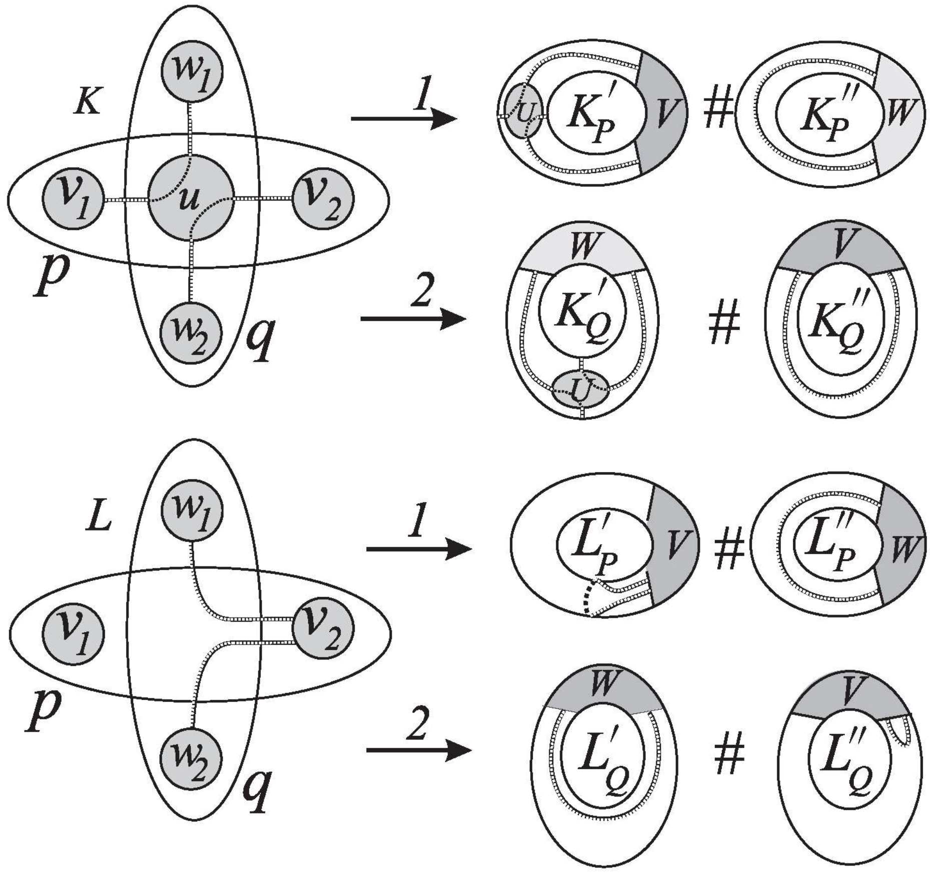


Рис. 3. Все слагаемые узла K различны, тогда как среди слагаемых узла L есть два совпадающих слагаемых – L''_P и L'_Q

Умножая F на отрезок, получим утолщенную поверхность $F \times I$ и два вертикальных кольца $P = p \times I, Q = q \times I$ в ней. Теперь построим узлы K, L так, как это изображено на рис. 3. Верхняя часть рисунка относится к общему случаю, когда поверхность U отлична от диска, нижняя – к частному случаю, когда U является диском и поэтому не использована при построении. Каждый из узлов пересекает каждое из колец P, Q в двух точках, причем его пересечение с каждым из многообразий $V \times I, W \times I$ состоит из одной дуги. Пересечение $K \cap (U \times I)$ должно состоять из двух дуг, возможно заузленных и зацепленных. Оба узла должны проходить по многообразиям $V \times I$, $W \times I$, а узел K – еще и по многообразию $U \times I$, достаточно сложным образом, чтобы все показанные справа слагаемые, которые получаются редукциями 1 и 2 по кольцам P и Q, были примарными и различными, кроме совпадающих слагаемых L''_P и L'_Q.

4. Доказательство основной теоремы

Приведенная в предыдущем разделе конструкция позволяет построить две серии базисных контрпримеров за счет варьирования как поверхностей U, V, W, так и поведения узлов в $U \times I, V \times I, W \times I$. Такие контрпримеры назовем модельными.

Теорема 2. *Любой базисный контрпример является модельным.*

Пусть $(F \times I, K)$ – произвольный базисный контрпример. Тогда в $F \times I$ найдется хотя бы одна пара исключительных колец. Среди всех таких пар выберем пару $P, Q \subset F \times I$, которая является минимальной в том смысле, что число $n = \#(P \cap Q)$ компонент связности пересечения $P \cap Q$ принимает наименьшее возможное значение. Напомним, что собственная дуга в кольце называется радиальной, если ее концы лежат на различных окружностях края кольца.

Лемма 1. *Если пара $P, Q \subset F \times I$ исключительных колец для узла $(F \times I, K)$ является минимальной, то $P \cap Q$ состоит из четырех радиальных отрезков.*

Доказательство. Связная компонента трансверсального пересечения двух допустимых колец может быть либо тривиальной или нетривиальной окружностью, либо тривиальной или нетривиальной (радиальной) дугой.

Шаг 1. Стандартная техника перестроек по самой внутренней тривиальной или самой внешней нетривиальной окружности, а также по самой внешней дуге, позволяет доказать, что в $P \cap Q$ нет ни окружностей, ни тривиальных дуг. Если бы такая окружность или дуга существовала, то одно из колец (пусть кольцо Q) можно было бы заменить на такое допустимое кольцо $Q' \subset F \times I$, что $\#(P \cap Q') < \#(P \cap Q)$ и $\#(Q \cap Q') = \emptyset$ (см. рис. 4) для случая самой внутренней окружности $C \subset P \cap Q$. Поскольку пара P, Q исключительна, то пара (P, Q') тоже является исключительной. Это противоречит минимальности пары P, Q. Подробности см. в [4, 5].

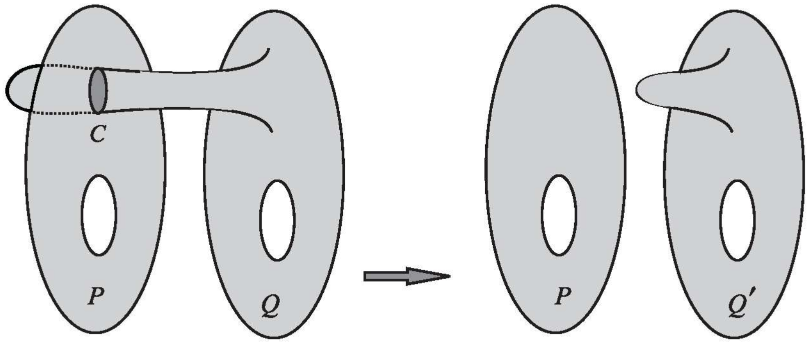


Рис. 4. Устранение тривиальной окружности

Предположим, что $P \cap Q$ состоит только из радиальных дуг. Тогда кольца имеют вид $P = p \times I, Q = q \times I$, где p и q – разбивающие простые замкнутые кривые в F. Поэтому про кольца можно временно забыть и оперировать только с кривыми в F, рассматривая вместо узла K его проекцию $\bar{K}$ на F. Так как кольца допустимы, то $\bar{K}$ пересекает каждую кривую ровно в двух точках.

Шаг 2. Допустим, что $p \cap q$ состоит из $n \geq 5$ точек. Они разбивают каждую окружность на n дуг. Поскольку $n \geq 5$, на каждой из окружностей (например, на p) найдется пара соседних дуг α, β, не пересекающих $\bar{K}$. Перестроив q по дуге α, получим объединение двух непересекающихся окружностей, которые обозначим q', q''. Затем перестроим $q' \cup q''$ по параллельной копии β' дуги β, соединяющей q' с q''. В результате получится такая нетривиальная разбивающая окружность $c \subset F$, что $c \cap \bar{K}$ состоит из двух точек и $\#(c \cap p) = n - 2 < 5$, $\#(c \cap q) = 4 < 5$, см. рис. 5. Поскольку пара P, Q исключительна, то одна из пар $(P, c \times I)$, $(Q, c \times I)$, тоже исключительна. Как и выше, это противоречит минимальности пары P, Q.

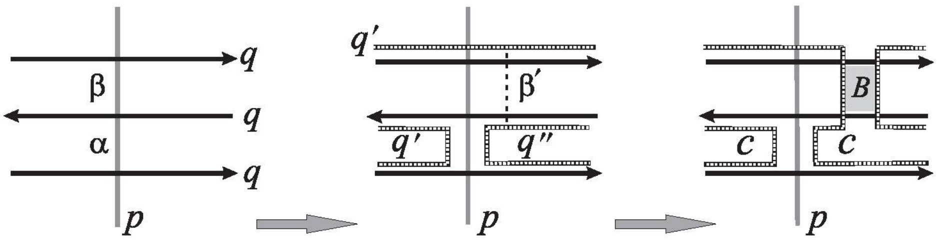


Рис. 5. Двойная перестройка по соседним дугам

Ниже нам понадобится следующее наблюдение: все четыре точки пересечения окружностей c и q расположены в вершинах четырехугольника B, который составлен из дуг этих окружностей и не пересекает проекции узла. На рис. 5 этот четырехугольник выделен.

Шаг 3. Так как окружности p, q разбивающие, то их пересечение состоит из четного числа точек. Нетрудно показать, что исключительных пар колец, пересекающихся по двум радиальным дугам, не бывает. Поэтому $n = 4$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $(F \times I, K)$ – произвольный базисный контрпример. Из леммы 1 следует, что в $F \times I$ найдется такая пара $P = p \times I, Q = q \times I$ исключительных колец, где p, q – окружности в F, что пересечения $P \cap Q$ и $p \cap q$ состоят из четырех радиальных дуг и из четырех точек, соответственно.

Допустим, что на окружностях p и q нет соседних дуг, не пересекающих узла. Тогда при обходе этих окружностей дуги, пересекающие и не пересекающие узел, чередуются. См. рис. 6a,b (других случаев чередования нет). Области B на рис. 6a,b и четырехугольная область на рис. 6b, к которой присоединена поверхность U, обязаны быть дисками, так как в противном случае рассматриваемые контрпримеры не были бы базисными. Нетрудно проверить, что редукции по окружностям p, q примера на рис. 6b дают одни и те же слагаемые, поэтому он не является базисным контрпримером. Отметим, что рис. 6a определяет первую серию модельных контрпримеров.

Теперь предположим, что на одной из окружностей p, q найдутся две соседние дуги α, β, не пересекающие проекции узла. Применяя прием двойной перестройки, мы получим новую пару исключительных колец, которые по-прежнему будем обозначать P, Q и представлять в виде $P = p \times I$,

$Q = q \times I$. Согласно приведенному выше наблюдению, четыре дуги окружностей p, q ограничивают четырехугольник B, стороны которого не пересекают проекции узла. Простой перебор показывает, что в этом случае $\bar{K}$ может пересекать оставшиеся четыре дуги окружностей p, q одним из трех способов, см. рис. 6a,c,d. Случай 6a уже рассмотрен, в случае 6c базисного контрпримера опять не получается, так как редукции по p, q дают одно и то же. Случай 6d сводится к случаю 6e путем замены кольца Q и окружности q на новое кольцо $Q' = q' \times I$ и новую окружность q', которая на рис. 6d показана пунктиром. При этом поверхность U присоединяется к поверхности V. Остается заметить, что рис. 6e определяет вторую серию модельных контрпримеров.

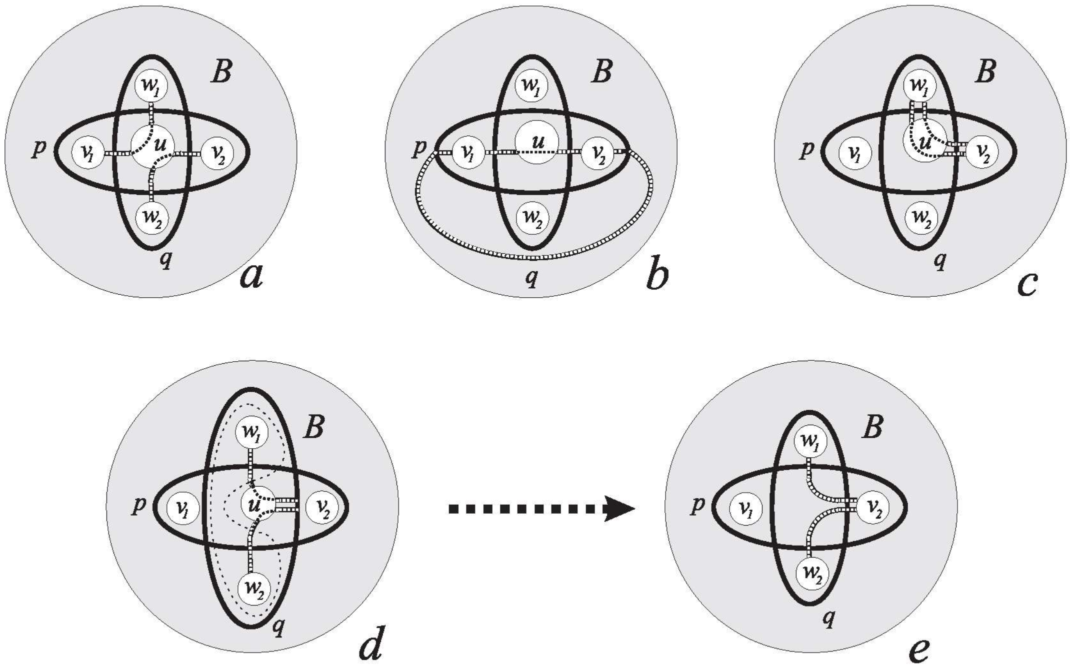


Рис. 6. Заготовки 6a и 6e порождают все базисные контрпримеры

Литература

[1] Schubert, H. *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten* / H. Schubert // S.B.-Heidelberger Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. – 1949. – Vol. 3. – P. 57 – 104.

[2] Матвеев, С. В. *Разложение гомологически тривиальных узлов в $F \times I$* / С. В. Матвеев // Доклады РАН. – 2010. – Том 433, № 1. – С. 13 – 15.

[3] Кораблев, Ф. Г. *Редукции узлов в расширенных поверхностях и виртуальные узлы* / Ф. Г. Кораблев, С. В. Матвеев // Доклады РАН. – 2011. – Том 437, No. 1. – С. 748 – 750.

[4] Hog-Angeloni, C. *Roots in 3-manifold topology* / C. Hog-Angeloni, S. Matveev // Geometry & Topology Monographs. – 2008. – Vol. 14. – P. 295 – 319.

[5] Кораблев, Ф. Г. *Единственность корней узлов в $F \times I$ и виртуальные узлы* / Ф. Г. Кораблев // Труды ИММ. – 2011. – Том 17, №4. – С. 1 – 18.

УДК 515.162.8

REIDEMEISTER MOVES FOR KNOTS AND LINKS IN LENS SPACES

Enrico Manfredi, Michele Mulazzani

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕЙДЕМЕЙСТЕРА ДЛЯ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ В ЛИНЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. Манфреди, М. Мулаццани

We extend the concept of diagrams and associated Reidemeister moves for links in $\mathbf{S}^3$ *to links in lens spaces, using a differential approach. As a particular case, we obtain diagrams and Reidemeister type moves for links in* $\mathbb{RP}^3$ *introduced by Y.V. Drobothukina.*

В данной работе понятия диаграммы и преобразований Рейдемейстера, известные для зацеплений в $\mathbf{S}^3$*, распространяются для зацеплений в линзовых пространствах. В частности, получены диаграммы и преобразования типа Рейдемейстера для зацеплений в* $\mathbb{RP}^3$*, введенные ранее Ю.В. Дроботухиной.*

Ключевые слова: преобразования Рейдемейстера, линзовые пространства, трехмерные многообразия.

Keywords: Reidemeister moves, lens spaces, 3-manifolds.

1. Preliminaries

In this paper we work in the *Diff* category (of smooth manifolds and smooth maps). Every result also holds in the *PL* category, and in the *Top* category if we consider only tame links.

Definition 1. Let X and Y be two smooth manifolds.

A smooth map $f : X \to Y$ is an *embedding* if the differential $d_x f$ is injective for all $x \in X$ and if X and $f(X)$ are homeomorphic. As a consequence, X and $f(X)$ are diffeomorphic and $f(X)$ is a submanifold of Y.

An *ambient isotopy* between two embeddings l_0 and l_1 from X to Y is a smooth map $H : Y \times [0,1] \to Y$ such that, if we write at each $t \in [0,1]$, $H(y,t) = h_t(y)$, then $h_t : Y \to Y$ is a diffeomorphism, $h_0 = \mathrm{Id}_Y$ and $l_1 = h_1 \circ l_0$.

Definition 2. (Links) A *link* in a closed 3-manifold M^3 is an embedding of ν copies of $\mathbf{S}^1$ into M^3, namely it is $l : \mathbf{S}^1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{S}^1 \to M^3$. A link can also be denoted by L, where $L = l(\mathbf{S}^1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{S}^1) \subset M^3$. A *knot* is a link with $\nu = 1$.

Two links L_0 and L_1 are *equivalent* if there exists an ambient isotopy between the two embeddings l_0 and l_1.

Definition 3. (Lens spaces) Let p and q be two integer numbers such that $\gcd(p,q) = 1$ and $0 \leqslant q < p$. Consider $B^3 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1\}$ and let E_+ and E_- be respectively the upper and the lower closed hemisphere of ∂B^3. Call B^2_0 the equatorial disk, defined by the intersection of the plane $x_3 = 0$ with B^3. Label with N and S respectively the Tnorth poleУ $(0,0,1)$ and the Tsouth poleУ $(0,0,-1)$ of B^3.

Let $g_{p,q} : E_+ \to E_+$ be the rotation of $2\pi q/p$ around the x_3 axis as in Figure 1, and let $f_3 : E_+ \to E_-$ be the reflection with respect to the plane $x_3 = 0$. The *lens space* $L(p,q)$ is the quotient of B^3 by the equivalence relation on ∂B^3 which identify $x \in E_+$ with $f_3 \circ g_{p,q}(x) \in E_-$. We denote by $F : B^3 \to B^3/\sim$ the quotient map. Notice that on the equator $\partial B^2_0 = E_+ \cap E_-$ there are p points in each class of equivalence.

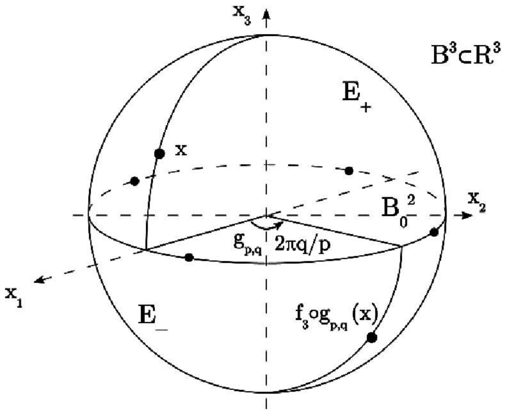


Fig. 1. Representation of $L(p,q)$

It is easy to see that $L(1,0) \cong \mathbf{S}^3$ since $g_{1,0} = \mathrm{Id}_{E_+}$. Furthermore, $L(2,1)$ is $\mathbb{RP}^3$, since we obtain the usual model of the projective space where opposite points of the boundary of the ball are identified.

Proposition 4. [1] *The lens spaces* $L(p,q)$ *and* $L(p',q')$ *are diffeomorphic (as well as homeomorphic) if and only if* $p' = p$ *and* $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \mathrm{mod}\, p$.

2. Links in $\mathbf{S}^3$

2.1. Diagrams

One of the first tools used to study links in $\mathbf{S}^3$ are diagrams, that is to say, a suitable projection of the links on a plane.

Definition 5. Let L be a link in $\mathbf{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Since L is compact, up to an affine transformation of $\mathbb{R}^3$, we can suppose that L belongs to $\mathrm{int}B^3$.

Let $\mathbf{p} : B^3 \setminus \{N, S\} \to B_0^2$ be the projection defined in the following way: take $x \in B^3 \setminus \{N, S\}$, construct the circle (or the line) $c(x)$ through N, x and S and set $\mathbf{p}(x) := c(x) \cap B_0^2$.

Take $L \subset \text{int}B^3$ and project it using $\mathbf{p}_{|L} : L \to B_0^2$. For $P \in \mathbf{p}(L)$, $\mathbf{p}_{|L}^{-1}(P)$ may contain more than one point; in this case, we say that P is a *multiple point*. In particular, if it contains exactly two points, we say that P is a *double point*. We can assume, by moving L via a small isotopy, that the projection $\mathbf{p}_{|L} : L \to B_0^2$ of L is *regular*, namely:

1. the arcs of the projection contain no cusps;
2. the arcs of the projection are not tangent to each other;
3. the set of multiple points is finite, and all of them are actually double points.

These requests correspond to violations represented in Figure 2.

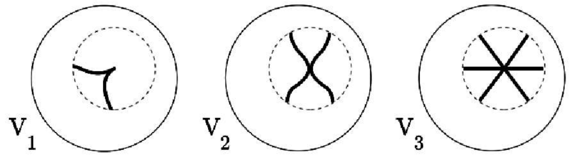


Fig. 2. Violations V_1, V_2 and V_3

Now let Q be a double point and consider $\mathbf{p}_{|L}^{-1}(Q) = \{P_1, P_2\}$. We suppose that P_2 is nearer to S than P_1. Take U as an open neighborhood of P_2 in L such that $\mathbf{p}(\overline{U})$ does not contain other double points. We call U *underpass*. Take the complementary set in L of all the underpasses. Every connected component of this set (as well as its projection in B_0^2) is called *overpass*. The underpasses are visualized in the projection by removing U from L' before projecting the link (see Figure 3). Observe that we may have components of the link which are single overpasses.

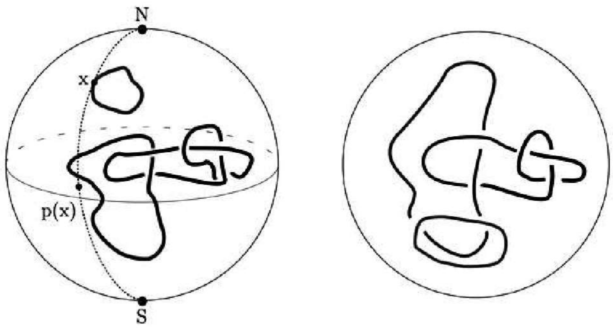


Fig. 3. A link in S^3 and corresponding diagram

Definition 6. A *diagram* of a link L in $\mathbf{S}^3$ is a regular projection of L on the equatorial disk B_0^2, with specified overpasses and underpasses.

2.2. Reidemeister moves

There are three (local) moves that allow us to determine when two links in $\mathbf{S}^3$ are equivalent from their diagrams. Reidemeister proved this theorem for *PL* links. For the *Diff* case a good reference is [7], where the proof involves links in arbitrary dimensions, so it is rather complicated.

Definition 7. The *Reidemeister moves* on a diagram of a link $L \subset \mathbf{S}^3$ are the moves R_1, R_2, R_3 of Figure 4.

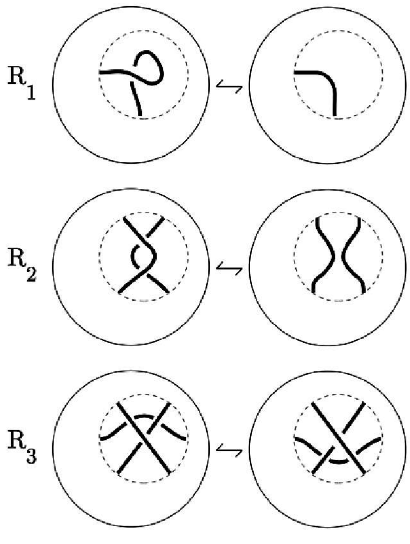


Fig. 4. Reidemeister moves

Theorem 8. [7] *Two links L_0 and L_1 in $\mathbf{S}^3$ are equivalent if and only if their diagrams can be joined by a finite sequence of Reidemeister moves R_1, R_2, R_3 and diagram isotopies.*

Proof. It is easy to see that each Reidemeister move produces equivalent links, hence a finite sequence of Reidemeister moves and isotopies on a diagram does not change the equivalence class of the link.

On the other hand, if we have two equivalent links L_0 and L_1, then we have an ambient isotopy, namely: $H : \mathbf{S}^3 \times [0,1] \to \mathbf{S}^3$, such that $l_1 = h_1 \circ l_0$. At each $t \in [0,1]$ we have a link L_t, defined by $h_t(l_0)$. Thanks to general position theory (see [7] for details), we can assume that the projection of L_t is not regular only a finite number of times, and that at each of these times it violates only one condition.

From each type of violation a transformation of the diagram appears, that is to say, a Reidemeister move, as it follows (see Figure 5):

– from violation V_1 we obtain move R_1;
– from violation V_2 we obtain move R_2;
– from violation V_3 we obtain move R_3.

So diagrams of two equivalent links can be joined by a finite sequence of Reidemeister moves R_1, R_2, R_3 and diagram isotopies. □

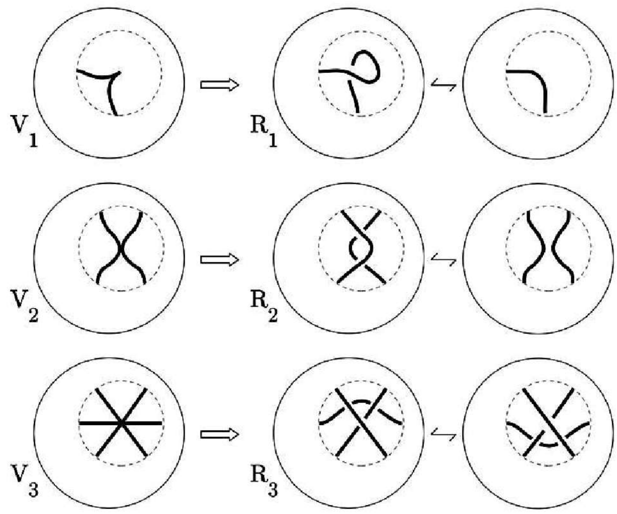


Fig. 5. Regularity violations produce Reidemeister moves

3. Links in $\mathbb{RP}^3$

3.1. Diagrams

The definition given by Drobothukina [3] of diagram for links in the projective space makes use of the model of the projective space $\mathbb{RP}^3$ explained in Section 1, as a particular case of $L(p,q)$ with $p = 2$ and $q = 1$. Namely, consider B^3 and identify diametrically opposed points on its boundary (let $\sim$ be the equivalence relation), so $\mathbb{RP}^3 \cong B^3/\sim$ and the quotient map is denoted by F.

Definition 9. Let L be a link in $\mathbb{RP}^3$. Consider $L' := F^{-1}(L)$; by moving L via a small isotopy in $\mathbb{RP}^3$, we can suppose that:

i) L' does not meet the poles S and N of B^3;

ii) $L' \cap \partial B^3$ consists of a finite set of points.

So L' is the disjoint union of closed curves in $\text{int}B^3$ and arcs properly embedded in B^3 (i.e. only the boundary points belong to ∂B^3).

Let $\mathbf{p} : B^3 \smallsetminus \{N,S\} \to B_0^2$ be the projection defined in the following way: take $x \in B^3 \smallsetminus \{N,S\}$, construct the circle (or the line) $c(x)$ through N, x and S and set $\mathbf{p}(x) := c(x) \cap B_0^2$.

Take L' and project it using $\mathbf{p}_{|L'} : L' \to B_0^2$. For $P \in \mathbf{p}(L')$, $\mathbf{p}_{|L'}^{-1}(P)$ may contain more than one point; in this case, we say that P is a *multiple point*. In particular, if it contains exactly two points, we say that P is a *double point*. We can assume, by moving L via small isotopies, that the projection $\mathbf{p}(L')$ is *regular*, namely:

1) the arcs of the projection contain no cusps;

2) the arcs of the projection are not tangent to each other;

3) the set of multiple points is finite, and all of them are actually double points;

4) the arcs of the projection are not tangent to ∂B_0^2;

5) no double point is on ∂B_0^2.

These requests correspond to violations represented in Figures 2 and 6.

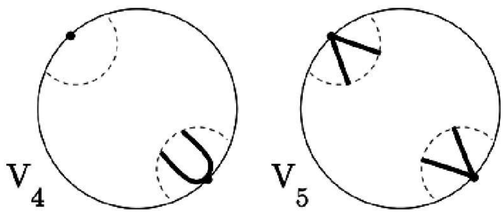


Fig. 6. Violations V_4 and V_5

Now let Q be a double point and consider $\mathbf{p}_{|L'}^{-1}(Q) = \{P_1, P_2\}$. We suppose that P_2 is nearer to S than P_1. Take U as an open neighborhood of P_2 in L' such that $\mathbf{p}(\overline{U})$ does not contain other double points and does not meet ∂B_0^2. We call U *underpass.* Take the complementary set in L' of all the underpasses. Every connected component of this set (as well as its projection in B_0^2) is called *overpass.* The underpasses are visualized in the projection by removing U from L' before projecting the link (see Figure 7).

Definition 10. A *diagram* of a link L in $\mathbb{RP}^3$ is a regular projection of $L' = F^{-1}(L)$ on the equatorial disk B_0^2, with specified overpasses and underpasses.

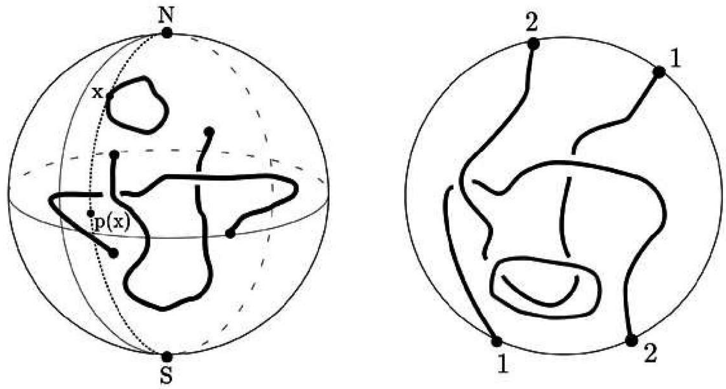


Fig. 7. A link in $L(2, 1)$ and corresponding diagram

We label the boundary points of the link projection, in order to show the identifications. Assume that the equator is oriented counterclockwise if we look at it from N, and that the number of boundary points is $2t$. Choose a point of $\mathbf{p}(L')$ on the equator and call it 1 as well as the antipodal point, then following the orientation of ∂B_0^2, label the points of $\mathbf{p}(L')$ on the equatorial circle, as well as the antipodal ones, $2, \ldots, t$ (see Figure 7).

3.2. Generalized Reidemeister moves

We want to look for an analogue of the Reidemeister moves for links in $\mathbf{S}^3$, in order to understand when two diagrams of links in $\mathbb{RP}^3$ represent equivalent links.

Definition 11. The *generalized Reidemeister moves* on a diagram of a link $L \subset \mathbb{RP}^3$ are the moves R_1, R_2, R_3 of Figure 4 and the moves R_4, R_5 of Figure 8.

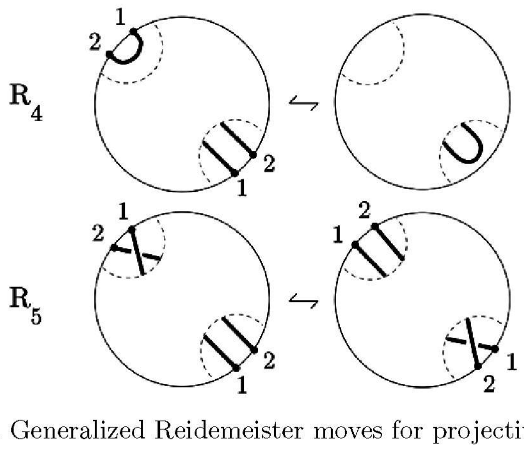


Fig. 8. Generalized Reidemeister moves for projective space

Theorem 12. [3] *Two links L_0 and L_1 in the the projective space are equivalent if and only if their diagrams can be joined by a finite sequence of generalized Reidemeister moves $R_1, \ldots, R_5$ and diagram isotopies.*

Proof. It is easy to see that each Reidemeister move produces equivalent links, hence a finite sequence of Reidemeister moves and isotopies on a diagram does not change the equivalence class of the link.

On the other hand, if we have two equivalent links L_0 and L_1, then we have an ambient isotopy, namely: $H : \mathbb{RP}^3 \times [0,1] \to \mathbb{RP}^3$, such that $l_1 = h_1 \circ l_0$. At each $t \in [0,1]$ we have a link L_t, defined by $h_t(l_0)$. As for links in $\mathbf{S}^3$, using general position theory we can assume that the projection of L_t is not regular only a finite number of times, and that at each of these times it violates only one condition.

From each type of violation a transformation of the diagram appears, that is to say, a generalized Reidemeister move, as it follows (see Figures 5 and 9).

So diagrams of two equivalent links can be joined by a finite sequence of generalized Reidemeister moves $R_1, \ldots, R_5$ and diagram isotopies. □

– from violations V_1, V_2 and V_3 we obtain the classic Reidemeister moves R_1, R_2 and R_3;
– from violation V_4 we obtain move R_4;
– from violation V_5 we obtain move R_5.

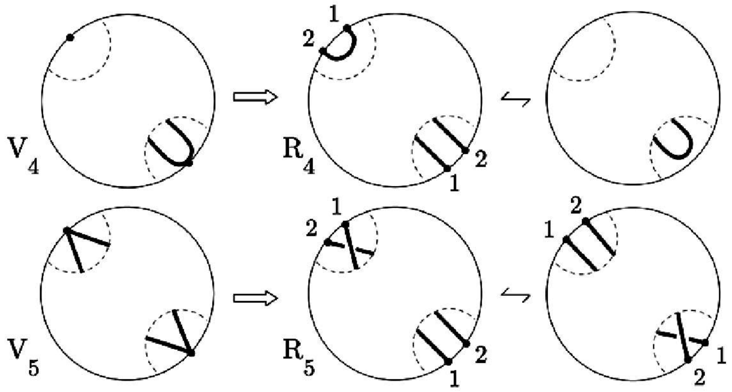


Fig. 9. Regularity violations produce generalized Reidemeister moves

4. Links in $L(p,q)$

4.1. Diagrams

We improve the definition of diagram for links in lens spaces given by Gonzato [4]. We can assume $p > 2$, since we have already seen in the previous sections the particular cases $L(1,0) \cong \mathbf{S}^3$ and $L(2,1) \cong \mathbb{RP}^3$. Consider the construction of the lens space $L(p,q) = B^3/\sim$ we give in the preliminaries, where F is the quotient map.

Definition 13. Let L be a link in $L(p,q)$. Consider $L' := F^{-1}(L)$; by moving L via a small isotopy in $L(p,q)$, we can suppose that:

i) L' does not meet the poles S and N of B^3;

ii) $L' \cap \partial B^3$ consists of a finite set of points.

So L' is the disjoint union of closed curves in $\text{int}B^3$ and arcs properly embedded in B^3 (i.e. only the boundary points belong to ∂B^3).

Let $\mathbf{p} : B^3 \smallsetminus \{N,S\} \to B^2_0$ be the projection defined in the following way: take $x \in B^3 \smallsetminus \{N,S\}$, construct the circle (or the line) $c(x)$ through N, x and S and set $\mathbf{p}(x) := c(x) \cap B^2_0$.

Take L' and project it using $\mathbf{p}_{|L'} : L' \to B^2_0$. For $P \in \mathbf{p}(L')$, $\mathbf{p}^{-1}_{|L'}(P)$ may contain more than one point; in this case, we say that P is a *multiple point*. In particular, if it contains exactly two points, we say that P is a *double point*. We can assume, by moving L via a small isotopy, that the projection $\mathbf{p}_{|L'} : L' \to B^2_0$ of L is *regular*, namely:

1) the arcs of the projection contain no cusps;

2) the arcs of the projection are not tangent to each other;

3) the set of multiple points is finite, and all of them are actually double points;

4) the arcs of the projection are not tangent to ∂B^2_0;

5) no double point is on ∂B^2_0;

6) $L' \cap \partial B^2_0 = \emptyset$.

Now let Q be a double point and consider $\mathbf{p}^{-1}_{|L'}(Q) = \{P_1, P_2\}$. We suppose that P_2 is nearer to S than P_1. Take U as an open neighborhood of P_2 in L' such that $\mathbf{p}(\overline{U})$ does not contain other double points and does not meet ∂B^2_0. We call U *underpass*. Take the complementary set in L' of all the underpasses. Every connected component of this set (as well as its projection in B^2_0) is called *overpass*. The underpasses are visualized in the projection by removing U from L' before projecting the link (see Figure 10).

Definition 14. A *diagram* of a link L in $L(p,q)$ is a regular projection of $L' = F^{-1}(L)$ on the equatorial disk B^2_0, with specified overpasses and underpasses.

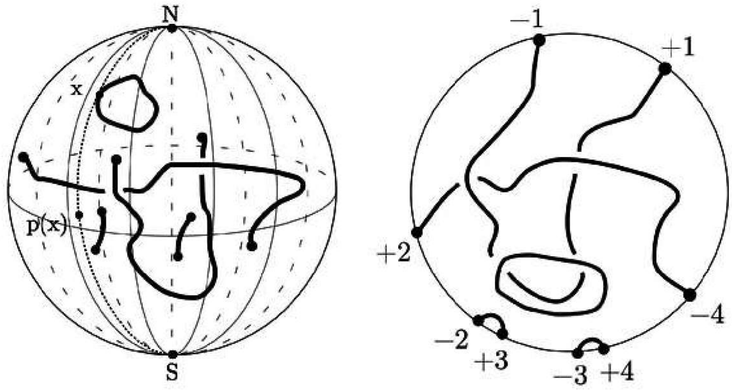


Fig. 10. A link in $L(9,1)$ and corresponding diagram

We label the boundary points of the link projection, in order to show the identifications. Assume that the equator is oriented counterclockwise if we look at it from N. Consider the t endpoints of the overpasses that come from arcs of L' that are above the equator. Label them $+1,\ldots,+t$ according to the orientation of ∂B_0^2. Then label the other t points on the boundary, that come from arcs of L' under the equator, as $-1,\ldots,-t$, where for each $i=1,\ldots,t$, we have $+i \sim -i$. An example is shown in Figure 10.

We want to explain which diagram violations arise from condition 1)-6). For conditions 1), 2) and 3) we already know that the corresponding violations are V_1, V_2 and V_3 of Figure 2.

Condition 4), as in the projective case, has a corresponding violation V_4. On the contrary, condition 5) does not behave as in the projective case. Indeed two diagrammatic violations arise from it (V_5 and V_6), as Figure 11 shows. The difference between the two violations is that V_5 involves two arcs of L' that end in the same hemisphere of ∂B^3, on the contrary V_6 involves arcs that end in different hemispheres.

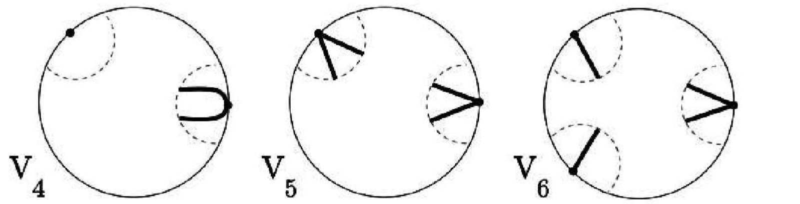


Fig. 11. Violations V_4, V_5 and V_6

Finally condition 6) produces a family of violations called $V_{7,1},\ldots,$
$V_{7,p-1}$ (see Figure 12). The difference between them is that $V_{7,1}$ has the arcs of the projection identified directly by $g_{p,q}$, while $V_{7,k}$ has the arcs identified by $g_{p,q}^k$, for $k=2,\ldots,p-1$.

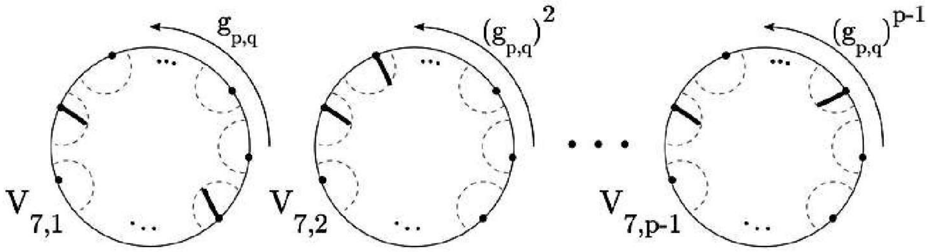


Fig. 12.Violations $V_{7,1}, V_{7,2},\ldots,V_{7,p-1}$

It is easy to see what kind of small isotopy on L is necessary, in order to make the projection of the link regular when we deal with violations $V_1,\ldots,V_6$. Now we explain how the link can avoid to meet ∂B_0^2 up to isotopy, that is to say, avoid $V_{7,1},\ldots,V_{7,p-1}$.

We start with a link with two arcs that ends on ∂B_0^2. If we suppose that the endpoints of the arcs are connected by $g_{p,q}$, (a $V_{7,1}$ violation), then we can label the endpoints B and C, in a way such that $C=g_{p,q}(B)$. In this case the required isotopy is the one that lift up a bit the arc ending in B and lower down the other one.

Now if we suppose that the endpoints of the arcs are connected by a power of $g_{p,q}$, (a $V_{7,k}$ violation with $k > 1$), then we can label the points B and C such that $C = g_{p,q}^k(B)$. In this case the required isotopy is similar to the one of the example in $L(9,1)$ of Figure 13. In lens spaces with $q \neq 1$, the new arcs end in the faces specified by the map $f_3 \circ g_{p,q}$.

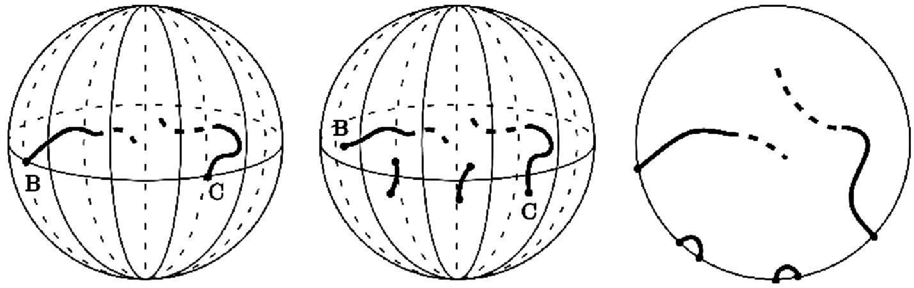


Fig. 13.Avoiding ∂B_0^2 in $L(9,1)$

4.2. Generalized Reidemeister moves

Again, with the aim of discovering when two diagrams represent equivalent links in $L(p,q)$, we generalize Reidemeister moves for diagrams of links.

Definition 15. The *generalized Reidemeister moves* on a diagram of a link $L \subset L(p,q)$ are the moves R_1, R_2, R_3 of Figure 4 and the moves R_4, R_5, R_6 and R_7 of Figure 14.

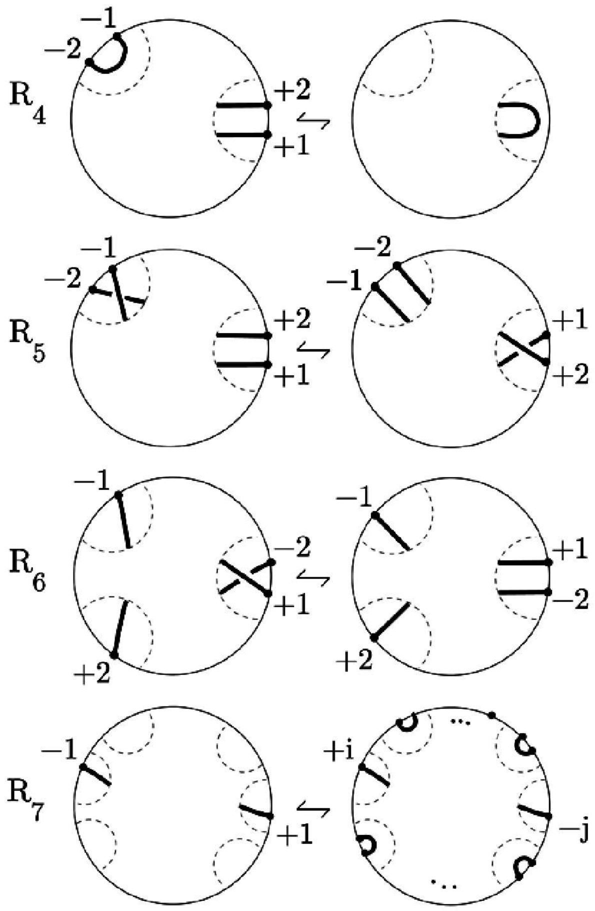


Fig. 14. Generalized Reidemeister moves

Theorem 16. *Two links L_0 and L_1 in $L(p,q)$ are equivalent if and only if their diagrams can be joined by a finite sequence of generalized Reidemeister moves $R_1, \ldots, R_7$ and diagram isotopies.*

Proof. It is easy to see that each Reidemeister move produces equivalent links, hence a finite sequence of Reidemeister moves and isotopies on a diagram does not change the equivalence class of the link.

On the other hand, if we have two equivalent links L_0 and L_1, then we have an ambient isotopy between the two ambient spaces, namely: $H : L(p,q) \times [0,1] \to L(p,q)$. At each $t \in [0,1]$ we have a link L_t, defined by $h_t(l_0)$. Again, as for links in $\mathbf{S}^3$, using general position theory we can assume that the projection $\mathbf{p}(L_t')$ is not regular only a finite number of times, and that at each of these times it violates only one condition.

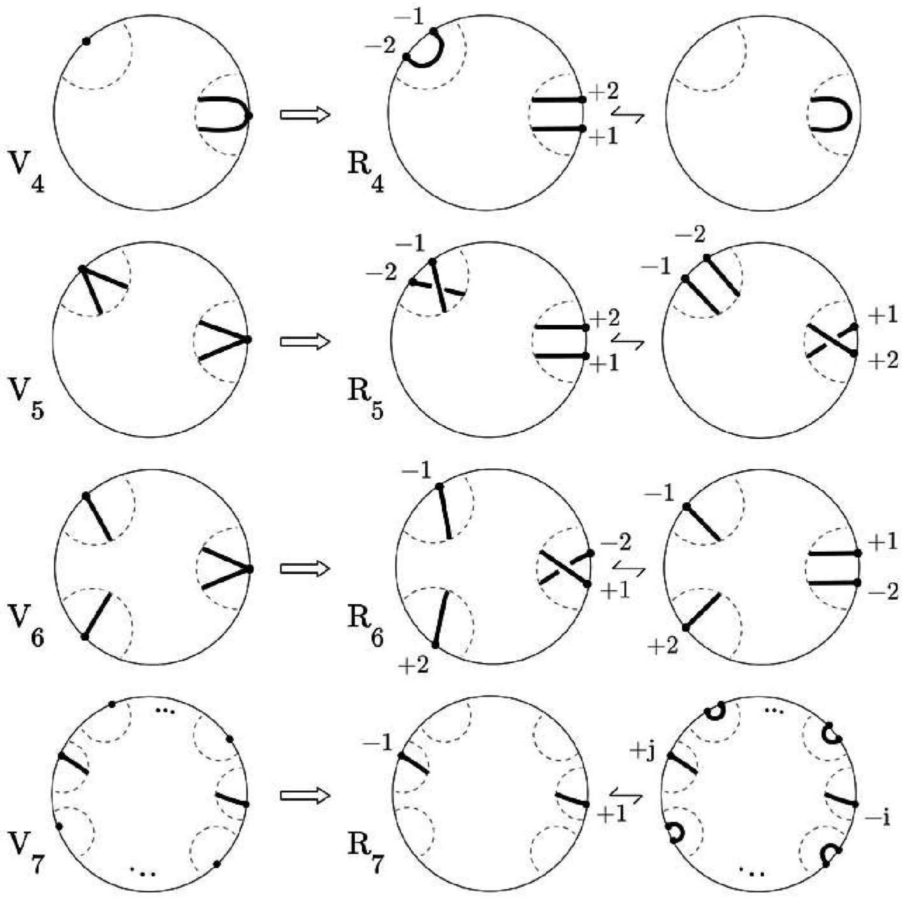


Fig. 15. Regularity violations produce generalized Reidemeister moves

From each type of violation a transformation of the diagram appears, that is to say, a generalized Reidemeister move, as it follows (see Figures 5 and 15):

- from violations V_1, V_2 and V_3 we obtain the classic Reidemeister moves R_1, R_2 and R_3;
- from violation V_4 we obtain move R_4;
- from violation V_5, we obtain two different moves, if the arcs L' with endpoints on the boundary are from the same side with respect to equator, then we obtain R_5, on the contrary we obtain R_6;
- for condition 6 we have a family of violation $V_{7,1}, \dots, V_{7,p-1}$, from which we obtain the moves $R_{7,1}, \dots, R_{7,p-1}$.

Indeed, if an arc cross the equator during the isotopy, then we have a class of moves, $R_{7,1} = R_7, R_{7,2}, \dots, R_{7,p-1}$. All these moves can be seen as the composition of R_7, R_6, R_4 and R_1 moves. More precisely, the move $R_{7,k}$ with $k = 2, \dots, p-1$, can be obtained by the following sequence of moves: first we perform an R_7 move on one overpass that end on the equator and the corresponding point in a small arc, then we repeat for $k-1$ times the three moves R_6-R_4-R_1 necessary to retract the small arc with same sign ending point (see an example in Figure 16).

So we can exclude $R_{7,2}, \dots, R_{7,p-1}$ from the move set and keep only $R_{7,1} = R_7$. As a consequence, any pair of diagrams of two equivalent links can be joined by a finite sequence of generalized Reidemeister moves $R_1, \dots, R_7$ and diagram isotopies. □

References

[1] Brody, E. J. *The topological classification of the lens spaces* / E. J. Brody // Ann. of Math. – 1960. – Vol. **71**. – P. 163 – 184.

[2] Burde, G. *Knots* / G. Burde, H. Zieschang – Walter de Gruyter. – Berlin; New York, 2003.

[3] Drobotukhina, Y. V. *An analogue of the Jones polynomial for links in* $\mathbb{RP}^3$ *and a generalization of the Kauffman-Murasugi theorem* / Y. V. Drobotukhina // Leningrad Math. J. – 1991. – Vol. **2**. – P. 613 – 630.

[4] Gonzato, M. *Invarianti polinomiali per link in spazi lenticolari*/ M. Gonzato // Degree thesis. – University of Bologna, 2007.

[5] Manfredi, E. *Fundamental group of knots and links in lens spaces*/ E. Manfredi // Degree thesis. – University of Trieste, 2010.

[6] Prasolov, V. V. *Knots, links, braids and 3-manifolds. An introduction to the new invariants in low-dimensional topology*/ V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky // Transl. of Math. Monographs. – Vol. **154**. – Amer. Math. Soc.: Providence, RI, 1997.

[7] Roseman, D. *Elementary moves for higher dimensional knots* / D. Roseman // Fund. Math. – 2004. – Vol. **184**. – P. 291 – 310.

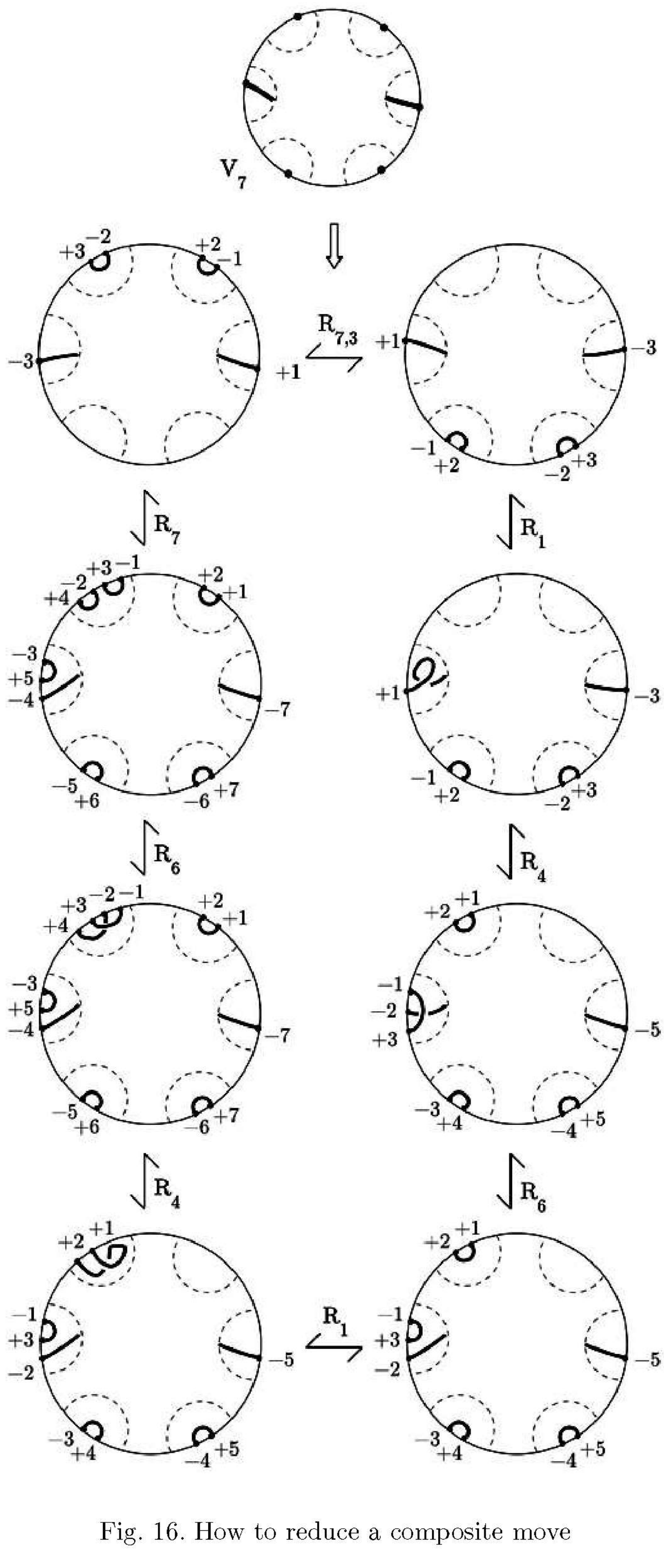


Fig. 16. How to reduce a composite move

УДК 513.83

ЗНАЧЕНИЯ t-ИНВАРИАНТА ДЛЯ САПФИРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М. А. Овчинников

VALUES OF THE t-INVARIANT FOR THE SAPPHIRE MANIFOLDS

M. A. Ovchinnikov

t-Инвариант трехмерных многообразий – это в некотором смысле существенная часть инварианта Тураева-Виро, соответствующего корню 5-й степени из 1. В работе получена формула для вычисления значений t-инварианта многообразий, образованных из двух ориентируемых утолщенных бутылок Клейна отождествлением их торических краев. Формула имеет вид функции от 4 целых чисел – элементов матрицы, задающей отождествление торов.

The t-invariant of 3-manifolds is an essential part of the Turaev-Viro invariant corresponding to the 5-th root of unity. Sapphire manifolds are result of pasting two orientable thickened Klein bottles along their boundaries. The manifold is defined by a 2×2 matrix of the pasting. A formula for values of the t-invariant is given in the work. The formula is a function on the matrix four elements.

Ключевые слова: трехмерные многообразия, квантовые инварианты, инварианты Тураева-Виро.

Keywords: 3-manifolds, quantum invariants, Turaev-Viro invariants.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение

Двумерный полиэдр P, лежащий в компактном трехмерном многообразии M, называется *спайном* многообразия M, если дополнение к полиэдру в многообразии является прямым произведением края многообразия на полуинтервал или открытым трехмерным шаром. Двумерный полиэдр называется *простым*, если каждая его точка имеет линк вида окружность, либо окружность с диаметром, либо окружность с 3 радиусами. Точки последнего типа называются *вершинами полиэдра*. Спайн *простой*, если он является простым полиэдром. Множество всех простых подполиэдров полиэдра P, включая сам полиэдр P и пустое подмножество, обозначаем $\mathcal{S}(P)$.

t-инвариант 3-многообразия M определяется формулой ([2]):

$$t(M) = \sum_{Q \in \mathcal{S}(P)} (-\varepsilon)^{-v(Q)} \varepsilon^{\chi(Q)},$$

где P – произвольный фиксированный простой спайн многообразия M, $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v(Q)$ – число вершин полиэдра Q, а $\chi(Q)$ – эйлерова характеристика полиэдра Q.

Свойство инвариантности состоит в том, что значение, даваемое этой формулой, не зависит от выбора простого спайна данного многообразия ([2]).

Известна формула для линзовых пространств ([2]):

$$t(L_{p,q}) = \begin{cases} 1, & p = \pm 1 \mod 5 \\ \varepsilon + 1, & p = \pm 2 \mod 5 \\ \varepsilon + 2, & p = 0 \mod 5, q = \pm 1 \mod 5 \\ 0, & p = 0 \mod 5, q = \pm 2 \mod 5 \end{cases}$$

Эта формула показывает, что зависимость значения t-инварианта от параметров линзы весьма простая. В то же время эта формула дает некоторую дополнительную информацию по сравнению с первой группой гомологий линзы. В данной работе выводится формула для нахождения значений t-инварианта для многообразий, полученных склейкой двух экземпляров ориентируемого косого произведения бутылки Клейна на отрезок $K\tilde{\times}I$. Такие многообразия исследовались в [3]. В этой работе они назывались сапфировыми многообразиями.

Край многообразия $K\tilde{\times}I$ является тором. Поскольку отождествление торов задается целочисленной матрицей порядка два, то четыре целых числа – элементы невырожденной матрицы порядка два – можно рассматривать как параметры для этой серии многообразий. Для определенности необходимо выбрать координаты на торических краях склеиваемых многообазий.

Фиксируем координаты в крае многообразия $K\tilde{\times}I$ следующим образом. Первая координатная кривая на торическом крае проектируется в кривую на бутылке Клейна, разрезающую ее до кольца. Образ второй кривой разрезает бутылку на две ленты Мебиуса.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – невырожденная целочисленная матрица, и s_1, s_2, s_1', s_2' – координатные окружности на двух торах. Тогда равенства $s_1 = as_1' + cs_2'$, $s_2 = bs_1' + ds_2'$ определяют отождествление данных торов посредством матрицы A.

Теорема 1. *Пусть M_A обозначает результат склейки двух экземпляров многообразия $K\tilde{\times}I$ посредством матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*

Тогда значение t-инварианта многообразия M_A равно линейной комбинации значений t-инварианта нескольких линз, определяемых матрицей A:

$$t(M_A) = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{10} k_i t(L_{p_i,q_i}),$$

где 10 троек чисел (k_i, p_i, q_i) – это $(4, b, a)$, $(2, a-b, b)$, $(2, b+d, a+c)$, $(2, 2b+d, 2a+c)$, $(2, a-2b, b)$, $(1, a+c-b-d, b+d)$, $(1, a+c-2b-2d, b+d)$, $(1, 2a+c-2b-d, 2b+d)$, $(1, 2a+c-4b-2d, 2b+d)$, $(-10, 2, 1)$.

Выражение t-инварианта для этих многообразий через значения инварианта некоторых линз оказалось экономнее, чем формула, дающая зависимость значения инварианта непосредственно через значения параметров a, b, c, d – непосредственная формула получается весьма сложной и громоздкой.

Перебор случаев показал, что формула дает 22 различных значений t-инварианта.

2. Идея доказательства

Мы используем некоторое свойство t-инварианта, которое позволяет значение инварианта представить как произведение матриц, вычисляемых по кускам, из которых спайн определенным образом склеен. Если речь идет об одном многообразии (спайне), то такой путь не выглядит сколько-нибудь экономным. Другое дело, если исследовать значения инварианта для бесконечной серии многообразий, которые получаются различными склейками одних и тех же многообразий с краем (полиэдров). На этом пути быстро обнаруживаются возможности для получения формул для бесконечных серий многообразий.

3. Элементарные полиэдры и построение спайнов из них

Опишем нужный нам полиэдр, лежащий в $K\tilde{\times}I$. Это – бутылка Клейна K, к которой приклеено своим основанием прямое произведение $\theta\times I$ тэта-кривой (тэта-кривая – это граф с двумя вершинами и соединяющими их тремя ребрами) на отрезок. Два ребра из трех ребер основания составляют окружность, разрезающую бутылку Клейна на две ленты Мебиуса. Третье ребро основания приклеено вдоль пути с концами на этой окружности и пересекающей окружность еще в одной точке, так что полученный граф разбивает бутылку Клейна на два пятиугольника. Обозначим этот полиэдр буквой N (от слова neighbourhood – окрестность, т. к. N – это замкнутая окрестность бутылки Клейна в полиэдре). Полиэдр N лежит в $K\tilde{\times}I$ собственным образом, т. е. второй край прямого произведения $\theta\times I$ лежит в крае $K\tilde{\times}I$. Дополнение к бутылке Клейна в многообразии $K\tilde{\times}I$ – прямое произведение тора на полуинтервал. Разрезание тора края по тэта-кривой дает шестиугольник, значит дополнение к полиэдру N в многообразии $\mathrm{Int}K\tilde{\times}I$ является открытым трехмерным шаром, примыкающим к открытому диску в крае, дополнительному к тэта-кривой.

Для обеспечения различных склеек двух экземпляров полиэдра N мы используем полиэдры-связки. Полиэдр J – это проективная плоскость с двумя дырами, к которой приклеены два полукруга своими диаметрами вдоль собственных неразбивающих дуг, пересекающихся в одной точке и имеющих концы на крае одной – своей для каждой дуги – дыры. Заметим, что двулистное накрытие проективной плоскости с двумя дырами является сферой с 4 дырами. Наши две дуги – это образы двух дуг на сфере, которые соединяют по две дыры на сфере и тем самым превращают ее в кольцо. Полудиски полиэдра J индуцируют по два полудиска, примыкающих к краям указанного кольца и оставляющих его кольцом. Приклеивая по итоговому кольцу полный цилиндр своей боковой поверхностью, получаем описание вложения полиэдра J в утолщенный тор $T^2\times I$.

Для описания склеек нумеруем ребра на краях полиэдров цифрами 1, 2, 3. Фиксируем следующий выбор нумерации. У полиэдра N номер 1 – у ребра, противоположному "пути". Номер 2 – у ребра, противоположного той части "окружности", которая пересекается с "путем". Номер 3 – у ребра, противоположного той части "окружности", которая с "путем" не пересекается. У полиэдра J край состоит из двух тэта-кривых. В каждой тэта-кривой края номера 1 и 2 – у ребер, составляющих край дыры, причем ребра с номером 1 разных тэта-кривых входят в край одного из двух многоугольников, на которые проективная плоскость с двумя дырами разбивается диаметрами полукругов. Край второго многоугольника содержит ребра с номером 2. Края полукругов содержат ребра с номером 3.

Еще два элементарных полиэдра – это полиэдры вида $\theta\times I$, которые склеены из трех прямоугольников, со специальной нумерацией ребер краев. Первый такой полиэдр мы будем обозначать (23). В его краях два ребра с номером 1 входят в край одного прямоугольника, а два ребра с номером 2 (как и 3) входят в края разных прямоугольников. Аналогично определяется полиэдр (13). Очевидно, последовательно склеивая копии полиэдров (23) и (13) можно получить полиэдр вида $\theta\times I$, у которого разметка ребер соответствует любой наперед заданной перестановке из трех элементов.

Для полноты охвата возможностей следовало бы задать и разметку (нумерацию) вершин тэта-кривых, т. е. ориентацию ребер тэта-кривых. Но из-за симметрий элементарных полиэдров и тех полиэдров, которые мы из них строим, варьирование ориентаций ребер в склейках не меняет результат склеек.

Оказывается, любое сапфирово многообразие можно склеить из двух экземпляров многообразия $K\tilde{\times}I$ с полиэдром N внутри и нескольких подходящих утолщенных торов с полиэдрами J, (23) и (13) внутри с совмещением тэта-кривых краев полиэдров. При этом полиэдры склеиваются в простой полиэдр. Дополнительные шары к полиэдрам в склеиваемых многообразиям последовательно склеиваются по открытым дискам в открытый трехмерный шар – дополнение к суммарному простому полиэдру. Значит, полученный простой полиэдр является простым спайном сапфирова многообразия.

В ходе доказательства теоремы используется элементарный полиэдр E, который представляет собой ленту Мебиуса, к которой по неразбивающему собственному отрезку приклеен полукруг своим диаметром. Ребра, составляющие край ленты Мебиуса, имеют номера 1 и 2. Ребро края, принадлежащее полукругу, имеет номер 3.

4. t-инвариант для полиэдров с краем

Двумерный полиэдр называется *простым с краем*, если каждая его точка имеет линк вида окружность, либо окружность с диаметром, либо окружность с 3 радиусами, либо интервал, либо три интервала с общим концом. Множество точек последних двух типов называется *краем полиэдра* P и обозначается ∂P.

Граф называем *простым*, если он имеет вершины только степени три. Пустое множество также считаем простым графом. Очевидно, край простого полиэдра с краем (который может отсутствовать) является простым графом. Множество всех простых подпграфов графа G, включая сам граф G и пустое подмножество, обозначаем $\mathcal{S}(G)$. Множество простых подполиэдров с краем в полиэдре с краем P

Пусть P – произвольный простой полиэдр с краем, граф $\mathcal{S}(\partial P)$. Множество простых подполиэдров с краем в полиэдре с краем P с выделенным в его крае простым графом G таких, что край простого подполиэдра совпадает с графом G, обозначается $\mathcal{S}(\partial P, G)$.Тогда паре полиэдр и граф в его крае соответствует значение t-инварианта согласно формуле:

$$t(P,G) = \sum_{Q\in\mathcal{S}(\partial P)} (-\varepsilon)^{-v(Q)}\varepsilon^{\chi(\mathrm{IntQ})+\frac{1}{2}\chi(\partial\mathrm{Q})},$$

где $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v(Q)$ – число вершин полиэдра Q, $\chi(Q)$ – эйлерова характеристика полиэдра Q.

Мы используем то же название инварианта, поскольку в случае пустого края значение этого инварианта совпадает со значением t-инварианта, определенного во введении, т. е. $t(P,\emptyset) = t(P)$, если $\partial P = \emptyset$.

5. Матрицы значений t-инварианта для элементарных полиэдров

Для тэта-кривой θ множество простых подграфов $\mathcal{S}(\theta)$ насчитывает 5 элементов: пустой, сам граф, три подграфа, гомеоморфных окружности. Матрица из значений t-инварианта полиэдра с краем тэта-кривая зависит от порядка, выбранного в множестве $\mathcal{S}(\theta)$. Используя пронумерованность ребер тэта-кривой, фиксируем следуюший порядок в этом множестве: $\emptyset$, $\theta\backslash\{1\}$, $\theta\backslash\{2\}$, $\theta\backslash\{3\}$, θ.

Простейшим из элементарных полиэдров с одной тэта-кривой на краю является полиэдр E. По определению, вычисления для него оказываются самыми минимальными:

$$t(E) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^T.$$

Полиэдр N тоже имеет одну тэта-кривую на краю. Для него уже вычисления несколько больше, но совсем незначительно:

$$t(N) = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-\frac{5}{2}}\end{pmatrix}^T.$$

Если полиэдр имеет край, состоящий из двух тэта-кривых, то его значения t-инварианта составляют уже квадратную матрицу размера 5×5. Особенно простыми получатся матрицы для элементарных полиэдров (23) и (13).

$$t(23) = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$t(13) = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Чуть посложнее получается матрица для полиэдра J.

$$t(J) = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\varepsilon^{-1}&\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\\0&0&0&\varepsilon^{-\frac{1}{2}}&-\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}.$$

6. Реализация автоморфизмов тора с помощью элементарных полиэдров

В [6] показано, что элементарные полиэдры (23), (13) и J с пронумерованными ребрами определяют автоморфизмы тора, соответствующие матрицам соответственно:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Любую невырожденную матрицу порядка два можно выразить через эти три матрицы и тем самым найти последовательную склейку элементарных полиэдров, реализующую автоморфизм тора, описываемый заданной матрицей склейки.

Матрица t-инвариантов для найденной последовательной склейки элементарных полиэдров равна произведению их матриц t-инвариантов. В [5] показано, что матрицы t-инвариантов элементарных полиэдров порождают конечную группу матриц из 120 элементов. Этот факт сразу влечет, что число различных значений t-инварианта для многообразий, получаемых из двух многообразий отождествлением по одному тору в крае, не более 120.

В [5] также показано, что домножение вектора $t(E)$ на эти 120 матриц дает всего 12 различных векторов, которые в [5] приведены. А различных скалярных произведений между этими 12 векторами всего четыре. Геометрически этим скалярным произведениям соответствуют склейки двух экземпляров полиэдра E и нескольких элементарных полиэдров вида (23), (13) и J. Нетрудно убедиться, что любой такой полиэдр является простым спайном линзы, и для любой линзы такой спайн можно построить. На этом пути получается формула для t-инвариантов линз.

7. Уточнение координат и модификация полиэдра N

Правило для превращения тэта-кривой с пронумерованными ребрами в букет координатных окружностей: ребра 1 и 2 ориентировать так, чтобы они имели общее начало, и затем ребро 3 стянуть в точку.

Оказывается, край полиэдра N дает первую кривую с лишней скруткой вдоль второй кривой. Для избежания этого эффекта модифицируем полиэдр N следующим образом. Приклеим к краю N последовательно элементарные полиэдры (23) и J. Полученный полиэдр обозначим N_1. Его t-инарианты легко вычисляются умножением матриц.

$$t(N_1) = t(J)t(23)t(N) =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & 2\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}^T .$$

Отметим, что полиэдр N_1 также лежит внутри $K\tilde{\times}I$ собственным образом.

8. Доказательство теоремы

Приведем из [5] все те 12 векторов, которые являются векторами t-инвариантов для всевозможных полиэдров E с несколькими приклеенными элементарными полиэдрами вида (23),(13) и J. Несложноми вычислениями легко убедиться, что умножение этих векторов на матрицы $t(23)$, $t(13)$, $t(J)$ дает опять эти векторы.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\varepsilon\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\\varepsilon\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\varepsilon\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\\varepsilon^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\\varepsilon^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\\varepsilon^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\-\varepsilon^{-1}\\1\\\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\varepsilon^{-1}\\1\\1\\\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-\varepsilon^{-1}\\\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}.$$

Эти векторы имеют естественную характеристику в виде пары чисел – коэффициенты выражения координатных петель через ось полнотория (ленты Мебиуса в полиэдре E) как гомологических циклов по модулю 5. Эти числа будем называть *параметрами* векторов. Векторы имеют следующие параметры, соответственно: $\pm(1,1)$, $\pm(0,1)$, $\pm(1,0)$, $\pm(2,1)$, $\pm(1,2)$, $\pm(1,-1)$, $\pm(2,-1)$, $\pm(1,-2)$, $\pm(2,-2)$, $\pm(0,2)$, $\pm(2,0)$, $\pm(2,2)$. Неоднозначность знаков освязана с тем, что ориентация осевой окружности не фиксирована. Векторы будем обозначать $V_{a,b}$, где a, b – параметры вектора с точностью до одновременной смены знаков.

Ниже мы воспользуемся следующим фактом о линзах. Пусть на краях двух полных торов выбраны букеты координатных окружностей. Склейка полных торов полностью определяется совмещением координатных окружностей. Если известны выражения координатных окружностей через оси полных торов как гомологических циклов, то как определить параметры линзы ? Параметр p равен определителю матрицы из упомянутых степеней. А для параметра q укажем алгоритм нахождения. Если степени относительно одного полнотория записаны в строку, то применяем сложение-вычитание столбцов. Так как степени необходимо взаимно просты, то можно добиться в – допустим, верхней – строке чисел 1, 0. Тогда число под единицей – искомое q (а под нулем – определитель p).

Склейка любой пары таких полиэдров является спайном какой-то линзы. А скалярное произведение соответствующих векторов является значением t-инварианта этой линзы. (На этом пути выводится формула для t-инвариантов линз.)

Представим вектор $t(N_1)$ как линейную комбинацию трех векторов, соответствующих параметрам (1,0), (1,1) и (2,1), и еще некоторого вектора.

$$t(N_1)=\begin{pmatrix}2\\3\\-\varepsilon^{-1}\\\varepsilon^{-2}\\2\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}=-(\varepsilon+\varepsilon^{-1})\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}+$$

$$+\varepsilon(2\begin{pmatrix}1\\\varepsilon\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\varepsilon\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\\varepsilon^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}).$$

Слагаемые в этом разложении замечательно ведут себя при умножении на матрицы $t(23)$, $t(13)$, $t(J)$. Первое слагаемое не меняется, а остальные превращаются в какие-то из 12 векторов. Отсюда следует возможность получить искомое значение t-инварианта как линейную комбинацию t-инвариантов некоторых линз и некоторого добавка. Остается проследить за результатом этого подхода.

Обозначая вектор в первом слагаемом V_0, найденное разложение запишем кратко:

$$t(N_1)=-(\varepsilon+\varepsilon^{-1})V_0+\varepsilon(2V_{1,0}+V_{1,1}+V_{2,1}).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в выполнении следующих свойств:

$$t(J)V_{a,b}=V_{a,-b},$$
$$t(23)V_{a,b}=V_{a-b,-b},$$
$$t(J)t(23)V_{a,b}=V_{a-b,b},$$
$$t(23)t(J)V_{a,b}=V_{a+b,b},$$
$$t(13)V_{a,b}=V_{-a,-a+b},$$
$$t(J)t(13)V_{a,b}=V_{-a,a-b},$$
$$t(13)t(J)V_{a,b}=V_{-a,-a-b}=V_{a,a+b}.$$

Отсюда следует, что если размеченный полиэдр Q_A, склеенный из элементарных полиэдров, реализует матрицу A, то $t(Q_A)V_{a,b}=V_{(a,b)A^{-1}}$.

В силу симметрии A и A^{-1} дают одно и то же сапфировое многообразие. Это мы тоже используем. Пусть $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Тогда

$$t(N_1)^Tt(Q_A)t(N_1)=(-(\varepsilon+\varepsilon^{-1})V_0+2\varepsilon(V_{1,0}+V_{1,1}+V_{2,1})^T$$

$$(-(\varepsilon+\varepsilon^{-1})V_0+2\varepsilon(V_{a,b}+V_{a+c,b+d}+V_{2a+c,2b+d})=...$$

Учитывая, что $(\varepsilon+\varepsilon^{-1})^2=5$, $V_0V_{u,v}=2+\varepsilon=\varepsilon\sqrt{5}$, и алгоритм определения параметров линзы, продолжаем выкладки.

$$...=-10\varepsilon^4+\varepsilon^2(2V_{1,0}+V_{1,1}+V_{2,1})^T(2V_{a,b}+V_{a+c,b+d}+V_{2a+c,2b+d})=$$
$$=-10\varepsilon^4+\varepsilon^2(4V_{1,0}^TV_{a,b}+2V_{1,0}^TV_{a+c,b+d}+2V_{1,0}^TV_{2a+c,2b+d}+2V_{1,1}^TV_{a,b}+$$
$$+V_{1,1}^TV_{a+c,b+d}+V_{1,1}^TV_{2a+c,2b+d}+2V_{2,1}^TV_{a,b}+V_{2,1}^TV_{a+c,b+d}+V_{2,1}^TV_{2a+c,2b+d})=$$
$$=-10\varepsilon^4+\varepsilon^2(4t(L_{b,a})+2t(L_{b+d,a+c})+2t(L_{2b+d,2a+c})+2t(L_{a-b,b})+$$
$$+t(L_{a-b+c-d,b+d})+t(L_{2a-2b+c-d,2b+d})+2t(L_{a-2b,b})+t(L_{a-2b+c-2d,b+d})+t(L_{2a-4b+c-2d,2b+d}))=$$
$$=\varepsilon^2(-10t(L_{2,1})+4t(L_{b,a})+2t(L_{b+d,a+c})+2t(L_{2b+d,2a+c})+2t(L_{a-b,b})+$$
$$+t(L_{a-b+c-d,b+d})+t(L_{2a-2b+c-d,2b+d})+2t(L_{a-2b,b})+t(L_{a-2b+c-2d,b+d})+t(L_{2a-4b+c-2d,2b+d})).$$

Доказательство окончено.

9. О связях t-инварианта с топологическими квантовыми теориями поля

Формально t-инвариант определяется довольно просто и без каких-либо ссылок на инварианты Тураева-Виро и какие-либо топологические квантовые теории поля (ТКТП). Его замечательное свойство, позволяющее многообразиям с краем сопоставлять матричные инварианты, согласованные умножением, доказывается столь же просто. Хотя t-инвариант значительно менее информативен, чем первая группа гомологий, последней t-инвариант не перекрывается.

Существует связь t-инварианта с одним из инвариантов Тураева-Виро, а тем самым и с соответствующей ТКТП. Эта связь делает t-инвариант и его матричную версию не столь самостоятельными и независимыми. С одной стороны, можно говорить, что это всего лишь частный случай из огромного числа родственных и многих более мощных инвариантов. А с другой,– разбираясь с загадочным поведением этого простого и "бедного" инварианта, мы можем рассчитывать и на прояснение поведения родственных ему инвариантов.

Где тут, собственно, ТКТП? Если многообразия с краем с кусками спайнов внутри и с выделенными графами рассматривать не как инструмент для вычислений значения t-инвариантов многообразий, а рассматривать как самостоятельный объект для изучения, то это и будет изучением соответствующей ТКТП. Смысл таких объектов весьма неочевиден. По крайней мере, видно, что множество таких объектов гораздо более обширно, чем многообразий без этих дополнительных структур. А для большинства аналогичных инвариантов соответствующие ТКТП имеют дело с еще более необозримыми множествами объектов. Здесь t-инвариант оказывается интересным как пример, позволяющий входить в тематику ТКТП ценой сравнительно небольших вычислений.

Литература

[1] Turaev, V. G. *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols* / V. G. Turaev, O. Y. Viro // Topology. — 1992. – Vol.31. – P. 865 – 902.

[2] Матвеев, С. В. *Построение и свойства t-инварианта* / С. В. Матвеев, М. А. Овчинников, М. В. Соколов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2000. – Vol.267. – P. 207 – 219.

[3] Morimoto, K. *Some orientable 3-manifolds containing Klein Bottles* / K. Morimoto // Kobe J. Math. — 1985. – Vol.2. – P. 37 – 44.

[4] Овчинников, М. А. *Построение простых спайнов многообразий Вальдхаузена* / М. А. Овчинников // Труды Международной конференции “Маломерная топология и комбинаторная теория групп. Челябинск 1999“. – Киев: Институт математики, 2000. – P. 65 – 86.

[5] Ovchinnikov, M. A. *Values of the t-invariant for small Seifert manifolds* / M. A. Ovchinnikov // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Preprint. arXiv:math.GT/0806.2073, свободный.

[6] Овчинников, М. А. *Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем* / М. А. Овчинников // Математические заметки. — 1999. – Vol.66,4. – P. 533 – 540.

УДК 515.162

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ, СКЛЕЕННЫХ ИЗ ДВУХ МНОГООБРАЗИЙ ЗЕЙФЕРТА С БАЗОЙ ДИСК И ДВУМЯ ОСОБЫМИ СЛОЯМИ

Е. А. Фоминых

UPPER BOUNDS OF COMPLEXITY FOR GRAPH-MANIFOLDS OBTAINED BY GLUING TOGETHER TWO SEIFERT MANIFOLDS FIBERED OVER THE DISC WITH TWO EXCEPTIONAL FIBERS

E. A. Fominykh

В работе доказана формула, позволяющая вычислять верхние оценки сложности граф-многообразий, склеенных из двух многообразий Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями.

We prove a formula for an upper bound of complexity of graph-manifolds obtained by gluing together two Seifert manifolds fibered over the disc with two exceptional fibers.

Ключевые слова: трехмерные многообразия, сложность.

Keywords: 3-manifolds, complexity.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-C-1-1007).

1. Введение

Пусть M — компактное трехмерное многообразие. Напомним [1], что подполиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M, если либо $\partial M \neq \emptyset$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$, либо $\partial M = \emptyset$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно открытому шару. Спайн P называется *почти простым*, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф K_4 с четырьмя вершинами. Точки, линки которых гомеоморфны графу K_4, называются *истинными вершинами* спайна P. *Сложность* $c(M)$ многообразия M определяется как минимальное возможное число истинных вершин почти простого спайна многообразия.

Задача вычисления сложности трехмерных многообразий является весьма трудной. В настоящее время точные значения сложности известны только для табличных многообразий [2] и для нескольких бесконечных серий многообразий [3–7]. Поэтому проблема построения "потенциально точных" верхних оценок сложности довольно актуальна. Важные результаты в этом направлении были получены в работах [8–12]. В данной работе доказана формула, анонсированная в [13], позволяющая вычислять потенциально точные верхние оценки сложности граф-многообразий, склеенных из двух многообразий Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями.

2. Верхние оценки сложности

Будем говорить, что замкнутое ориентируемое граф-многообразие принадлежит классу Λ тогда и только тогда, когда JSJ-разбиение этого многообразия состоит из двух многообразий Зейферта с базой диск D^2 и двумя особыми слоями каждое. Пусть G — множество всех целочисленных матриц порядка 2 с определителем -1. Многообразия класса Λ удобно задавать *меченными молекулами* вида (M_1, M_2, A), где

$$\begin{gathered} M_1 = (D^2, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (1, t_1)), \\ M_2 = (D^2, (p_3, q_3), (p_4, q_4), (1, t_2)), \\ A \in G, \end{gathered}$$

(p_i, q_i) — пары взаимно простых целых чисел, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. Известно, что меченная молекула (M_1, M_2, A) полностью определяет некоторое многообразие $M \in \Lambda$ следующим образом. Рассмотрим две копии N_1^2, N_2^2 двумерного диска D^2 с двумя удаленными открытыми дисками. Граничные окружности этих поверхностей обозначим через c_1, c_2, c' и c_3, c_4, c'' соотвественно. Ориентируем поверхности N_1^2, N_2^2 и многообразия $N_1^2 \times S^1$, $N_2^2 \times S^1$. На каждом торе $T_i = c_i \times S^1$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, выберем систему координат, состоящую из ориентированных меридиана $\mu_i = c_i \times \{*\}$ и параллели $\lambda_i = \{*\} \times S^1$. Ориентация меридиана индуцирована ориентацией соответствующей ему поверхности N_j^2; параллель ориентируем так, чтобы вместе с внутренней нормалью к тору T_i меридиан и параллель давали выбранную ориентацию многообразия $N_j^2 \times S^1$. Аналогичным образом выберем системы координат μ', λ' и μ'', λ'', соответственно на торе $T' = c' \times S^1$ и торе $T'' = c'' \times S^1$. Наконец, заменим две последние системы координат на системы $\mu'(\lambda')^{t_1}, \lambda'$ и $\mu''(\lambda'')^{t_2}, \lambda''$. Итак, мы задали системы координат на граничных торах многообразий $N_1^2 \times S^1$, $N_2^2 \times S^1$. Дальнейшее построение разбивается на два шага. На первом шаге мы получаем многообразия M_1 и M_2, приклеивая к $N_1^2 \times S^1$ и $N_2^2 \times S^1$ полные торы $V_i = D_i^2 \times S^1$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, по гомеоморфизмам $h_i : \partial V_i \to T_i$, каждый из которых переводит меридиан $\partial D_i^2 \times \{*\}$ полного тора V_i в кривую типа (p_i, q_i). На втором шаге мы получаем многообразие M, склеивая между собой многообразия M_1 и M_2 по гомеоморфизму $\varphi : T' \to T''$, задаваемому матрицей A.

Будем говорить, что меченная молекула (M_1, M_2, A) многообразия класса Λ *приведена*, если $t_1 = t_2 = -1$ и параметры (p_i, q_i) особых слоев удовлетворяют условию $p_i > q_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Известно, что граф-многообразие не меняется при следующих операциях над меченной молекулой:

X_1) перенумерация особых слоев одного атома;

X_2) удаление или вставка неособого слоя атома типа $(1, 0)$;

X_3) замена двух пар параметров (p_i, q_i), (p_j, q_j), $i \neq j$, слоев одного атома на пары $(p_i, q_i + p_i)$, $(p_j, q_j - p_j)$;

X_4) замена матрицы A, отвечающей выходящему из атома ребру, и пары параметров (p_i, q_i) слоя этого же атома на матрицу $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\varepsilon}$ и пару $(p_i, q_i + \varepsilon p_i)$, где $\varepsilon = \pm 1$;

X_5) замена матрицы A, отвечающей входящему в атом ребру, и пары параметров (p_i, q_i) слоя этого же атома на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\varepsilon} \cdot A$ и пару $(p_i, q_i + \varepsilon p_i)$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Несложно показать, что операций X_1 – X_5 достаточно для преобразования произвольной меченной молекулы многообразия класса Λ в приведенную молекулу этого же многообразия.

Пусть $S(p, q)$ — сумма всех неполных частных в разложении числа p/q в непрерывную дробь, где p, q — натуральные числа. Каждой матрице $A \in G$ сопоставим число

$$\xi(A) = S(|a| + |b|, |c| + |d|).$$

Следующая теорема представляет основной результат статьи.

Теорема. *Пусть* (M_1, M_2, A) *— приведенная меченная молекула многообразия* $M \in \Lambda$. *Тогда*

$$c(M) \leqslant \max\{\xi(A) - 2, 0\} - 2 + \sum_{i=1}^{4} S(p_i, q_i).$$

3. Построение спайнов

3.1. Простые относительные спайны

Тэта-кривой $\theta \subset T$ на двумерном торе T будем называть граф, гомеоморфный окружности с диаметром, дополнение $T \setminus \theta$ к которому есть открытый диск. Обозначим через $\Theta(T)$ множество всех тэта-кривых на T. Хорошо известно, что произвольную тэта-кривую на торе можно преобразовать в любую другую тэта-кривую при помощи изотопии и так называемых *флип-преобразований* (см. рис. 1).

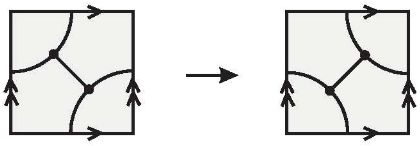


Рис. 1. Флип-преобразование

Пусть M — компактное ориентируемое трехмерное многообразие с фиксированным графом $\Gamma \subset \partial M$. Граф Γ будем называть *узором* на крае многообразия M. Обозначим через $\mathcal{T}$ класс всех таких многообразий (M, Γ), у которых каждая компонента T края ∂M является двумерным тором, а $T \cap \Gamma$ есть тэта-кривая.

Подполиэдр $P \subset M$ называется *относительным спайном* многообразия $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$, если выполнены три условия:

1. $M \setminus P$ есть открытый шар.
2. $\partial M \subset P$.
3. $\partial M \cap Cl(P \setminus \partial M) = \Gamma$.

Относительный спайн P называется *простым*, если линк каждой точки $x \in P$ гомеоморфен либо окружности (такая точка x называется *неособой*), либо окружности с диаметром (такая точка x называется *тройной* точкой), либо графу K_4.

Кратко напомним три примера простых относительных спайнов многообразий класса $\mathcal{T}$, построенных в [14]. Оказывается [15], с их помощью можно построить простой спайн любого замкнутого граф-многообразия.

Пример 1. Пусть V — полноторие с фиксированным меридианом μ. Выберем простую замкнутую кривую ℓ на ∂V, дважды пересекающую μ в одном и том же направлении. Заметим, что ℓ разбивает μ на две дуги. Рассмотрим тэта-кривую $\theta_V \subset \partial V$, состоящую из кривой ℓ и одной из дуг меридиана μ. Тогда многообразие (V, θ_V) имеет простой относительный спайн без внутренних истинных вершин, образованный вложенным в полноторие V листом Мёбиуса и частью меридионального диска, ограниченного меридианом μ (рис. 2a).

Пример 2. Пусть θ_1, θ_2 — такие тэта-кривые на торе T, что θ_2 получается из θ_1 одним флип-преобразованием. Тогда многообразие

$$(T \times [0,1], (\theta_1 \times \{0\}) \cup (\theta_2 \times \{1\}))$$

имеет простой относительный спайн P с одной внутренней истинной вершиной (на рисунке 2(b) тор T представлен в виде квадрата с отождествленными сторонами). Заметим, что P удовлетворяет следующим условиям:

- для каждого $t \in [0, 1/2)$ тэта-кривая θ_t, где $P \cap (T \times \{t\}) = \theta_t \times \{t\}$, изотопна θ_1;
- для каждого $t \in (1/2, 1]$ тэта-кривая θ_t изотопна θ_2;
- $P \cap (T \times \{1/2\})$ есть букет двух окружностей.

Пример 3. Пусть N^2 — диск с двумя удаленными открытыми дисками. Выберем в N^2 произвольную внутреннюю точку и соединим ее дугой с каждой компонентой края ∂N^2 так, чтобы эти дуги не имели общих внутренних точек. Построенный букет трех отрезков обозначим через Y. В многообразии $N^2 \times S^1$ рассмотрим полиэдр P, являющийся объединением $\partial(N^2 \times S^1)$, $N^2 \times \{*\}$ и $Y \times S^1$. При этом удобно считать, что объединение $(N^2 \times \{*\}) \cup (Y \times S^1)$ получается приклейкой $Y \times [0,1]$ к $N^2 \times \{*\}$ посредством отображения $\phi : (Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) \to N^2 \times \{*\}$. К сожалению, полиэдр P не является простым. Это легко исправить, меняя приклеивающее отображение ϕ так, чтобы образы букетов $Y \times \{0\}$ и $Y \times \{1\}$ пересекались в точке, лежащей внутри их ребер (рис. 2(c)). Тогда новый полиэдр P является простым относительным спайном с тремя внутренними истинными вершинами многообразия $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$, где $M = N^2 \times S^1$ и $\Gamma = \partial M \cap Cl(P \setminus \partial M)$.

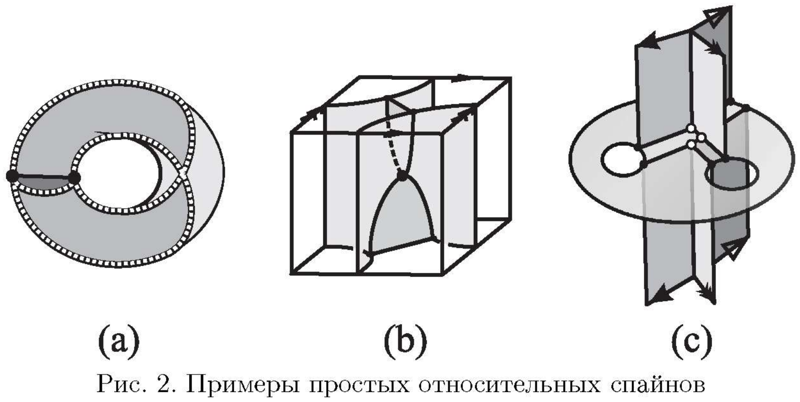


Рис. 2. Примеры простых относительных спайнов

3.2. Операция сборки

Пусть (M, Γ) и (M', Γ') — два многообразия из множества $\mathcal{T}$ с непустыми краями и простыми относительными спайнами P и P'. Выберем два тора $T \subseteq \partial M$, $T' \subseteq \partial M'$ и гомеоморфизм $\varphi : T \to T'$, переводящий тэта-кривую $\theta = T \cap \Gamma$ в тэта-кривую $\theta' = T' \cap \Gamma'$. Тогда можно построить новое многообразие $(W, \Delta) \in \mathcal{T}$, где $W = M \cup_\varphi M'$ и $\Delta = (\Gamma \setminus \theta) \cup (\Gamma' \setminus \theta')$. Простой относительный спайн многообразия (W, Δ) получается склейкой спайна P со спайном P' при помощи гомеоморфизма φ и удалением из объединения $P \cup_\varphi P'$ открытого диска, являющегося отождествлением диска $T \setminus \theta$ с диском $T' \setminus \theta'$. Будем говорить, что многообразие (W, Δ) получается *сборкой* многообразий (M, Γ) и (M', Γ').

Известно, что операции сборки достаточно для построения простого относительного спайна многообразия (W, Δ) в общем случае, когда тэта-кривые $\varphi(\theta)$ и θ' не изотопны. Введем на множестве $\Theta(T)$ всех тэта-кривых на торе T функцию расстояния d полагая, что для данных тэта-кривых $\theta, \theta' \in \Theta(T)$ число $d(\theta, \theta')$ равно наименьшему числу флип-преобразований необходимых для перехода от θ к θ'.

Лемма 1 [11, лемма 6]. *Пусть (M, Γ) и (M', Γ') — два многообразия из множества $\mathcal{T}$ с непустыми краями, имеющие простые относительные спайны с v и v' внутренними истинными вершинами. Пусть $\varphi : T \to T'$ — такой гомеоморфизм тора $T \subseteq \partial M$ на тор $T' \subseteq \partial M'$, что тэта-кривые $\varphi(\theta)$ и θ', где $\theta = T \cap \Gamma$ и $\theta' = T' \cap \Gamma'$, не изотопны. Тогда многообразие (W, Δ), где $W = M \cup_\varphi M'$ и $\Delta = (\Gamma \setminus \theta) \cup (\Gamma' \setminus \theta')$, имеет простой относительный спайн с $v + v' + d(\varphi(\theta), \theta')$ внутренними истинными вершинами.*

4. Вычисление расстояний между тэта-кривыми

Для вычисления расстояния d между тэта-кривыми на торе мы будем использовать классическую идеальную триангуляцию Фарея $\mathbb{F}$ гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$. В качестве модели плоскости $\mathbb{H}^2$ рассмотрим верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченную абсолютом $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Множество вершин триангуляции $\mathbb{F}$ состоит из точек $\mathbb{Q} \cup \{1/0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$, где $1/0 = \infty$. При этом две вершины $a/c, b/d$ соединены ребром (геодезической в $\mathbb{H}^2$) тогда и только тогда, когда $ad - bc = \pm 1$. Для удобства изображения на рисунке 3 приведен образ гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ и триангуляции $\mathbb{F}$ при отображении $z \to (z - i)/(z + i)$.

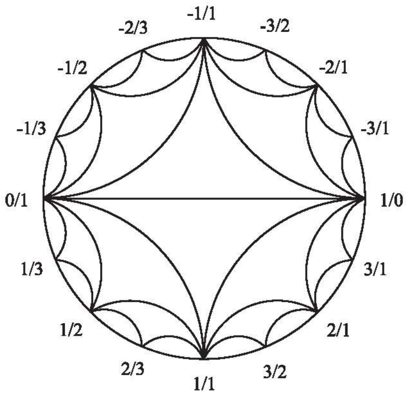


Рис. 3. Идеальная триангуляция гиперболической плоскости

Построим отображение $\Psi_{\mu,\lambda}$ множества $\Theta(T)$ на множество всех треугольников триангуляции $\mathbb{F}$, зависящее только от выбора системы координат μ, λ на двумерном торе T. Для этого рассмотрим отображение $\psi_{\mu,\lambda}$, которое каждой нетривиальной простой замкнутой кривой $\mu^\alpha \lambda^\beta$ на T сопоставляет точку $\alpha/\beta \in \partial\mathbb{H}^2$ (ориентация кривой не важна). Заметим, что любая тэта-кривая θ на T содержит три нетривиальные простые замкнутые кривые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, каждая из которых состоит из двух ребер тэта-кривой θ. Так как индекс пересечения любых двух кривых ℓ_i, ℓ_j, $i \neq j$, равен ± 1, то точки $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_1)$, $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_2)$, $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_3)$ являются вершинами некоторого треугольника σ триангуляции Фарея. Итак, мы полагаем $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta) = \sigma$.

Определим расстояние между треугольниками триангуляции Фарея как число ребер единственного простого пути в двойственном графе Σ триангуляции, соединяющего вершины, лежащие в данных треугольниках (путь единственный, поскольку Σ есть дерево). Ключевое для конкретных вычислений наблюдение заключается в том, что при любом выборе системы координат на торе расстояние между тэта-кривыми совпадает с расстоянием между соответствующими им треугольниками из $\mathbb{F}$. Это следует из того, что если тэта-кривая θ' получается из тэта-кривой θ одним флип-преобразованием, то соответствующие им треугольники имеют общее ребро.

Приведем два примера вычисления расстояний между треугольниками триангуляции Фарея. Обозначим через $\sigma(\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \alpha_3/\beta_3)$ треугольник с вершинами $\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \alpha_3/\beta_3$, через $\sigma(\alpha/\beta)$ — ближайший к $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$ треугольник среди всех треугольников, имеющих вершину в точке α/β.

Лемма 2 [11, лемма 2]. *Для любого положительного рационального числа p/q расстояние между треугольником $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$ и треугольником $\sigma(p/q)$ равно $S(p, q) - 1$, где $S(p, q)$ — сумма всех неполных частных в разложении числа p/q в непрерывную дробь.*

Рассмотрим второй пример. Сопоставим каждой целочисленной матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с определителем ± 1 ребро e_A триангуляции Фарея с вершинами a/c и b/d. Обозначим через σ_A^+ и σ_A^- примыкающие к ребру e_A треугольники

$\sigma(a/c, b/d, (a+b)/(c+d)$ и $\sigma(a/c, b/d, (a-b)/(c-d)$. Аналогично, единичная матрица E определяет треугольники $\sigma_E^+ = \sigma(0/1, 1/0, 1/1)$ и $\sigma_E^- = \sigma(0/1, 1/0, -1/1)$. В следующей лемме мы предъявляем явную формулу для нахождения наименьшего расстояния между парами треугольников (σ_E^+, σ_E^-) и (σ_A^+, σ_A^-).

Лемма 3 [11, лемма 3 (i)].

$$\min_{\rho,\eta\in\{+,-\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma_A^\eta) = \max(\xi(A) - 2, 0)$$

.

5. Доказательство Теоремы

Пусть (M_1, M_2, A) — приведенная меченная молекула многообразия $M \in \Lambda$. Для упрощения доказательства теоремы выделим наиболее существенные моменты в отдельные утверждения.

В параграфе 2 мы построили многообразия $N_1^2 \times S^1$, $N_2^2 \times S^1$, все компоненты края которых снабжены системами координат. Склеим эти многообразия по гомеоморфизму $\varphi : T' \to T''$, задаваемому матрицей A. Полученное многообразие обозначим через M_0.

Зададим узор Γ_0 на крае многообразия M_0. Для этого мы введем понятие базовой тэта-кривой. Пусть T — тор с фиксированной системой координат μ, λ. Тэта-кривая θ на торе T называется *базовой*, если кривые μ и λ изотопны кривым, содержащимся в θ. С точностью до изотопии существует ровно две базовые тэта-кривые: положительная и отрицательная. Базовую тэта-кривую будем называть *положительной* и обозначать θ^+, если $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta^+) = \sigma_E^+$. Аналогично, базовая тэта-кривая θ^- называется *отрицательной*, если $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta^-) = \sigma_E^-$. В качестве узора Γ_0 выберем объединение четырех положительных базовых тэта-кривых $\theta_i^+ \subset T_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, на крае многообразия M_0.

Предложение 1. *Описанное выше многообразие* (M_0, Γ_0) *имеет простой относительный спайн с* $\max(\xi(A) - 2, 0) + 6$ *внутренними истинными вершинами.*

Доказательство. На каждом из граничных торов T', T'' зададим узор, являющийся базовой тэта-кривой. Тип (положительный или отрицательный) базовых тэта-кривых $\theta' \subset T'$, $\theta'' \subset T''$ выбирается так, чтобы число $d(\varphi(\theta'), \theta'')$ было наименьшим из возможных. Из леммы 3 следует, что $d(\varphi(\theta'), \theta'') = \max(\xi(A) - 2, 0)$. Нам осталось показать, что каждое из многообразий $(N_1^2 \times S^1, \theta_1^+ \cup \theta_2^+ \cup \theta')$, $(N_2^2 \times S^1, \theta_3^+ \cup \theta_4^+ \cup \theta'')$ имеет простой относительный спайн с 3 внутренними истинными вершинами. Достаточно рассмотреть первое многообразие.

Напомним, что на каждом торе T_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$, выбрана система координат μ_i, λ_i, тогда как на торе T' выбрана система координат $\mu'(\lambda')^{-1}, \lambda'$. Если вернуться к первоначальной системе координат μ', λ' тора T', то пользуясь методом примера 3 можно построить два простых относительных спайна многообразия $N_1^2 \times S^1$, которые индуцируют узоры на $\partial(N_1^2 \times S^1)$, состоящие либо из двух положительных и одной отрицательной, либо из одной положительной и двух отрицательных базовых тэта-кривых. Можно считать, что на торе T' эти спайны индуцируют отрицательные базовые тэта-кривые. Поэтому в системе координат $\mu'(\lambda')^{-1}, \lambda'$ на торе T' эти же спайны индуцируют узоры на $\partial(N_1^2 \times S^1)$, состоящие либо из трех положительных, либо из двух положительных и одной отрицательной базовых тэта-кривых $\theta_1^+, \theta_2^+, \theta'$.

Предложение 2 [11, предложение 2]. *Пусть T — компонента края многообразия $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$ с фиксированной системой координат. При этом $T \cap \Gamma$ есть положительная базовая тэта-кривая на T. Предположим, что многообразие (M, Γ) имеет простой относительный спайн с v внутренними истинными вершинами. Тогда многообразие (W, Δ), получающееся заклейкой компоненты T края ∂M полноторием с параметрами (p, q), где $p > 0, q > 0$ и $\Delta = \Gamma \setminus (T \cap \Gamma)$, имеет простой относительный спайн с $S(p, q) - 2 + v$ внутренними истинными вершинами.*

Доказательство Теоремы. Последовательно применяя предложения 1 и 2 мы построим простой спайн многообразия M с $\max\{\xi(A) - 2, 0\} - 2 + \sum_{i=1}^{4} S(p_i, q_i)$ внутренними истинными вершинами.

Литература

[1] Матвеев, С. В. *Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий* / С. В. Матвеев. – М.: МЦНМО, 2007 – 456 с.

[2] Matveev, S. *Atlas of 3-manifolds* / S. Matveev, E. Fominykh, V. Tarkaev // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.matlas.math.csu.ru, свободный.

[3] Frigerio, R. *Complexity and Heeagaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds* / R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio // Pacific J. Math. – 2003. – Vol. 210. – P. 283 – 297.

[4] Anisov, S. *Complexity and Heeagaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds* / S. Anisov // Mosc. Math. J. – 2005. – Vol. 5, no. 2. – P. 305 – 310.

[5] Jaco, W. *Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces* / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // J. Topology. – 2009. – Vol. 2, no. 1. – P. 157 – 180.

[6] Jaco, W. *Coverings and minimal triangulations of 3–manifolds* / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // Algebraic & Geometric

Topology. – 2011. – Vol. 11, no. 3. – P. 1257 – 1265.

[7] Веснин, А. Ю. *Точные значения сложности многообразий Паолюци – Циммермана* / А. Ю. Веснин, Е. А. Фоминых // Докл. Акад. наук – 2011. – Том 439, No. 6. – С. 727 – 729.

[8] Martelli, B. *Complexity of geometric 3-manifolds* / B. Martelli, C. Petronio // Geom. Dedicata. – 2004. – Vol. 108. – P. 15 – 69.

[9] Веснин, А. Ю. *Двусторонние оценки сложности многообразий Лёбелля* / А. Ю. Веснин, С. В. Матвеев, К. Петронио // Докл. Акад. наук – 2007. – Том 416, No. 3. – С. 295 – 297.

[10] Matveev, S. *Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds* / S. Matveev, C. Petronio, A. Vesnin // J. Australian Math. Soc. – 2009. – Vol. 86, no. 2. – P. 205 – 219.

[11] Фоминых, Е. А. *Верхние оценки сложности для бесконечной серии граф-многообразий* / Е. А. Фоминых // Сиб. электр. мат. изв. – 2008. – Том 5. – С. 215 – 228.

[12] Фоминых, Е. А. *Хирургии Дена на узле восьмерка: верхняя оценка сложности* / Е. А. Фоминых // Сиб. мат. жур. – 2011. – Том 52, No. 3. – С. 680 – 689.

[13] Fominykh, E. *On the complexity of graph-manifolds* / E. Fominykh, M. Ovchinnikov // Сиб. электр. мат. изв. – 2005. – Том 2. – С. 190 – 191.

[14] Овчинников, М. А. *Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем* / М. А. Овчинников // Мат. заметки. – 1999. – Том 66, No. 4. – С. 533 – 539.

[15] Овчинников, М. А. *Построение простых спайнов многообразий Вальдхаузена* / М. А. Овчинников // Сб. трудов Межд. конф. “Маломерная топология и комбинаторная теория групп”.– Киев: Институт математики НАН Украины, 2000. – С. 65 – 86.

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

УДК 514.763.3

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Я. В. Базайкин

SPECIAL HOLONOMY GROUPS OF RIEMANNIAN SPACES

Ya. V. Bazaikin

В статье дается краткий обзор специальных групп голономии римановых пространств, подробно описаны явные конструкции римановых метрик с группой голономии $Spin(7)$ и G_2.

The brief overview of Riemannian special holonomy groups is given in the paper. Explicit constructions of $Spin(7)$- and G_2-holonomy metrics are described.

Ключевые слова: группа голономии, $Spin(7)$, G_2.

Keywords: holonomy group, $Spin(7)$, G_2.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-00142-а), гранта Президента РФ (МД-249.2011.1, НШ-7256.2010.1) и фонда Дмитрия Зимина «Династия».

1. Введение

Изучение геометрических и топологических свойств римановых многообразий со специальными группами голономии является одной из актуальных и интереснейших задач современной дифференциальной геометрии. В этом направлении уже получено много результатов, например классификацию собственно групп голономии можно считать завершенной. Однако до сих пор нет полного ответа на вопрос: при каких условиях на данном многообразии существует риманова метрика с предописанной специальной группой голономии? Особенно остро стоит эта проблема для специальных групп голономии $Spin(7)$ и G_2. С другой стороны, примеров таких пространств известно также очень мало, компактные примеры были построены лишь в [1-7], причем все конструкции являются неявными.

С некомпактными пространствами дело обстоит лучше: существуют метрики с группами голономии $Spin(7)$ и G_2, явно выраженные в квадратурах, или с явно описываемой структурой. Более того, эти метрики играют свою роль в математической физике.

Цель данной статьи — дать краткий обзор специальных групп голономии, подробно описав известные конструкции римановых метрик с группой голономии $Spin(7)$ и G_2 на некомпактных пространствах.

Статья начинается с базовых определений и с описания классификации групп голономии римановых пространств. Далее описываются 3-сасакиевы многообразия, играющие важную роль при построении примеров. Завершает статью основной ее раздел, посвященный описанию примеров. Как выяснилось сравнительно недавно, практически все известные примеры некомпактных пространств с группой голономии $Spin(7)$ хорошо укладываются в одну схему, где концепция 3-сасакиева пространства играет центральную роль. Схема описывается в подразделе 4.1, а в подразделе 4.2, описывается как предлагаемая схема может быть видоизменена для того, чтобы построить римановы метрики с группой голономии G_2.

Хотя описанные результаты были по отдельности опубликованы, но в едином виде, под одним углом зрения данные результаты публикуются впервые.

2. Классификация групп голономии римановых пространств

Пусть $M = M^n$ — связное n-мерное риманово многообразие без края с римановой метрикой g. Метрика g однозначно определяет связность Леви — Чивита ∇ в TM. Везде в дальнейшем мы будем подразумевать на римановых многообразиях именно эту аффинную связность.

Фиксируем точку $p \in M$. Пусть $\lambda(t)$, $t \in [0,1]$ — кусочно C^1-гладкая замкнутая петля с вершиной в точке p, т.е. $\lambda(0) = \lambda(1) = p$. Обозначим через $\tau(\lambda)$ параллельный перенос вдоль кривой λ относительно связности ∇. В силу свойств связности Леви — Чивита (инвариантность римановой метрики при параллельном переносе), $\tau(\lambda)$ является ортогональным преобразованием касательного пространства T_pM.

Группой голономии риманова многообразия (M, g) в точке p называется подгруппа $\mathrm{Hol}_p(M)$ ортогональной группы $O(T_pM)$, состоящая из преобразований вида $\tau(\lambda)$, где λ — произвольная кусочно C^1-гладкая петля с вершиной в точке p. Если при этом рассмотреть только стягиваемые петли, то мы получим *ограниченную группу голо-*

номии $\mathrm{Hol}^0_p(M)$ в точке p. Можно показать, что $\mathrm{Hol}^0_p(M)$ является связной компонентой единицы группы $\mathrm{Hol}_p(M)$.

Если выбрать другую точку q и соединить ее кривой σ с точкой p, то нетрудно понять, что $\mathrm{Hol}_q(M) = \tau(\sigma)\mathrm{Hol}_p(M)\tau(\sigma)^{-1}$ и, аналогично, $\mathrm{Hol}^0_q(M) = \tau(\sigma)\mathrm{Hol}^0_p(M)\tau(\sigma)^{-1}$. Таким образом, с точностью до класса сопряженности (ограниченная) группа голономии не зависит от выбора фиксируемой точки, и поэтому мы отождествим $O(T_pM)$ с $O(n)$ и будем писать $\mathrm{Hol} = \mathrm{Hol}(M) \subset \subset O(n)$ или $\mathrm{Hol}^0 = \mathrm{Hol}^0(M) \subset SO(n)$ не указывая точку p. Действие группы Hol (Hol^0) на $T_pM = \mathbb{R}^n$ задает представление (ограниченной) группы голономии, которое называется *(ограниченным) представлением голономии.* В случае, если $\mathrm{Hol}(M)$ является собственной подгруппой в $O(n)$, то принято говорить, что риманово многообразие M^n обладает *специальной* группой голономии, или, что группа голономии M^n *редуцируется* к подгруппе $\mathrm{Hol}(M)$.

Следующая теорема проясняет структуру ограниченной группы голономии риманова многообразия.

Теорема 1. [8] *Ограниченная группа голономии Hol^0_- произвольного риманова многообразия M является компактной подгруппой группы $O(n)$.*

Аналогичный результат для группы Hol неверен, даже если M компактно [9]. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы всегда будем предполагать, что риманово многообразие M односвязно и, в частности, $\mathrm{Hol}^0(M) = \mathrm{Hol}(M)$.

Возникает вопрос: какие группы Ли являются группами голономии односвязных римановых многообразий? Ниже мы рассмотрим этот вопрос подробнее.

Представление голономии риманова многообразия M называется *неприводимым* (мы, не совсем строго, будем говорить, что сама группа Hol неприводима), если не существует собственного инвариантного относительно Hol подпространства в T_pM. В противном случае, говорим, что представление голономии (или сама группа голономии) является *приводимым.* Если $M = M_1 \times M_2$ и $g = g_1+g_2$, т. е. (M, g) является прямым произведением римановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2), то очевидно, что $\mathrm{Hol}(M) = \mathrm{Hol}(M_1) \times \mathrm{Hol}(M_2)$, причем представление голономии M приводимо и разлагается в сумму соответствующих представлений M_1 и M_2.

Теорема разложения де Рама показывает, что при условии полноты риманова многообразия верно и обратное:

Теорема 2. [10] *Пусть (M, g) — риманово многообразие с приводимым представлением голономии. Пусть*

$$T_pM = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r,$$

где $r \geq 2$, $V_j \neq 0$ для всех j. Тогда (M, g) локально изометрично прямому произведению $(\mathbb{R}^{k_1}, g_1) \times \ldots \times (\mathbb{R}^{k_r}, g_r)$, где $k_j = \mathrm{dlm}\, V_j$, и $Hol^0_p(M) = H_1 \times \ldots \times H_r$, где $H_j \subset O(V_j, g_j)$.

Более того, если (M, g) односвязно и полно, то (M, g) (глобально) изометрично произведению $(M_1, g_1) \times \ldots \times (M_r, g_r)$, причем группа H_j является группой голономии (M_j, g_j).

Пусть $\mathbf{hol}_p(M) = \mathbf{hol}_p = \mathbf{hol}$ — алгебра Ли группы голономии Hol_p, называемая алгеброй голономии риманова многообразия M. Интуитивно понятно, что наличие специальной группы голономии накладывает ограничение на геометрию многообразия, поэтому можно ожидать наличие тесной связи между редукциями группы голономии и симметриями тензора кривизны. Эта связь объясняется следующей теоремой Амброза-Зингера.

Теорема 3. [11] *Алгебра голономии $\mathbf{hol}_p$ представляет собой подалгебру алгебры Ли $\mathbf{so}(T_pM)$, порожденную операторами вида*

$$(\tau(\lambda))^{-1} \circ R_q(X, Y) \circ \tau(\lambda),$$

где $q \in M$, $X, Y \in T_q(M)$, λ — произвольный C^1-кусочно гладкий путь, с началом p и концом q, а через $R_q(X, Y)$ мы обозначаем эндоморфизм $V \mapsto R(X, Y)V$ касательного пространства T_qM.

Идея доказательства теоремы 3 основана на классической формуле, связывающей параллельный перенос и тензор кривизны. А именно – предположим, что в точке $p \in M$ заданы два касательных вектора $X, Y \in T_pM$. Рассмотрим замкнутый «квадратный» контур Γ_ε со стороной $\varepsilon > 0$, выходящий из точки p в направлении X и входящий в точку p в направлении $-Y$. Чтобы построить такой контур, достаточно продолжить векторы X, Y до координатных полей, и движение вдоль координатных линий $(0,0) \mapsto (\varepsilon, 0) \mapsto (\varepsilon, \varepsilon) \mapsto (0, \varepsilon) \mapsto (0,0)$ даст требуемый контур. Обозначим параллельный перенос вдоль Γ_ε через τ_ε. Тогда для любого вектора $V \in T_pM$

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}(\tau_\varepsilon(V)) = R(X, Y)V \ .$$

Понятно, что однопараметрическое семейство преобразований τ_ε можно рассматривать как кривую в группе $SO(T_pM)$, поэтому оператор кривизны $R(X, Y)$ оказывается элементом алгебры $\mathbf{hol}_p$.

Теперь определим понятие *лассо* с началом в точке p. Для этого рассмотрим точку $q \in M$ и кривую σ, соединяющую точки p и q. В точке q как и выше рассмотрим замкнутый координатный контур $\Gamma_\varepsilon(q)$, порожденный некоторой парой касательных в точке q векторов. Тогда лассо назовем кривую $\sigma^{-1} \circ \Gamma_\varepsilon(q) \circ \sigma$. Можно доказать, что если рассмотреть произвольную петлю γ на многообразии M с начальной точкой p, то ее можно сколь угодно близко аппроксимировать композицией конечного числа таких лассо. Предыдущая формула немедленно дает утверждение теоремы.

Особенно удобно применять теорему 3, если воспользоваться методом Картана подвижного репера. Предположим, что на римановом многообразии M (локально) задан ортонормированный корепер $e^1, \dots, e^n$, т.е. $ds^2 = \sum_{i=1}^n (e^i)^2$. Форма связности ω_i^j однозначно определяется соотношениями

$$de^i = -\omega_j^i \wedge e^j, \ \omega_j^i = -\omega_i^j.$$

Тогда форма кривизны $\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i e^k \wedge e^l$ находится по формулам

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k.$$

Форму кривизны Ω можно рассматривать как 2-форму со значениями в $\mathbf{so}(n)$ (поскольку $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$), точно так же, как форма связности ω может быть рассмотрена как 1-форма со значениями в $\mathbf{so}(n)$. При этом значение формы Ω на паре касательных векторов X, Y совпадает кососимметрическим оператором $R(X,Y)$, а значение ω на касательном векторе X может быть проинтерпретировано следующим образом. Рассмотрим кривую $\gamma(t)$, $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = X$. Рассмотрим вектор $V \in T_pM$ и его координатное представление $V = (v^1, \dots, v^n)$, где $v^i = e^i(V)$. Пусть $V_t \in T_{\gamma(t)}M$ — результат параллельного переноса вектора V вдоль кривой γ, рассмотрим его координаты $V_t = (v_t^1, \dots, v_t^n)$, $v_t^i = e^i(V_t)$. Предположим, что

$$(v_t^1, \dots, v_t^n)^T = A_t \cdot (v^1, \dots, v^n)^T, A_t \in SO(n).$$

Тогда

$$\omega(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(A_t) \ .$$

В этом случае Теорема 3 позволяет получить следующий простой критерий.

Теорема 4. *Предположим, что риманово многообразие покрыто системой окрестностей, в каждой из которых определен ортонормированный корепер $e^1, \dots, e^n$ и соответствующие формы связности и кривизны удовлетворяют следующему условию:*

$$\langle \omega(X,Y), \Omega(X) | p \in M; X, Y \in T_pM \rangle_{\mathbf{so}(n)} = \mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n).$$

Тогда алгебра $\mathbf{g}$ является алгеброй голономии риманова многообразия M.

Важный пример римановых многообразий со специальными группами голономии доставляют симметрические пространства. А именно – если $M = G/H$ — симметрическое пространство, где $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ — симметрическая пара, то H — группа голономии M, а представление изотропии H совпадает с представлением голономии.

Следующая теорема, являющаяся основой классификации групп голономии римановых пространств, была доказана Берже.

Теорема 5. [12] *Пусть M — односвязное неприводимое риманово многообразие размерности n, не являющееся симметрическим. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

1) $Hol(M) = SO(n)$,
2) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = U(m) \subset SO(2m)$,
3) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = SU(m) \subset SO(2m)$,
4) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m) \subset SO(4m)$,
5) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m)Sp(1) \subset SO(4m)$,
6) $n = 7$ *и* $Hol(M) = G_2 \subset SO(7)$,
7) $n = 8$ *и* $Hol(M) = Spin(7) \subset SO(8)$,

где все указанные группы действуют в $\mathbb{R}^n$ стандартным способом.

Список групп, перечисленных в теореме, принято называть списком Берже. Перед тем, как кратко описать все геометрии, возникающие из групп голономии списка Берже, дадим следующий очень полезный критерий. Пусть тензорное поле T типа (k,l) задано на M глобально, рассмотрим петлю γ в M с начальной точкой $p \in M$. Тогда по определению параллельного переноса тензорного поля для любых векторов $v_1, \dots, v_k \in T_pM$ мы имеем: $P_\gamma(T)(v_1, \dots, v_k) = P_\gamma(T(P_\gamma^{-1}(v_1), \dots, P_\gamma^{-1}(v_k)))$. Следующее предложение очевидно.

Предложение 1. *Предположим, что группа Ли $G \subset SO(n)$ описывается следующим образом:*

$$G = \{\phi \in SO(n) | \phi(t) = t\},$$

где t — некоторая полилинейная векторозначная форма на $\mathbb{R}^n$ (либо t — некоторое линейное пространство форм указанного вида), а $\phi(t)$ обозначает стандартное действие отображения $\phi \in SO(n)$ на форме (либо на пространстве форм) t.

В описанных условиях риманово n-мерное многообразие M имеет группу голономии, лежащую в G тогда, и только тогда, когда на M существует глобально определенное параллельное тензорное поле T (либо параллельное линейное пространство тензорных полей T), в каждой точке изоморфное t.

Ниже следует краткое описание геометрий из списка Берже.

Общий случай: $\mathrm{Hol} = SO(n)$. На любом многообразии M римановы метрики с группой голономии $SO(n)$ образуют открытое всюду плотное множество относительно любой естественной топологии.

Кэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = U(m)$. Риманово многообразие M^n называется кэлеровым, если на нем существует параллельная невырожденная 2-форма ω, называемая кэлеровой формой. В этом случае представление голономии сохраняет форму ω и, следовательно, группа голономии содержится в $U(m)$. Можно ввести параллельную почти комплексную структуру J, $J^2 = -1$ соотношением $\omega(X,Y) = g(X, J(Y))$, $X, Y \in TM$ и доказать ее интегрируемость. Таким образом, по теореме Ньюлендера — Ниренберга [13] на M возникает комплексная структура.

Обратно, если на комплексном многообразии задана риманова метрика, согласованная с комплексной структурой (т. е. оператор J сохраняет скалярное произведение), то можно соотношением $\omega(X,Y) = g(X, J(Y))$, $X, Y \in TM$ ввести эрмитову форму ω. В этом случае имеет место следующее утверждение:

Предложение 2. *В описанной ситуации, эрмитова форма ω (а вместе с ней и комплексная структура J) параллельна тогда и только тогда, когда она замкнута:*

$$d\omega = 0.$$

Таким образом, вместо переопределенного, как правило, условия параллельности формы, на комплексном многообразии для построения кэлеровой структуры достаточно исследовать условие ее замкнутости.

Специальные кэлеровы многообразия, или многообразия Калаби-Яу: $\mathrm{Hol} = SU(m)$. Кэлерово многообразие M называется специальным, если допускает параллельную комплексную форму объема θ, т. е. ненулевую комплексную дифференциальную форму типа $(m, 0)$. Параллельность формы θ означает, что представление голономии сохраняет комплексный объем в $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^m$, т. е. группа голономии $\mathrm{Hol}(M)$ содержится в $SU(m) \subset U(m)$.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. [14] *Кэлерово многообразие M является специальным тогда и только тогда, когда оно Риччи-плоско, т. е. его тензор Риччи обращается в нуль:*

$$R_{ij} = 0. \tag{1}$$

Гиперкэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = Sp(m)$. Риманово многообразие M^n называется гиперкэлеровым, если оно допускает три параллельные комплексные структуры, согласованные с римановой метрикой и удовлетворяющие кватернионным соотношениям $IJ = -JI = K$. У гиперкэлерова многообразия представление голономии оставляет инвариантными тройку 2-форм, отвечающих симплектическим преобразованиям $\mathbb{R}^{4m}$, поэтому $\mathrm{Hol}(M) = Sp(m) \subset SU(2m)$. Из последнего вложения следует, что гиперкэлерова метрика также удовлетворяет уравнению Эйнштейна (1).

Кватернионно-кэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = Sp(m)Sp(1)$. Риманово многообразие называется кватернионно-кэлеровым, если существуют три локально определенные инвариантные относительно римановой метрики почти комплексные структуры I, J, K, удовлетворяющие кватернионным соотношениям и порождающие трехмерное параллельное подрасслоение в расслоении эндоморфизмов касательного расслоения TM. Если обозначить через ω_I, ω_J, ω_K соответствующие эрмитовы формы, то форма $\Omega = \omega_I \wedge \omega_I + \omega_J \wedge \omega_J + \omega_K \wedge \omega_K$ параллельна. Следовательно, группа голономии $\mathrm{Hol}(M)$ оставляет инвариантной форму Ω, поэтому содержится в $Sp(m)Sp(1) \subset O(4m)$ и, наоборот, если $\mathrm{Hol} \subset Sp(m)Sp(1)$, то на M существует кватернионно-кэлерова структура. Важность этого класса многообразий диктуется следующим утверждением.

Предложение 4. [15] *Кватернионно-кэлерово многообразие удовлетворяет уравнению Эйнштейна с «космологической» постоянной λ:*

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}.$$

Стоит отметить, что кватернионно-кэлерово многообразие, вообще говоря, не является кэлеровым. Заметим также, что при $m = 1$ понятие кватернионно-кэлерова многообразия по-прежнему имеет смысл (и совпадает с автодуальным эйнштейновым многообразием), однако форма Ω просто совпадает с формой объема и группа голономии совпадает с $SO(4)$. Дальнейшие ссылки по кватернионно-кэлеровым многообразиям можно найти в [15,16].

Оставшиеся два типа групп голономии представляют для нас особый интерес: им посвящен раздел 4 статьи, поэтому мы опишем их более подробно.

Исключительная группа голономии $\mathrm{Hol} = G_2$. Пусть $\{e^i\}, i = 0, 2, 3, \ldots, 7$ — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^7$ (не очень естественный, на первый взгляд, способ нумерации базиса связан с необходимостью согласования в главе 2 формы Ψ_0, определяемой ниже, с формой Φ, определяющей $Spin(7)$-структуру). Положив $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$, рассмотрим следующую 3-форму Ψ_0 на $\mathbb{R}^7$:

$$\Psi_0 = -e^{023} - e^{045} + e^{067} + e^{346} - e^{375} - e^{247} + e^{256}.$$

Подгруппа в $GL(7)$, сохраняющая форму Ψ_0, совпадает с группой G_2. Это компактная односвязная 14-мерная простая группа Ли, обычно определяемая как группа автоморфизмов чисел Кэли. Заметим, что группа G_2 также сохраняет метрику

$$g_0 = (e^0)^2+(e^2)^2+(e^3)^2+(e^4)^2+(e^5)^2+(e^6)^2+(e^7)^2,$$

сопряженную 4-форму

$$*\Psi_0 = -e^{4567}-e^{2367}-e^{2345}-e^{0257}-e^{0246}+e^{0356}-e^{0347}$$

и ориентацию пространства $\mathbb{R}^7$. Дифференциальная 3-форма Ψ на ориентированном римановом 7-мерном многообразии M задаёт G_2-структуру, если в окрестности каждой точки $p \in M$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^7$, такая, что $\phi_p^*\Psi_0 = \Psi|_p$. При этом форма Ψ определяет единственную метрику g_Ψ, такую что $g_\Psi(v,w) = g_0(\phi_p v, \phi_p w)$ для $v,w \in T_pN$ [17, 18]. Если форма Ψ параллельна ($\nabla\Psi = 0$), то группа голономии риманова многообразия N будет содержаться в G_2.

Предложение 5. [19] *Форма Ψ, задающая G_2-структуру на M параллельна тогда, и только тогда, когда она замкнута и козамкнута:*

$$\begin{array}{c} d\Psi = 0 \\ d*\Psi = 0. \end{array} \qquad (2)$$

Заметим, что для компактного M условие (2) равносильно гармоничности Ψ. Однако в некомпактном случае это вообще говоря не так. Также отметим здесь, что форма $\Phi_0 = e^1\wedge\Psi_0 - *\Psi_0$, где $*$ — оператор Ходжа в $\mathbb{R}^7$, задает $Spin(7)$-структуру на $\mathbb{R}^8$ с ортонормированным базисом $\{e^i\}_{i=0,1,2,..,7}$.

Важность римановых многообразий с группой голономии G_2 в некоторых задачах математической физики связана со следующим утверждением.

Предложение 6. [20] *Пусть (M,g) — риманово 7-мерное многообразие и $Hol(M) \subset G_2$. Тогда g — Риччи-плоская метрика, т. е. она удовлетворяет уравнению (1).*

Исключительная группа голономии $\mathrm{Hol} = Spin(7)$. Пусть $\{e^i\}, i = 0,1\ldots,7$ — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^8$. Как и ранее, обозначаем $e^{ijkl} = e^i\wedge e^j\wedge e^k\wedge e^l$ и определим 4-форму Φ_0 на $\mathbb{R}^8$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_0 = \quad & e^{0123}+e^{4567}+e^{0145}-e^{2345}-e^{0167}+\\ & +e^{2367}+e^{0246}+e^{1346}-e^{0275}+e^{1357}+\\ & +e^{0347}-e^{1247}-e^{0356}+e^{1256}.\end{aligned}$$

Подгруппа в $GL(8)$, сохраняющая форму Φ_0 совпадает с группой $Spin(7)$. Это компактная односвязная простая 21-мерная группа Ли, двукратно накрывающая ортогональную группу $SO(7)$. Группа $Spin(7)$ сохраняет метрику

$$\begin{aligned} g_0 = (e^0)^2+(e^1)^2+(e^2)^2+(e^3)^2+ \\ +(e^4)^2+(e^5)^2+(e^6)^2+(e^7)^2 \end{aligned}$$

и ориентацию пространства $\mathbb{R}^8$.

Пусть M — ориентированное риманово 8-мерное многообразие. Говорят, что дифференциальная форма $\Phi \in \Lambda^4 M$ задает $Spin(7)$-структуру на M, если в окрестности каждой точки $p \in M$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^8$, такая, что $\phi_p^*\Phi_0 = \Phi|_p$. При этом форма Φ определяет единственную метрику g_Φ, такую, что $g_\Phi(v,w) = g_0(\phi_p v, \phi_p w)$ для $v,w \in T_pM$ [17,18]. Если форма Φ параллельна, то группа голономии риманова многообразия M редуцируется к подгруппе $Spin(7) \subset SO(8)$. Как и в случае группы голономии G_2 имеет место следующее предложение.

Предложение 7. [19] *Форма Φ, задающая $Spin(7)$-структуру на многообразии M параллельна тогда и только тогда, когда она замкнута:*

$$d\Phi = 0. \qquad (3)$$

Поскольку Φ самосопряжена относительно оператора Ходжа $*$, ее замкнутость равносильна козамкнутости и влечет гармоничность; однако обратное в некомпактном случае, вообще говоря, неверно.

Римановы многообразия с группой голономии $Spin(7)$ также являются эйнштейновыми:

Предложение 8. [20] *Пусть (M,g) — риманово 8-мерное многообразие и $Hol(M) \subset Spin(7)$. Тогда g — Риччи-плоская метрика, т. е. она удовлетворяет уравнению (1).*

3. Геометрия 3-сасакиевых многообразий

Существует ряд очень интересных геометрий, которые, сами не имея специальной голономии, являются тесно связанными с такими пространствами. Одной из таких геометрий посвящен данный раздел, используемый в дальнейшем для построения римановых метрик с группой голономии G_2 и $Spin(7)$. Более полные доказательства и дальнейшие ссылки по 3-сасакиевым многообразиям можно найти в [21].

Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности m с метрикой g. Конусом $\bar{M}$ над M будем называть многообразие $\mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой $\bar{g} = dt^2 + t^2 g$.

Многообразие M называется *сасакиевым*, если группа голономии конуса $\bar{M}$ содержится в $U(\frac{m+1}{2})$ (в частности, m нечетно). Значит, на $\bar{M}$ существует параллельная комплексная структура J. Отождествим M с изометричным ему вложенным подмногообразием $M\times\{1\} \subset \bar{M}$ и положим $\xi = J(\partial_t)$. Векторное поле ξ называется *характеристическим* полем сасакиева многообразия M. Характеристическая 1-форма η сасакиева многообразия определяется соотношением

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

для всех полей X на M.

Лемма 1. *Поле ξ является единичным векторным полем Киллинга на многообразии M.*

Доказательство. То, что поле ξ является единичным, сразу следует из определения. Пусть ∇ и $\bar{\nabla}$ — римановы связности в M и $\bar{M}$. Непосредственно проверяется, что для любых векторных полей X, Y на M

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - tg(X, Y)\partial_t,$$

$$\bar{\nabla}_{\partial_t} X = \bar{\nabla}_X \partial_t = \frac{1}{t} X, \ \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0.$$

Тогда для любого векторного поля X на M

$$g(\nabla_X \xi, X) = \bar{g}(\nabla_X \xi, X) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, X) =$$

$$= \bar{g}(J(\bar{\nabla}_X \partial_t), X) = \bar{g}(JX, X) = 0.$$

Следовательно, поле ξ — киллингово. Лемма доказана.

Если на многообразии M заданы три попарно ортогональные сасакиевы структуры, то M становится 3-сасакиевым. Более точно, многообразие M называется *3-сасакиевым*, если метрика $\bar{g}$ на $\bar{M}$ гиперкэлерова, т. е. ее группа голономии содержится в $Sp(\frac{m+1}{4})$ (в частности, $m = 4n + 1, n \geq 1$). Последнее означает, что на $\bar{M}$ существуют три параллельные комплексные структуры J^1, J^2, J^3, удовлетворяющие соотношениям $J^j J^i = -\delta^{ij} + \varepsilon_{ijk} J^k$. Как и в сасакиевом случае определяются характеристические поля ξ^i и 1-формы η_i:

$$\xi^i = J^i(\partial_t), \ \eta_i(X) = g(X, \xi^i), \ i = 1, 2, 3,$$

для всех векторных полей X на M.

Лемма 2. *Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 являются единичными попарно ортогональными векторными полями Киллинга на M, причем*

$$\nabla_{\xi^i} \xi^j = \varepsilon_{ijk} \xi^k, \ [\xi^i, \xi^j] = 2\varepsilon_{ijk} \xi^k.$$

Доказательство. То, что поля ξ^i являются единичными, попарно ортогональными и киллинговыми, сразу следует из определения и из предыдущей леммы. Далее:

$$\nabla_{\xi^i} \xi^j = \bar{\nabla}_{\xi^i} \xi^j + \delta^{ij} \partial_t = J^j \bar{\nabla}_{\xi^i} \partial_t + \delta^{ij} \partial_t =$$
$$= (J^j J^i + \delta^{ij}) \partial_t = \varepsilon_{ijk} \xi^k,$$

откуда немедленно следует:

$$[\xi^i, \xi^j] = \nabla_{\xi^i} \xi^j - \nabla_{\xi^j} \xi^i = 2\varepsilon_{ijk} \xi^k.$$

Лемма доказана.

Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 образуют подалгебру Ли $\mathbf{sp}(1)$ в алгебре инфинитезимальных изометрий. Следовательно, в группе всех изометрий содержится подгруппа либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$, орбиты действия которой определяют трехмерное слоение $\mathcal{F}$. Из леммы следует, что каждый слой $\mathcal{F}$ является вполне геодезическим трехмерным подмногообразием постоянной кривизны 1.

Риманов орбифолд $\mathcal{O}$ называется *кватернионно-кэлеровым*, если в V-расслоении эндоморфизмов касательного пространства существует параллельное V-подрасслоение $\mathcal{I}$ размерности 3, локально порожденное почти комплексными структурами I^1, I^2, I^3, удовлетворяющими соотношениям алгебры кватернионов, и расслоение $\mathcal{I}$ инвариантно относительно действия локальной униформизующей группы $\mathcal{O}$.

Теорема 6. [21] *Пусть M — замкнутое $(4n+3)$-мерное 3-сасакиево многообразие с определенным как выше трехмерным слоением $\mathcal{F}$. Тогда на пространстве листов слоения $\mathcal{F}$ существует структура $4n$-мерного кватернионно-кэлерова орбифолда $\mathcal{O}$, такая, что естественная проекция $\pi : M \mapsto \mathcal{O}$ является римановой субмерсией и главным V-расслоением со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$. Общий слой π изометричен либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{V}$ трехмерное подрасслоение в TM, порожденное характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3. Пусть $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ — ортогональное разложение относительно метрики g. Подрасслоение $\mathcal{V}$ будем назвать расслоением вертикальных векторов, а $\mathcal{H}$ — расслоением горизонтальных векторов.

Пусть $p \in M$. Предположим, что стабилизатором точки p относительно действия $Sp(1)$ является дискретная подгруппа Γ в $Sp(1)$, т. е. лист $\mathcal{F}_p$, проходящий через точку p, изометричен $Sp(1)/\Gamma$. Положим

$$U = \{\exp_p(tX) | X \in \mathcal{H}_p, |X| = 1, 0 \leq t \leq \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ выбран настолько малым, что $\varepsilon < \mathrm{inj}\ (M)$, $\mathcal{F}_p$ пересекает U ровно один раз в точке p, и каждый лист слоения $\mathcal{F}$ пересекает U не более чем конечное число раз. Тогда U гомеоморфно $\mathbb{R}^{4n}$, и на U действует изометриями группа Γ по правилу:

$$\gamma \in \Gamma : \exp_p(tX) \mapsto \exp_p(td_p\gamma(X)).$$

Легко понять, что окрестность $\mathcal{O}$, состоящая из листов, пересекающих U гомеоморфна U/Γ, и система таких окрестностей, построенных по всем точкам p, задает униформизующий атлас на $\mathcal{O}$.

Очевидно, что метрика g на M имеет вид:

$$g = \sum_{i=1}^{3} \eta_i^2 + g|_{\mathcal{H}},$$

где $g|_{\mathcal{H}}$ — ограничение метрики g на горизонтальное распределение. Рассмотрим проекцию $\pi : M \to \mathcal{O}$. Поскольку метрика g инвариантна относительно действия $Sp(1)$, то существует такая риманова метрика $g_{\mathcal{O}}$ на орбифолде $\mathcal{O}$, что для любой точки $p \in M$ ограничение $d\pi_p : \mathcal{H}_pM \to T_{\pi(p)}\mathcal{O}$ является изометрией; при этом $d\pi^*(g_{\mathcal{O}}) = g|_{\mathcal{H}}$. Таким образом проекция π становится римановой субмерсией, и каждому векторному полю Y на $\mathcal{O}$ однозначно соответствует горизонтальное $Sp(1)$-инвариантное векторное поле X на M, такое, что $d\pi(X) = Y$. Связность Леви — Чивита метрики $g_{\mathcal{O}}$ получается проектированием на $\mathcal{H}$ связности Леви — Чивита метрики g. Далее, если X — горизонтальное векторное поле, то

$$g(J^i(X), \xi^j) = g(X, \varepsilon_{ijk}\xi^k) = 0.$$

Таким образом, операторы J^1, J^2, J^3 на $\mathcal{H}$ отображают горизонтальные векторы в горизонтальные и задают кватернионную структуру на орбифолде $\mathcal{O}$.

Определим 2-формы на M следующим образом:

$$\omega_i = d\eta_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\eta_j \wedge \eta_{\boldsymbol{k}}, \ \ i = 1, 2, 3.$$

Непосредственно проверяется, что для любых горизонтальных векторных полей X, Y:

$$\omega_i(X, Y) = \frac{1}{2}(X\eta_i(Y) - Y\eta_i(X) - \eta_i([X, Y])) =$$

$$= \frac{1}{2}\eta_i(-\nabla_X Y + \nabla_Y X) =$$

$$= \frac{1}{2}(g(\nabla_X \xi^i, Y) - g(\nabla_Y \xi^i, X)) = g(J^i(X), Y),$$

$$\omega_i(X, \xi^j) = 0, \ \ \omega_i(\xi^j, \xi^k) = 0.$$

Таким образом, формы ω_i получаются опусканием индекса из ограничений операторов J^i на $\mathcal{H}$.

Далее:

$$L_{\xi^i}\eta_j(X) = \xi^i g(X, \xi^j) - g(\xi^j, [\xi^i, X]) =$$

$$= g(\nabla_{\xi^i} X, \xi^j) + g(X, \nabla_{\xi^i}\xi^j) - g(\xi^j, [\xi^i, X]) =$$

$$= g(\nabla_X \xi^i, \xi^j) + g(X, \nabla_{\xi^i}\xi^j) =$$

$$= g(\bar{\nabla}_X J^i \partial_t, \xi^j) + +g(X, \bar{\nabla}_{\xi^i} J^j \partial_t) =$$

$$= -g(X, J^i\xi^j) + g(X, J^j\xi^i) =$$

$$= 2g(X, J^j J^i \partial_t) = 2g(X, \varepsilon_{ijk}\xi^k) = 2\varepsilon_{ijk}\eta_{\boldsymbol{k}}(X).$$

Таким образом,

$$L_{\xi^i}\eta_j = 2\varepsilon_{ijk}\eta_k.$$

Дифференцируя, получаем:

$$L_{\xi^i} d\eta_j = 2\varepsilon_{ijk} d\eta_k.$$

Далее, пользуясь этим соотношением и условием

$$L_{\xi^i}(\eta_j \wedge \eta_k) = L_{\xi^i}\eta_j \wedge \eta_k + \eta_j \wedge L_{\xi^i}\eta_k$$

мы получаем:

$$L_{\xi^i}\omega_j = 2\varepsilon_{ijk}\omega_k.$$

Таким образом, пространство форм, порожденных формами ω_i инвариантно относительно действия $Sp(1)$, а это значит, что и пространство, порожденное операторами $J^i|_{\mathcal{H}}$, является $Sp(1)$-инвариантным и опускается на $\mathcal{O}$. Итак, в расслоении $End(T\mathcal{O})$ определено трехмерное подпространство, локально порожденное почти комплексными структурами J^1, J^2, J^3.

Далее, для горизонтальных X, Y имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\nabla_X J^i)(Y) &= \mathcal{H}(\nabla_X(J^iY) - J^i(\nabla_X Y)) = \\ &= \mathcal{H}\bar{\nabla}_X(J^iY) - \mathcal{H}J^i(\nabla_X Y) = \\ &= \mathcal{H}J^i(\bar{\nabla}_X Y)) - \mathcal{H}J^i(\nabla_X Y) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда уже нетрудно вывести, что распределение этих подпространств параллельно вдоль $\mathcal{O}$.

Доказательство утверждения про общий слой расслоения π можно найти в [21]. Теорема доказана.

Поле ξ^1 соответствует подгруппе S^1 в $Sp(1)$ либо в $SO(3)$. Таким образом, можно рассмотреть одномерное слоение $\mathcal{F}'$ на M, порожденное полем ξ^1. Совершенно аналогично предыдущей теореме, можно доказать, что на пространстве слоев слоения $\mathcal{F}'$ можно ввести структуру 6-мерного риманова орбифолда $\mathcal{Z}$, согласованную с римановой субмерсией $\pi' : M \to \mathcal{Z}$. Известно, что метрика на $\mathcal{Z}$ является метрикой Кэлера — Эйнштейна [21]. Орбифолд $\mathcal{Z}$ называется *твисторным пространством* многообразия M.

3-сасакиево многообразие M называется *регулярным*, если регулярным является 3-сасакиево слоение $\mathcal{F}$. В этом случае каждый слой $\mathcal{F}$ диффеоморфен либо S^3, либо $SO(3)$ и орбифолды $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$ являются многообразиями.

Теорема 7. [21] *Если M — компактное регулярное 3-сасакиево многообразие размерности 7, то M изометрично одному из следующих однородных пространств:*

$$S^7, \ \mathbb{R}P^7, \ SU(3)/T_{1,1},$$

где через $T_{1,1}$ обозначена окружность $S^1 = \{z \in \mathbb{C} ||z| = 1\}$, вложенная в максимальный тор $T^2 \subset SU(3)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}^2 \end{pmatrix}.$$

4. Конструкции римановых метрик с группами голономии $Spin(7)$ и G_2

4.1. Группа голономии $Spin(7)$

В этом разделе описываем общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии $Spin(7)$ по заданному 3-сасакиеву 7-мерному многообразию M. Идея состоит в следующем. Если выбрать 3-сасакиево многообразие M, то конус над M будет иметь группу голономии $Sp(2) \subset Spin(7)$. Мы деформируем конусную метрику так, чтобы разрешить особенность в вершине конуса и получить метрику, группа голономии которой не станет больше, чем $Spin(7)$. При этом за деформацию отвечают функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$, зависящие от радиальной переменной t, меняющейся вдоль образующей конуса.

Более подробно, рассмотрим семимерное 3-сасакиево многообразие M с римановой метрикой g и соответствующее 3-сасакиево расслоение $\pi : M \to \mathcal{O}$ с общим слоем, диффеоморфным S^3 либо $SO(3)$, над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Как и ранее, через $\mathcal{Z}$ будем обозначать твисторное пространство 3-сасакиева многообразия M. С многообразием M свяжем два орбифолда $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, разрешающих конусную особенность $\bar{M}$ следующими двумя способами.

1. Рассмотрим стандартное действие на $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ группы $Sp(1)$, представленной единичными кватернионами, и соответствующее действие $SO(3) = Sp(1)/\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$:

$$q \in Sp(1) : x \in \mathbb{H} \to qx \in \mathbb{H}.$$

Пусть $\mathcal{M}_1$ — расслоенное пространство со слоем $\mathbb{R}^4$ либо $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$, ассоциированное с главным расслоением $\pi : M \to \mathcal{O}$ относительно рассмотренного действия. Таким образом, орбифолд $\mathcal{O}$ вложен в $\mathcal{M}_1$ в качестве нулевого слоя, а $\mathcal{M}_1 \backslash \mathcal{O}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M. Пусть $t = |x|$, для $x \in \mathbb{H}$. Очевидно, что при $t \to 0$ каждый слой расслоения π коллапсирует в точку, а сферическое сечение π коллапсирует к нулевому слою $\mathcal{O}$.

С другой стороны, очевидно, что существует диффеоморфизм

$$\mathcal{M}_1 \backslash \mathcal{O} \to \bar{M} \backslash \{*\},$$

позволяющий разрешить конусную особенность $\{*\}$ в $\bar{M}$.

2. Пусть $S \simeq S^1$ — подгруппа в $Sp(1)$ либо $SO(3)$, интегрирующая поле Киллинга ξ^1. Рассмотрим действие S на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$:

$$e^{i\phi} \in S : z \in \mathbb{C} \to ze^{i\phi} \in \mathbb{C}.$$

Расслоение $M \to \mathcal{Z}$ является главным со структурной группой S. Пусть $\mathcal{M}_2$ — расслоенное пространство со слоем $\mathbb{R}^2$, ассоциированное с $\pi' : M \to \mathcal{Z}$. Таким образом, орбифолд $\mathcal{Z}$ вложен в $\mathcal{M}_2$ в качестве нулевого слоя, а $\mathcal{M}_2 \backslash \mathcal{Z}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M. Аналогично предыдущему случаю положим $t = |z|$, где $z \in \mathbb{C}$. Тогда при $t \to 0$ каждый слой расслоения π' коллапсирует в точку, а сферическое сечение коллапсирует к нулевому слою $\mathcal{Z}$.

Как и ранее, очевиден диффеоморфизм, осуществляющий разрешение конусной особенности:

$$\mathcal{M}_2 \backslash \mathcal{Z} \to \bar{M} \backslash \{*\}.$$

Нам потребуется следующая модификация этой конструкции. Для любого натурального числа p существует очевидное вложение $\mathbb{Z}_p \subset S$, причем $\mathbb{Z}_p$ действует на $\mathcal{M}_2$ изометриями. Следовательно, корректно определен орбифолд $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, являющийся многообразием в точности тогда, когда многообразием является $\mathcal{M}_2$. Легко понять, что $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ является расслоением со слоем $\mathbb{C}$, ассоциированным с главным расслоением $\pi' : M \to \mathcal{Z}$ при помощи действия

$$e^{i\phi} \in S : z \in \mathbb{C} \to ze^{ip\phi} \in \mathbb{C}.$$

Нетрудно понять, что $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ разрешает конусную особенность схожим образом с $\mathcal{M}_2$: каждая окружность (укороченная «в p раз») коллапсирует в точку.

В случае, если 3-сасакиево многообразие регулярно, то каждый слой π диффеоморфен либо $S^3 = Sp(1)$, либо $SO(3)$ и орбифолды $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$ являются гладкими многообразиями. И обратно, наличие «особого» слоя означает существование точек с нетривиальной униформизующей группой у пространств $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$, а значит, и у пространств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Таким образом, учитывая теорему находим, что пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ могут являться гладкими многообразиями только при $M = S^7$, $M = \mathbb{R}P^7$ и $M = SU(3)/T_{1,1}$. В случае $M = S^7$ оба пространства являются гладкими 8-мерными многообразиями. Если $M = \mathbb{R}P^7$ либо $M = SU(3)/T_{1,1}$, то общий слой равен $SO(3)$ и многообразием является лишь соответствующее пространство $\mathcal{M}_2$.

Пользуясь обозначениями из раздела 3, рассмотрим на $(0,\infty) \times M$ следующую метрику:

$$\bar{g} = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2 + B(t)^2 g|_{\mathcal{H}}, \qquad (4)$$

где функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ и $B(t)$ определены на промежутке $(0,\infty)$. Локально можно выбрать ортонормированную систему 1-форм $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$, порождающую аннулятор вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$ так, что

$$\omega_1 = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7),$$
$$\omega_2 = 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5),$$
$$\omega_3 = 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6).$$

Пусть $\Omega = \eta_4 \wedge \eta_5 \wedge \eta_6 \wedge \eta_7 = -\frac{1}{8}\omega_1 \wedge \omega_1 = -\frac{1}{8}\omega_2 \wedge \omega_2 =$

$= \quad -\frac{1}{8}\omega_3 \wedge \omega_3$ — подъем формы объема кватернионно-кэлерова орбифолда $\mathcal{O}$.

Рассмотрим следующую 4-форму:

$$\Phi = e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3+B^4\Omega+\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^1-e^2\wedge e^3)\wedge\omega_1+$$

$$+\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^2-e^3\wedge e^1)\wedge\omega_2+\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^3-e^1\wedge e^2)\wedge\omega_3,$$

где

$$e^0 = dt,$$
$$e^i = A_i\eta_i, i = 1, 2, 3,$$
$$e^j = B\eta_j, j = 4, \ldots, 7.$$

Очевидно, что форма Φ определена глобально на $\bar{M}$ и локально совпадает с формой Φ_0, задающей $Spin(7)$-структуру на $\bar{M}$.

Пользуясь очевидными тождествами

$$\begin{aligned} d\eta_i = &\ \omega_i - 2\eta_{i+1}\wedge\eta_{i+2}, \\ d\omega_i = &\ 2d(\eta_{i+1}\wedge\eta_{i+2}) = \\ &= 2(\omega_{i+1}\wedge\eta_{i+2}-\eta_{i+1}\wedge\omega_{i+2}), \\ &\qquad i = 1,2,3 \mod 3, \end{aligned}$$

мы получаем следующие соотношения, замыкающие внешнюю алгебру рассмотренных форм:

$$\begin{aligned} de^0 = &\ 0, \\ de^i = &\ \tfrac{A_i'}{A_i}e^0\wedge e^i + A_i\omega_i - \tfrac{2A_i}{A_{i+1}A_{i+2}}e^{i+1}\wedge e^{i+2}, \\ &\qquad i = 1,2,3 \mod 3, \\ d\omega_i = &\ \tfrac{2}{A_{i+2}}\omega_{i+1}\wedge e^{i+2} - \tfrac{2}{A_{i+1}}e^{i+1}\wedge\omega_{i+2}, \\ &\qquad i = 1,2,3 \mod 3. \end{aligned}$$

Из предложения 7, определенная нами $Spin(7)$-структура не имеет кручения в точности тогда, когда форма Φ замкнута.

Следующее утверждение получается непосредственными вычислениями при помощи полученных выше соотношений алгебры форм.

Предложение 9. *Условие (3) эквивалентно следующей нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} A_1' &= \tfrac{2A_1^2}{B^2} + \tfrac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3}, \\ A_2' &= \tfrac{2A_2^2}{B^2} + \tfrac{(A_3-A_1)^2-A_2^2}{A_1A_3}, \\ A_3' &= \tfrac{2A_3^2}{B^2} + \tfrac{(A_1-A_2)^2-A_3^2}{A_1A_2}, \\ B' &= -\tfrac{A_1+A_2+A_3}{B}. \end{aligned} \tag{5}$$

Метрика (4) при выполнении определенных граничных условий даст гладкую риманову метрику на $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$. Следующие леммы, доказанные в [22] проясняют эти условия.

Предложение 10. *Пусть $A_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $B(t)$ — C^∞-гладкое на промежутке $[0, \infty)$ решение системы (5). Тогда метрика (4) продолжается до гладкой метрики на $\mathcal{M}_1$ в том, и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

(1) $A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0, |A_1'(0)| = = |A_2'(0)| = |A_3'(0)| = 1$;

(2) $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$;

(3) функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$ знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Предложение 11. *В условиях предыдущей леммы, пусть $p = 4$ либо $p = 2$, в зависимости от того, изометричен общий слой M или $Sp(1)$, или $SO(3)$. Для того, чтобы метрика (4) продолжалась до гладкой метрики на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

(1) $A_1(0) = 0, |A_1'(0)| = 4$;

(2) $A_2(0) = -A_3(0) \neq 0, A_2'(0) = A_3'(0)$;

(3) $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$;

(4) функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$ знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Прежде чем формулировать общие результаты о решениях системы (5), выведем известные нам на данный момент точные решения этой системы. Если положить $A_1 = A_2 = A_3$, то система (5) сводится к паре уравнений на функции $A = A_1 = A_2 = A_3$, B:

$$\begin{aligned} \tfrac{dA}{dt} &= 2\tfrac{A^2}{B^2} - 1, \\ \tfrac{dB}{dt} &= -3\tfrac{A}{B}. \end{aligned}$$

Введем новую переменную ρ:

$$\frac{d\rho}{dt} = 3\frac{A}{B}.$$

Тогда из второго уравнения $\frac{dB}{d\rho} = -1$, и мы можем считать, что $B(\rho) = -\rho$. Следовательно, первое уравнение переписывается в виде:

$$\frac{d(A^2)}{d\rho} + \frac{4}{3}\frac{A^2}{\rho} = \frac{2}{3}\rho.$$

Последнее уравнение без труда решается, и мы получаем:

$$A^2(\rho) = \frac{1}{5}\rho^2\left(1-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{10}{3}}\right).$$

Наконец, нормируя полученное решение заменой $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$ мы получаем следующую метрику на $\mathcal{M}_1$ с группой голономии $Spin(7)$ [17]:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}}+\frac{9}{25}r^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}\right)\sum_{i=1}^{3}\eta_i^2+\frac{9}{5}r^2g|_{\mathcal{H}}. \tag{6}$$

Отметим, что метрика (6) была первым примером полной метрики с группой голономии $Spin(7)$.

Далее, если положить $A_2 = A_3$, то система (5) также поддается явному интегрированию в терминах гипергеометрических функций, и мы приходим к следующей метрике на $\mathcal{M}_1$:

$$\bar{g} = \frac{vfdz^2}{4z(1-z^2)(1-z)(v-2)} + \frac{16(v-2)zf}{(1+z)v^3}\eta_1^2+$$

$$+\frac{4(v-2)zf}{(1+z)v}(\eta_2^2+\eta_3^2)+fg|_{\mathcal{H}}, \tag{7}$$

где

$$v(z) = \frac{2k\sqrt{z}}{(1-z^2)^{\frac{1}{4}}} - 2z\ {}_2F_1[1, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 1-z^2],$$

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\int^z \frac{dz'}{v(z')(1-z'^2)}\right],$$

k — константа интегрирования.

При $k = 0$ мы получаем следующую метрику на $\mathcal{M}_1$, выражаемую в элементарных функциях:

$$\bar{g} = \frac{(r-r_0)^2}{(r+r_0)(r-3r_0)}dr^2 + 4r_0^2\frac{(r+r_0)(r-3r_0)}{(r-r_0)^2}\eta_1^2 +$$
$$+(r+r_0)(r-3r_0)(\eta_2^2+\eta_3^2) + 2(r^2-r_0^2)g|_{\mathcal{H}}. \quad (8)$$

Метрики (7) и (8) были найдены в [23] для $M = S^4$.

Наконец, если положить $A_2 = -A_3$, то система (2.3) становится, вообще говоря, переопределенной. Если сложить второе и третье уравнения, то мы получим, что с необходимостью $A_2^2 = A_3^2 = B^2$. Положив для определенности $A_2 = -B$, $A_3 = B$, мы приходим к системе из двух уравнений:

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{3A_1^2 - 4B^2}{B^2}, \quad \frac{dB}{dt} = -\frac{A_1}{B}.$$

Как и ранее, делаем замену

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A_1}{B},$$

откуда находим $B(r) = -r$ и получаем следующее уравнение для A_1:

$$\frac{d(A_1)^2}{dr} + 6\frac{A_1^2}{r} = 8r.$$

Последнее уравнение интегрируется, и мы приходим к следующей метрике на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ (где $p = 4$ или $p = 2$, в зависимости от общего слоя M), имеющую группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8} + r^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8\right)\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + r^2 g|_{\mathcal{H}}. \quad (9)$$

Насколько нам известно, эта метрика была впервые описана в [24,25].

Теорема 8. [22] *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$, в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $Sp(1)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (4) с группой голономии $H \subset Spin(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) = B(0) > 0$, то метрика $\bar{g}$ имеет группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$ и совпадает с АК-метрикой (9);

2) для каждого набора начальных значений $A_1(0) = 0$, $0 < -A_2(0) = A_3(0) < B(0)$ существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ с группой голономии $Spin(7)$. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности S^1.

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_q$ вида (4) с параллельной $Spin(7)$-структурой, задаваемой формой Φ изометрична одной из указанных выше.

Теорема 9. [26] *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие. Тогда существует двупараметрическое семейство попарно негомотетичных римановых метрик на $\mathcal{M}_1$ вида (4) с группой голономии, содержащейся в $Spin(7)$, удовлетворяющих начальным условиям:*

$$A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0,$$
$$\dot{A}_1(0) = \dot{A}_2(0) = \dot{A}_3(0) = -1,$$
$$B(0) > 0, B'(0) = 0.$$

Семейство метрик параметризуется тройкой чисел $\lambda_3 \le \lambda_2 \le \lambda_3 < 0$, таких, что $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=\varepsilon^2$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$: для каждой такой тройки существует значение переменной $t = t_0$, при котором траектория (A_1, A_2, A_3) проходит через эту тройку, т. е.

$$A_1(t_0) = \lambda_1, A_2(t_0) = \lambda_2, A_3(t_0) = \lambda_3.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ метрика (4) является полной римановой метрикой с группой голономии $Spin(7)$ и асимптотически ведет себя как конус над M; при $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ мы также получаем семейство полных метрик с группой голономии $Spin(7)$, асимптотически ведущих себя как произведения конуса над твисторным пространством M и окружности постоянного радиуса. Наконец, в остальных случаях метрики полными не являются.

Любая другая полная регулярная метрика вида (4) с параллельной $Spin(7)$-структурой, заданной формой Φ на $\mathcal{M}_1$ совпадает с одной из метрик описанного семейства, с точностью до перестановок индексов переменных.

Полные метрики, о которых говорится в теореме описываются явным образом в (8).

Описанную конструкцию можно усложнить, если рассмотреть класс метрик, зависящих от пяти функциональных параметров. Более точно, пусть $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ — пространство Алоффа-Уоллаха со структурой 3-сасакиева 7-мерного многообразия. На $\bar{M} = M \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим риманову метрику следующего вида:

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 +$$
$$+B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2), \quad (10)$$

где t — координата на $\mathbb{R}_+$, $\{\eta_i\}$ — ортонормированный корепер на M, согласованный с 3-сасакиевой структурой (подробности во втором параграфе). Конусную особенность (при $t = 0$) пространства $\bar{M}$ разрешим следующим образом: затянем на уровне $\{t = 0\}$ каждую отвечающую ковектору η_1 окружность в точку. Полученное многообразие, профакторизованное по $\mathbb{Z}_2$, диффеоморфно $H/\mathbb{Z}_2$ — квадрату канонического комплексного линейного расслоения над пространством флагов в $\mathbb{C}^3$.

Теорема 10. [27] *При $0 \leq \alpha < 1$ каждая риманова метрика из семейства*

$$\bar{g}_\alpha = \frac{r^4(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}dr^2 + \frac{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}{r^2(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}\eta_1^2 + \\ +r^2(\eta_2^2+\eta_3^2)+(r^2+\alpha^2)(\eta_4^2+\eta_5^2)+ \\ +(r^2-\alpha^2)(\eta_6^2+\eta_7^2)$$

является полной гладкой римановой метрикой на $H/\mathbb{Z}_2$ с группой голономии $SU(4)$. При $\alpha = 0$ метрика $\bar{g}_\alpha$ изометрична метрике Калаби [28] с группой голономии $SU(4)$; при $\alpha = 1$ метрика $\bar{g}_\alpha$ изометрична метрике Калаби [28] с группой голономии $Sp(2) \subset SU(4)$ на $T^*\mathbb{C}P^2$.

Отметим, что метрика $\bar{g}_\alpha$ в Теореме 1 при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ имеет форму, отличную от [28]; метрики Калаби в таком виде исследовались в [25] и [29]. Метрика $\bar{g}_\alpha$ была также найдена в [31] при $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ как частное решение системы уравнений для метрик с группой голономии $Spin(7)$. В [31] метрика $\bar{g}_\alpha$ была обобщена на случай произвольной размерности, кратной четырем.

4.2. Группа голономии G_2

Пусть M — компактное семимерное 3-сасакиево многообразие с характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3 и характеристическими 1-формами η_1, η_2, η_3. Рассмотрим, как описано в параграфе 1.2, главное расслоение $\pi : M \to \mathcal{O}$ со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$, ассоциированным с M. В этом параграфе нас будет интересовать специальный случай, когда $\mathcal{O}$ дополнительно обладает кэлеровой структурой.

Поле ξ^1 порождает локально свободное действие окружности S^1 на M, и метрика на твисторном пространстве $\mathcal{Z} = M/S^1$ является метрикой Кэлера — Эйнштейна. Очевидно, что $\mathcal{Z}$ топологически представляет собой расслоенное пространство над $\mathcal{O}$ со слоем $S^2 = Sp(1)/S^1$ (либо $S^2 = SO(3)/S^1$), ассоциированное с π. Рассмотрим очевидное действие $SO(3)$ на $\mathbb{R}^3$. Двулистное накрытие $Sp(1) \to SO(3)$ задает также действие $Sp(1)$ на $\mathbb{R}^3$. Пусть теперь $\mathcal{N}$ — расслоенное пространство над $\mathcal{O}$, со слоем $\mathbb{R}^3$, ассоциированное с π. Легко видеть, что $\mathcal{O}$ вложено в $\mathcal{N}$ в качестве нулевого, а $\mathcal{Z}$ вложено в $\mathcal{N}$ в качестве сферического сечения. Пространство $\mathcal{N} \backslash \mathcal{O}$ диффеоморфно произведению $\mathcal{Z} \times (0, \infty)$. В общей ситуации $\mathcal{N}$ является семимерным орбифолдом, однако, если M — регулярное 3-сасакиево пространство, то $\mathcal{N}$ — семимерное многообразие.

Локально выберем ортонормированную систему $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$, порождающую аннулятор вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$, так что

$$\omega_1 = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7),$$
$$\omega_2 = 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5),$$
$$\omega_3 = 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6),$$

где формы ω_i отвечают кватернионно-кэлеровой структуре на $\mathcal{O}$. Ясно, что $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_7$ является ортонормированным базисом в M, аннулирующим одномерное слоение, порожденное полем ξ^1, поэтому можно рассмотреть метрику на $(0, \infty) \times \mathcal{Z}$ следующего вида:

$$\bar{g} = dt^2+A(t)^2(\eta_2^2+\eta_3^2)+B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2)+C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2), \quad (11)$$

где функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ определены на промежутке $(0, \infty)$.

Мы предполагаем, что $\mathcal{O}$ является кэлеровым орбифолдом, поэтому на нем существует замкнутая кэлерова форма, которую можно поднять на $\mathcal{H}$ и получить замкнутую форму ω. Локально, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$\omega = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 + \eta_6 \wedge \eta_7).$$

Теперь положим:

$$e^0 = dt,$$
$$e^i = A\eta_i, i = 2, 3,$$
$$e^j = B\eta_j, j = 4, 5,$$
$$e^k = C\eta_k, k = 6, 7,$$

и рассмотрим следующие формы Ψ_1 и Ψ_2:

$$\Psi_1 = -e^{023} - \frac{B^2+C^2}{4}e^0 \wedge \omega_1 - \frac{B^2-C^2}{4}e^0 \wedge \omega + \\ + \frac{BC}{2}e^3 \wedge \omega_2 - \frac{BC}{2}e^2 \wedge \omega_3,$$

$$\Psi_2 = C^2B^2\Omega - \frac{B^2+C^2}{4}e^{23} \wedge \omega_1 - \frac{B^2-C^2}{4}e^{23} \wedge \omega + \\ + \frac{BC}{2}e^{02} \wedge \omega_2 + \frac{BC}{2}e^{03} \wedge \omega_3.$$

Очевидно, что формы Ψ_1, Ψ_2 являются глобально определенными и не зависят от локального выбора η_i, при этом локально совпадают с формами Ψ_0 и $*\Psi_0$ (из раздела 2). Таким образом, форма Ψ_1 задает G_2-структуру на $\mathcal{N}$ и однозначно определяет некоторую метрику, которая локально совпадает с (11). В соответствии с предложением 5 параллельность таким образом построенной G_2-структуры равносильна уравнениям замкнутости и козамкнутости (2).

Теорема 11. [32] *Если $\mathcal{O}$ обладает кэлеровой структурой, то метрика (2.19) на $\mathcal{N}$ является гладкой метрикой с группой голономии G_2, заданной формой Ψ_1 тогда и только тогда, когда функции A, B, C, определенные на промежутке*

$[t_0, \infty)$, *удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} A' &= \tfrac{2A^2 - B^2 - C^2}{BC}, \\ B' &= \tfrac{B^2 - C^2 - 2A^2}{CA}, \\ C' &= \tfrac{C^2 - 2A^2 - B^2}{AB} \end{aligned} \tag{12}$$

с начальными условиями

(1) $A(t_0) = 0, |A_1'(t_0)| = 2$*;*

(2) $B(t_0), C(t_0) \neq 0, B'(t_0) = C'(t_0) = 0$*;*

(3) функции A, B, C *знакоопределены на промежутке* (t_0, ∞).

Система (12) имеет единственное решение, удовлетворяющее вышеприведенным условиям регулярности, и это решение отвечает следующей метрике с группой голономии G_2*:*

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^4}{r^4}} + r^2 \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)(\eta_2^2 + \eta_3^2) +$$

$$+2r^2 \left(\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2 + \eta_7^2\right). \tag{13}$$

Проинтегрируем систему (12): $(AB)' = -2C$, откуда

$$\frac{(AB)'}{ABC} = -\frac{2}{AB}.$$

Сделаем замену переменной

$$dr = ABC dt,$$

тогда непосредственным интегрированием получаем:

$$A^2B^2 = -4(r - r_3),$$

где r_3 — константа интегрирования. Совершенно аналогично

$$A^2C^2 = -4(r - r_2), B^2C^2 = -8(r - r_1).$$

Таким образом, метрика (11) определена при $r \in (-\infty, \min\{r_1, r_2, r_3\})$. Далее, условия регулярности означают, что $A(t_0) = 0$, т.е. константы r_3 и r_2 равны, причем отвечают при замене переменной константе t_0. Но это значит, что $A^2B^2 = A^2C^2$ при всех r, откуда получаем $B(r) = \pm C(r)$. Непосредственно проверяется, что система (12) инвариантна при замене $C \mapsto -C, t \mapsto -t$, поэтому остается исследовать случай $B = C$.

При $B = C$ система сводится к паре уравнений

$$A' = 2\left(\frac{A^2}{B^2} - 1\right), \ B' = -2\frac{A}{B},$$

решение которой дает метрику (13). Условия регулярности для этой метрики выполнены, и эта гладкая метрика была найдена впервые в [17] для случая $M = SU(3)/S^1$ и $M = S^7$ (отметим, что при $B = C$ не обязательно требовать кэлеровости $\mathcal{O}$). Теорема доказана.

В общем случае $B \neq C$ система (12) также интегрируется [33], однако получающиеся решения не удовлетворяют условиям регулярности.

Литература

[1] Joyce, D. D. *Compact 8-manifolds with holonomy Spin(7)* / D. D. Joyce // Invent. Math. – 1996. – Vol. 123. – P. 507 – 552.

[2] Joyce, D. *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G2. I* / D. Joyce // J. Differential Geometry. – 1996. – Vol. 43. – P. 291 – 328.

[3] Joyce, D. *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G2. II* / D. Joyce // J. Differential Geometry. – 1996. – Vol. 43. – P. 329 – 375.

[4] Joyce, D. D. *A new construction of compact 8-manifolds with holonomy Spin(7)* / D. D. Joyce // J. Differential Geom. – 1999. – Vol. 53. – P. 89 – 130.

[5] Kovalev, A. *Twisted connected sums and special Riemannian holonomy* / A. Kovalev // J. reine. angew. Math. – 2003. – Vol. 565. – P. 125 – 160.

[6] Kovalev, A. *Asymptotically cylindrical 7-manifolds of holonomy G2 with applications to compact irreducible G2-manifolds* / A. Kovalev // Ann. Global Anal. Geom. – 2010. – Vol. 38. – P. 221 – 257.

[7] Clancy, R. *New Examples of Compact Manifolds with Holonomy Spin(7)* / Robert Clancy // arXiv:1012.3571v1 [math.DG]

[8] Borel, A. *Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes* / A. Borel, A. Lichnerowicz // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1952. – V. 234. P. 1835 – 1837.

[9] Wilking, B. *On compact Riemannian manifolds with noncompact holonomy groups* / B. Wilking // J. Diff. Geom. – 1999. – V. 52, no. 2. – P. 223 – 257.

[10] De Rham, G. *Sur la reductibilité d'un espace de Riemann* / G. De Rham // Comm. Math. Helv. – 1952. – V. 26. – P. 328 – 344.

[11] Ambrose, W. *A Theorem on holonomy* / W. Ambrose, I. M. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – V. 75, no. 3. – P. 428 – 443.

[12] Berger, M. *Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variètès Riemanniennes* / M. Berger // Bull. Soc. Math. France. – 1955. – V. 83. – P. 279 – 330.

[13] Newlander, A. *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds* / A. Newlander, L. Nirenberg // Ann. of Math. – 1957. – Vol. 65. – P. 391 – 404.

[14] Iwamoto, H. *On the structure of Riemannian spaces whose holonomy fix a null system* / H. Iwamoto // Tohoku Math. J. – 1950. – Vol. 1. – P. 109 – 135.

[15] Salamon, S. M. *Quaternionic Käler manifolds* / S. M. Salamon // Inventiones mathematicae. – 1982. – Vol. 67. – P. 143 – 171.

[16] Salamon, S. M. *Quaternion-Käler geometry* / S. M. Salamon // In C. LeBrun and M. Wang, editors, Essays on Einstein manifolds. – Vol. V of Surveys in Differential Geometry. – International Press. – 2000. P. 83 – 122.

[17] Bryant, R. L. *On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy* / R. L. Bryant, S. L. Salamon // Duke Math. J. – 1989. – Vol. 58, no. 3. – P. 829 – 850.

[18] Joyce, D. *Compact manifolds with special holonomy* / D. Joyce. – Oxford Science Publications, 2000.

[19] Gray, A. *Weak holonomy groups* / A. Gray // Math. Z. – 1971. – Vol. 123. – P. 290 – 300.

[20] Алексеевский, Д. В. *Римановы многообразия с необычными группами голономии* / Д. В. Алексеевский // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2, № 2. – С. 1 – 10.

[21] Boyer, C. *3-Sasakian manifolds* / C. Boyer, K. Galicki // Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds. Surv. Differ. Geom. – VI, Int. Press. – Boston: MA, 1999. – P. 123 – 184.

[22] Базайкин, Я. В. *О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии* $Spin(7)$ / Я. В. Базайкин // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 11–32.

[23] Cvetic, M. *New Complete Non-compact* $Spin(7)$ *Manifolds* / M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope // Nucl. Phys. B. – 2002. – Vol. 620, no. 1–2. – P. 29 – 54.

[24] Bérard-Bergery, L. *Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein* / L. Bérard-Bergery // Publications de l'Institut E. Cartan. – 1982. – no. 4 (Nancy). – P. 1 – 60.

[25] Page, D. *Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles* / D. Page, C. Pope // Classical and Quantum Gravity. – 1987. – Vol. 4. – P. 213 – 225.

[26] Базайкин, Я. В. *Некомпактные римановы пространства с группой голономии* $Spin(7)$ *и 3-сасакиевы многообразия* / Я. В. Базайкин // Геометрия, топология и математическая физика. I. Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова. Труды МИАН. – 2008. – Т. 263. – С. 6 – 17.

[27] Базайкин, Я. В. $Spin(7)$*-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии* $SU(4)$ / Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 4. – С. 3 – 30.

[28] Calabi, E. *Metriques kahleriennes et fibres holomorphes* / E. Calabi // Ann. Ecol. Norm. Sup. – 1979. – Vol. 12. – P. 269 – 294.

[29] Cvetic, M. *Hyper-Kähler Calabi Metrics,* L^2 *Harmonic Forms, Resolved M2-branes, and* AdS_4/CFT_3 *Correspondence* / M. Cvetic, G.W. Gibbons, H. Lu, C.N. Pope // Nucl. Phys. B. – 2001. – Vol 617. – P. 151 – 197.

[30] Kanno, H. *On Spin(7) holonomy metric based on SU(3)/U(1):II* / H. Kanno, Y. Yasui // J. Geom. Phys. – 2002. – Vol. 43. – P. 310 – 326.

[31] Малькович, Е. Г. *О новых явных римановых метриках с группой голономии* $SU(2(n+1))$/ Е. Г. Малькович // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 1. – С. 95 -– 99.

[32] Базайкин, Я. В. *Метрики с группой голономии* G_2*, связанные с 3-сасакиевым многообразием* / Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 3 – 7.

[33] Cvetic, M. *Cohomogeneity One Manifolds of* $Spin(7)$ *and* $G(2)$ *Holonomy* / M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol. 65, no. 10. – 29 p.

УДК 511.1, 515.124.3

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДВОИЧНЫХ И ТРОИЧНЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева

SOME APPLICATIONS OF BINARY AND TERNARY SYSTEMS OF NUMERATION

V. N. Berestovskii, I. A. Zubareva

Посредством двоичных и троичных систем счисления решаются две задачи: поиск конечных наборов гирь данного суммарного веса $m \in \mathbb{N}$ (кг), в том числе с наименьшим числом гирь, таких, что груз любого веса $n \in \mathbb{N} \cap [1, m]$ (кг) можно взвесить на весах, пользуясь односторонним или двусторонним расположением гирь; координатное описание салфетки и ковра Серпинского, губки Менгера. На основе решения второй задачи доказано, что ограничение евклидовой метрики на любое из этих трех множеств и индуцированная этим ограничением внутренняя метрика билипшицево эквивалентны. Дано прямое доказательство того факта, что размерность Хаусдорфа каждого из этих множеств совпадает с их фрактальной размерностью.

By means of binary and ternary number systems, the authors solve two problems: the search of finite collections of weights with any given total weight $m \in \mathbb{N}$ (kg), in particular with minimal number of weights, such that one can weigh a load of any weight $n \in \mathbb{N} \cap [1, m]$ (kg), using one-sided or two-sided placement of weights; a coordinate description of Sierpiński gasket and carpet, Menger sponge. On the ground of solution of the second problem, it is proved that restriction of the Euclidean metric to any of these three sets and inner metric, induced by this restriction, are bi-Lipschitz equivalent. It is given a direct proof of known fact that Hausdorff dimensions of all these sets coincide with their fractal dimensions.

Ключевые слова: задача о гирях, двоичная система счисления, троичная (симметричная) система счисления, салфетка Серпинского, ковер Серпинского, губка Менгера, внутренняя метрика, билипшицева эквивалентность, мера Хаусдорфа, размерность Хаусдорфа, фрактальная размерность.

Keywords: weights problem, binary number system, ternary (symmetric) number system, Sierpiński gasket, Sierpiński carpet, Menger sponge, inner metric, bi-Lipschitz equivalence, Hausdorff measure, Hausdorff dimension, fractal dimension.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08-01-00067), а также поддержана проектом "Квазиконформный анализ и геометрические аспекты теории операторов" и Советом по ведущим научным школам Российской Федерации (код проекта НШ-6613.2010.1).

1. Введение. Основные результаты

Предположим, что в нашем распоряжении находятся рычажные или чашечные весы и конечный набор C гирь. Пусть каждая из этих гирь имеет в некоторой фиксированной единице измерения (скажем, кг) вес, равный некоторому натуральному числу. Естественно, возникают следующие вопросы:

1) Какие цельные тела (т. е. тела, которые нельзя разбить на части) можно взвесить, пользуясь данным набором C?

2) Как подобрать набор C α) наименьшего возможного суммарного веса, и β) с наименьшим числом гирь, чтобы можно было взвесить груз любого веса n (кг) из заданного отрезка $[1, m]$ натурального ряда чисел?

3) Если C — решение задачи 2), то как найти число возможных способов взвешивания груза данного веса n (кг), $n \in [1, m]$?

Заметим, что каждую гирю из множества C можно использовать только один раз. Естественно ожидать, что эти задачи имеют различные решения, если гири а) разрешено класть только на одну чашу весов, или же б) можно класть на обе чаши весов. Заметим, что задачи 2) и 3) являются задачами целочисленного программирования.

Естественно назвать сформулированную выше задачу 2) “задачей о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных (чашечных) весах”, или, более коротко, “задачей о гирях”. Интересна история этой задачи для $m = 40$ в случае б). Впервые ее постановка и решение появились в книге Фибоначчи “Liber Abaci” (1202 г.). Затем “задача о гирях” появилась в “Сборнике приятных и занимательных задач” (1612 г.) французского математика Баше де Мизириака. В 1902 – 1907 гг. ею по долгу службы интересовался Д. И. Менделеев, будучи в то время директором Главной палаты мер и весов России. Поэтому в русской историко-математической литературе она известна также как “задача Баше-Менделеева”. Вот один из вариантов ее постановки.

Задача. *Продавец для взвешивания товара пользуется чашечными весами и четырьмя гирями общим весом 40 кг. Известно, что, используя различные комбинации гирь, можно взвесить любой груз, вес которого выражается целым числом килограммов (от 1 до 40 кг). Сколько весит каждая гиря?*

Применяя логические рассуждения и метод перебора, нетрудно понять, что эти гири имеют вес 1, 3, 9, 27 кг соответственно. Заметим, что число $40 = 1+3+9+27$ есть сумма четырех первых членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем 3.

В параграфах 2 и 3 решается общая задача о гирях для случаев а) и б) соответственно. Случай а) более прост и связан с двоичной системой счисления. Случай б) связан с так называемой симметричной троичной системой счисления. Интересные сведения об этой системе счисления можно найти в книге А. П. Стахова [9].

Замечание 1. В общем случае не решена задача 3) и не найдено число решений задачи 2). По мнению авторов, это трудные, но интересные комбинаторные задачи.

В параграфе 4, с использованием стандартных троичных (соответственно двоичных) систем счисления с отрицательными степенями, дано описание классических фракталов: ковра Серпинского C, губки Менгера M (соответственно салфетки Серпинского S) в декартовых прямоугольных (соответственно барицентрических) координатах.

В параграфе 6 на основе результатов параграфа 5 доказано (насколько известно авторам, впервые), что ограничение евклидовой метрики из объемлющей плоскости или пространства на любой из рассматриваемых классических фракталов и индуцированная этим ограничением внутренняя метрика билипшицево эквивалентны. В статье [6] доказан интересный факт: каждое из этих трех пространств с соответствующей внутренней метрикой изометрично пространству орбит одного и того же геодезически и метрически полного $\mathbb{R}$-дерева валентности континуум в каждой точке по соответствующей подгруппе изометрий, снабженному фактор-метрикой.

В параграфе 7 с использованием соответствующей меры Хаусдорфа дано прямое доказательство того известного факта, что размерность Хаусдорфа любого из рассматриваемых классических фракталов совпадает с их так называемой *фрактальной размерностью*. Отметим, что другой подход к этому вопросу в более общих ситуациях излагается в работе [7].

Следует заметить, что в литературе существуют не совпадающие в общем случае понятия фрактальной размерности. Основатель фрактальной геометрии Б. Мандельброт считает это понятие синонимом размерности Хаусдорфа [8], (а *фракталом* во многих случаях называет (сепарабельное) метрическое пространство, размерность Хаусдорфа которого больше его топологической размерности). Фактически же для каждого рассматриваемого им компактного самоподобного фрактального метрического пространства (X, d) он под этим понимает число $r(X) = \log N/\log k$, где $k \geq 2$ — наименьшее натуральное число, такое, что X допускает метрическое (само)подобие в себя с коэффициентом $1/k$, а N — (минимальное) число различных самопободобных копий пространства X с этим коэффициентом (покрывающих пространство X). При этом он нигде не доказывает, что число $r(X)$ совпадает с размерностью Хаусдорфа пространства X. Автор книги [4] под фрактальной размерностью вполне ограниченного метрического пространства понимает его *верхнюю емкость*. На самом деле это понятие эквивалентно понятию *грубой размерности*, см. например [3]. Хаусдорфова размерность метрического пространства всегда не больше его грубой размерности. В [3] приведены примеры компактных метрических пространств с внутренней метрикой, для которых грубая размерность строго больше размерности Хаусдорфа. Хаусдорфова и грубая размерности всех рассматриваемых в этой статье фракталов совпадают.

Под фрактальной размерностью в этой статье понимается число Мандельброта $r(X)$.

2. Обобщенная "задача о гирях" с односторонним расположением гирь и двоичная система счисления

В этом параграфе рассмотрим существенно более легкую задачу для случая, когда разрешается класть гири только на одну чашу весов.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\{m_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, s$ — конечная неубывающая последовательность натуральных чисел. Тогда любое натуральное число*

$$n, \quad n \leq m := \sum_{k=0}^{s} m_k \qquad (1)$$

можно (может быть, не единственным образом) представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k, \quad a_k = 0, 1;\ k = 0, 1, \ldots, s \qquad (2)$$

тогда и только тогда, когда

$$m_0 = 1 \quad \text{и} \quad m_k \leq \sum_{l=0}^{k-1} m_l + 1, \quad \forall \quad k = 1, \ldots s. \qquad (3)$$

Доказательство. Докажем достаточность индукцией по s. При $s = 0$ натуральное число n, удовлетворяющее условию (1), равно $1 = m_0$.

Предположим теперь, что для некоторого $s = l \in Z_+$ всякое натуральное число n, удовлетворяющее условию (1), можно представить в виде (2). Покажем, что это утверждение верно и для $s = l + 1$. Заметим, что число 0 представимо в виде (2). Если $n \leq \sum_{j=0}^{s-1} m_j$, то по индукционному предположению существуют числа $a_j = 0, 1$; $j = 0, 1, \ldots, s-1$, $a_s = 0$, такие, что $n = \sum_{j=0}^{s} a_j m_j$.

Пусть $\sum_{j=0}^{s-1} m_j + 1 \leq n \leq \sum_{j=0}^{s} m_j$. Тогда на основании (3)

$$0 \leq \sum_{j=0}^{s-1} m_j + 1 - m_s \leq n - m_s \leq \sum_{j=0}^{s-1} m_j.$$

Поэтому по индукционному предположению $n - m_s$ можно представить в виде (2). Следовательно, существуют числа $a_j = 0, 1$; $j = 0, 1, \ldots, s-1$, $a_s = 1$, такие, что $n = \sum_{j=0}^{s} a_j m_j$.

Докажем необходимость. Покажем сначала, что $m_0 = 1$. По условию

$$m - 1 = \sum_{k=0}^{s} m_k - 1 = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k,$$

где $a_k = 0, 1$; $k = 0, \ldots, s$ и хотя бы одно из чисел a_k должно быть равным 0. Это было бы невозможно в случае $m_0 \neq 1$, так как тогда $2 \leq m_0 \leq m_k$ для всех $k = 0, \ldots, s$, следовательно, $m-1 \leq m-2$, противоречие.

Предположим теперь, что неравенство в (3) не выполнено для некоторого k, $1 \leq k \leq s$. Тогда

$$\sum_{l=0}^{k-1} m_l < m_k - 1 = \sum_{j=0}^{s} a_j m_j,$$

где $a_j = 0, 1$; $j = 0, \ldots, s$. Следовательно, по меньшей мере один из коэффициентов a_j, $k \leq j \leq s-1$, равен 1; обозначим его через a_i. Но тогда $\sum_{j=0}^{s-1} a_j m_j \geq m_i > m_k - 1$, что невозможно.

Предложение 1. *Пусть*

$$m = \sum_{k=0}^{s} m_k = \sum_{l=0}^{j} 2^l = 2^{j+1} - 1, \tag{4}$$

где $m_0 \leq \cdots \leq m_s$ — натуральные числа, и любое натуральное число n, $n \leq m$, можно представить в виде (2). Тогда $s \geq j$, причем из равенства $s = j$ следует, что $m_k = 2^k$; $k = 0, \ldots, s$. В последнем случае для каждого натурального числа n, $n \leq m$, существует единственное представление в виде (2).

Доказательство. На основании теоремы 1 выполнены соотношения (3). Следовательно,

$$m_0 = 1, m_1 \leq 2,\ m_2 \leq 4, \ldots,\ m_s \leq 2^s. \tag{5}$$

Тогда

$$2^{j+1} - 1 = m = \sum_{k=0}^{s} m_k \leq \sum_{k=0}^{s} 2^k = 2^{s+1} - 1,$$

что равносильно $s \geq j$, причем из равенства $s = j$ вытекает, что $m_k = 2^k$; $k = 0, \ldots, s$. В последнем случае представление в виде (2) любого натурального числа n, $n \leq m$, есть единственное представление n в двоичной системе счисления.

Замечание 2. Из предложения 1 следует, что при расположении гирь на одной чаше весов минимальная по количеству гирь и суммарному весу система для взвешивания грузов весом n кг, где n — любое натуральное число, не превосходящее $2^j - 1$, единственна и состоит из j гирь весом $1, 2, \ldots, 2^{j-1}$ кг.

Предложение 2. *Пусть m, j - натуральные числа, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{l=0}^{j-1} 2^l < m < \sum_{l=0}^{j} 2^l. \tag{6}$$

Тогда любое натуральное число n, $n \leq m$, можно представить в виде

$$n = \sum_{l=0}^{j-1} a_l 2^l + a_j p, \tag{7}$$

где

$$p = m - \sum_{l=0}^{j-1} 2^l, \quad a_l = 0, 1;\ l = 0, \ldots, j.$$

Такое представление не единственно тогда и только тогда, когда $p \leq n \leq 2^j - 1$, причем p не является степенью двойки с целым показателем или в разложении числа $n - p$ по степеням двойки присутствует p.

Доказательство. Из условия (6) вытекает, что $p \leq 2^j - 1$. Следовательно, последовательность чисел $m_k = 2^k$; $k = 0, \ldots, j-1$; $m_j = p$, с точностью до возможной перестановки индексов, не убывает и удовлетворяет условиям (3). Тогда первое утверждение вытекает из теоремы 1.

Ясно, что соответствующее представление числа n единственно, если $n < p$ или $2^j - 1 < n$. Пусть $p \leq n \leq 2^j - 1$. Если p не является степенью двойки, то имеются два различных представления числа n: единственное представление вида (7) с $a_j = 0$ и единственное представление вида (7) с $a_j = 1$. Если p — степень двойки, то $p = 2^s$, $1 \leq s \leq j-1$, и эти два представления совпадают тогда и только тогда, когда в разложении числа $n-p$ по степеням двойки отсутствует p.

Предложение 3. *Пусть натуральное число m, удовлетворяющее условию (6), представлено в виде суммы $m = \sum_{k=0}^{s} m_k$ натуральных чисел, и каждое натуральное число n, $n \leq m$, можно представить в виде (2). Тогда $s \geq j$. Если $s = j$, то с точностью до перестановки чисел*

$$m_k = 2^k;\ k = 0, \ldots, j-1;\ m_j = p, \tag{8}$$

где p определено формулой (7), тогда и только тогда, когда $p = 2^j - 1$ или $m = 4$.

Доказательство. Можно считать, что последовательность m_k; $k = 0, 1, \dots, s$ не убывает. Тогда аналогично доказательству предложения 1 выполнены соотношения (5). Следовательно,

$$2^j - 1 = \sum_{l=0}^{j-1} 2^l < m = \sum_{k=0}^{s} m_k \leq \sum_{k=0}^{s} 2^k = 2^{s+1} - 1.$$

Поэтому $s \geq j$.

Рассмотрим случай $s = j$. Ясно, что $1 \leq p \leq 2^j - 1$. Если хотя бы одно из первых $j - 1 \geq 1$ неравенств в (5) строгое, то вследствие теоремы 1,

$$m_j \leq \sum_{k=0}^{j-1} 2^k = 2^j - 1,$$

$$m = \sum_{k=0}^{j} m_k \leq 2^{j+1} - 3, \ p \leq 2^j - 2.$$

Отсюда вытекает, что в случае $p = 2^j - 1$, $j \geq 2$, соблюдаются равенства (8). Ясно, что то же верно и в случае $j = 1$, $p = 2^j - 1 = 1$.

Предположим теперь, что $p \leq 2^j - 2$ (заметим сразу, что отсюда вытекает неравенство $j \geq 2$). Ясно тогда, что последовательность чисел $\{m_0 = 1, \dots, m_{j-2} = 2^{j-2}, \ m_{j-1} = 2^{j-1} - 1, \ m_j = p + 1 \leq 2^j - 1\}$, с точностью до перестановки индексов, не убывает, удовлетворяет (3) и на основании теоремы 1 удовлетворяет условию предложения 3. Очевидно, что если $p \neq 2^{j-1} - 1$ (тогда $m \neq 4$), то никакая перестановка этих чисел не совпадет с (8).

Пусть теперь $p = 2^{j-1} - 1$. Случай $j = 2$ соответствует равенствам $p = 1$, $m = 4$, когда, очевидно, существует единственный неупорядоченный набор чисел $\{m_0 = 1, \ m_1 = 2, \ m_2 = p = 1\}$, удовлетворяющий условию предложения 3. Если $j > 2$, то $p \geq 2$ и ясно тогда, что последовательность чисел $\{m_0 = 1, \dots, m_{j-2} = 2^{j-2}, \ m_{j-1} = p - 1 = 2^{j-1} - 2, \ m_j = 2^{j-1} + 1\}$ не убывает, удовлетворяет (3) и на основании теоремы 1 удовлетворяет условию предложения 3. Очевидно, что никакая перестановка этих чисел не совпадет с (8).

3. Обобщенная "задача о гирях" с двусторонним расположением гирь и симметричная троичная система счисления

В этом параграфе рассмотрим задачу для случая, когда разрешается класть гири на обе чаши весов.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $\{m_k\}, k = 0, 1, \dots, s$ — конечная неубывающая последовательность натуральных чисел. Тогда любое натуральное число*

$$n, \quad n \leq m := \sum_{k=0}^{s} m_k, \tag{9}$$

можно (может быть, не единственным образом) представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k, \quad a_k = 0, \pm 1; \ k = 0, 1, \dots, s \tag{10}$$

тогда и только тогда, когда

$$m_0 = 1 \quad \text{и} \quad m_k \leq 2 \sum_{l=0}^{k-1} m_l + 1 \tag{11}$$

для каждого $k = 1, \dots s$.

Доказательство. Докажем необходимость. Покажем сначала, что $m_0 = 1$. По условию

$$m - 1 = \sum_{k=0}^{s} m_k - 1 = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k,$$

где $a_k = 0, \pm 1$; $k = 0, \dots, s$ и где хотя бы одно из чисел a_k должно быть равным 0 или -1. Это было бы невозможно в случае $m_0 \neq 1$, так как тогда $2 \leq m_0 \leq m_k$ для всех $k = 0, \dots, s$, следовательно, $m - 1 \leq m - 2$ – противоречие.

Предположим теперь, что неравенство в (11) не выполнено для некоторого k, $1 \leq k \leq s$. Тогда

$$m - m_k < \sum_{j=k}^{s} m_j - \sum_{j=0}^{k-1} m_j - 1 = \sum_{j=0}^{s} a_j m_j, \tag{12}$$

где $a_j = 0, \pm 1$; $j = 0, \dots, s$.

Пусть хотя бы один из коэффициентов a_j, $k \leq j \leq s$, отличен от 1; обозначим его a_i. Тогда

$$m - m_k < \sum_{j=0}^{s} a_j m_j \leq m - m_i \leq m - m_k$$

вследствие (12), что невозможно. Следовательно, $a_j = 1$; $j = k, \dots, s$, и

$$\sum_{j=0}^{k-1} m_j + 1 = -\sum_{j=0}^{k-1} a_j m_j \leq \sum_{j=0}^{k-1} m_j$$

на основании (12) – противоречие.

Доказательство достаточности теоремы 2 (индукцией по s) совершенно аналогично доказательству достаточности теоремы 1.

Определение 1. *Симметричной (или уравновешенной) троичной системой счисления называется целочисленная позиционная система счисления с основанием 3, в которой для обозначения разрядов чисел используются цифры -1, 0, 1.*

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $m = \frac{3^{j+1}-1}{2}$ для некоторого $j \in Z_+$. Тогда любое натуральное число n, $n \leq m$, можно единственным образом представить в виде*

$$n = \sum_{l=0}^{j} a_l 3^l, \quad a_l = 0, \pm 1; \ l = 0, \dots, j. \tag{13}$$

Другими словами, число n единственным образом представимо в симметричной троичной системе счисления в виде $n = a_j a_{j-1} \dots a_0$, где $a_l = 0, \pm 1$; $l = 0, \dots, j$.

Предложение 5. *Пусть*

$$m = \sum_{k=0}^{s} m_k = \sum_{l=0}^{j} 3^l = \frac{3^{j+1}-1}{2}, \tag{14}$$

где $m_0 \le m_1 \le \dots \le m_s$ — натуральные числа, и любое натуральное число n, $n \le m$, можно представить в виде (10). Тогда $s \ge j$, причем из равенства $s = j$ следует, что $m_k = 3^k; k = 0, \dots, s$.

Доказательство. Вследствие теоремы 2 выполнены соотношения (11). Поэтому

$$m_0 = 1,\ m_1 \le 3,\ m_2 \le 9, \dots,\ m_s \le 3^s. \tag{15}$$

Тогда

$$\frac{3^{j+1}-1}{2} = m = \sum_{k=0}^{s} m_k \le \sum_{k=0}^{s} 3^k = \frac{3^{s+1}-1}{2},$$

что равносильно неравенству $s \ge j$, причем из равенства $s = j$ вытекает, что $m_k = 3^k$; $k = 0, \dots, s$.

Замечание 3. Из предложения 5 следует, что если разрешено класть гири на обе чаши весов, то минимальная по количеству гирь и суммарному весу система для взвешивания грузов весом n кг, где n — любое натуральное число, не превосходящее $\frac{3^j-1}{2}$, единственна и состоит из j гирь весом $1, 3, \dots, 3^{j-1}$ кг.

Предложение 6. *Пусть натуральное число m, удовлетворяющее условию*

$$\sum_{l=0}^{j-1} 3^l < m < \sum_{l=0}^{j} 3^l, \tag{16}$$

представлено в виде суммы $m = \sum_{k=0}^{s} m_k$ натуральных чисел, и каждое натуральное число n, $n \le m$, можно представить в виде (10). Тогда $s \ge j$. Если $s = j$, то с точностью до перестановки чисел

$$m_k = 3^k;\ k = 0, \dots, j-1;\ m_j = p = m - \sum_{l=0}^{j-1} 3^l, \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда $p = 3^j - 1$ или $p = 3^j - 2$.

Доказательство. Можно считать, что последовательность $\{m_k\}, k = 0, 1, \dots, s$, не убывает. Тогда аналогично доказательству предложения 5 выполнены соотношения (15). Следовательно,

$$\frac{3^j-1}{2} = \sum_{l=0}^{j-1} 3^l < m = \sum_{k=0}^{s} m_k \le \sum_{k=0}^{s} 3^k = \frac{3^{s+1}-1}{2}.$$

Поэтому $s \ge j$.

Пусть $s = j$. Ясно, что $1 \le p \le 3^j - 1$. Если хотя бы одно из первых $j - 1 \ge 1$ неравенств в (11) строгое, то, вследствие теоремы 2,

$$m_{j-1} \le 2 \sum_{l=0}^{j-2} 3^l = 3^{j-1} - 1,$$

$$m_j \le 2 \left(\sum_{l=0}^{j-2} 3^l + m_{j-1} \right) + 1 = 3^j - 2.$$

Поэтому

$$m = \sum_{l=0}^{j} m_l \le \frac{3^{j+1}-1}{2} - 3,\ p \le 3^j - 3.$$

Отсюда вытекает, что если $j \ge 2$ и $p = 3^j - 2$ или $p = 3^j - 1$, то $m_k = 3^k$; $k = 0, \dots, j-1$, т. е. соблюдаются равенства (17). Ясно, что то же верно в случаях $j = 1$, $p = 3^j - 2 = 1$ и $j = 1$, $p = 3^j - 1 = 2$.

Предположим теперь, что $p \le 3^j - 3$ (заметим сразу, что отсюда вытекает неравенство $j \ge 2$). Ясно тогда, что последовательность чисел $\{m_0 = 1, \dots, m_{j-2} = 3^{j-2},\ m_{j-1} = 3^{j-1} - 1,\ m_j = p+1\}$, с точностью до перестановки индексов, не убывает, удовлетворяет условиям (10) и на основании теоремы 2 удовлетворяет условию предложения 6. Очевидно, что если $p \ne 3^{j-1} - 1$, то никакая перестановка этих чисел не совпадет с (17).

Пусть теперь $p = 3^{j-1} - 1$. Так как $j \ge 2$, то $p \ge 2$, и последовательность чисел $\{m_0 = 1, \dots, m_{j-2} = 3^{j-2},\ m_{j-1} = 3^{j-1} + 1,\ m_j = p - 1 = 3^{j-1} - 2\}$, с точностью до перестановки индексов, не убывает, удовлетворяет условиям (11) и на основании теоремы 2 удовлетворяет условию предложения 6. Очевидно, что никакая перестановка этих чисел не совпадет с (17).

4. Классические фракталы и системы счисления

Салфетку Серпинского S можно определить (см. стр. 207 книги [1]) как (единственное) подмножество равностороннего треугольника S_0 со сторонами единичной длины на координатной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, являющееся пересечением счетного семейства замкнутых множеств S_i, $i = 0, 1, 2, \dots$, где каждое множество S_i состоит из 3^i (замкнутых) равносторонних треугольников $S_{i,j}$, имеющих стороны длины $1/2^i$ и попарно непересекающиеся внутренности, причем каждое множество S_i, $i = 1, 2, \dots$, получается из S_{i-1} удалением из каждого треугольника $S_{i-1,j}$ внутренности (замкнутого) равностороннего треугольника со сторонами длины $1/2^i$, имеющего с каждой стороной треугольника $S_{i-1,j}$ единственную общую точку.

Будем понимать точки из $\mathbb{R}^2$ как векторы. Пусть A, B, C — вершины треугольника S_0. Напомним, что каждую точку $X \in S_0$ можно единственным образом представить в виде

$$X = aA + bB + cC, \tag{18}$$

где

$$a + b + c = 1;\ a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0;$$

и (a, b, c) — *барицентрические координаты* точки X в треугольнике S_0.

Теорема 3. *$X \in S$ тогда и только тогда, когда $X \in S_0$ и двоичные представления барицентрических координат (a, b, c) точки X обладают следующим свойством: для каждого натурального числа n,*

$$\max(a_n, b_n, c_n) = 1 \quad \text{или} \quad a_k = b_k = c_k = 0 \tag{19}$$

для всех $k \geq n$.

Доказательство. Легко видеть, что точка $X = aA + bB$, где $a + b = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, принадлежит отрезку $[A, B]$ и разбивает его в отношении $b : a$. Отсюда легко вывести, что множество всех точек $X \in S_0$ с барицентрическими координатами (a, b, c), где $a = a_0$ постоянно, есть отрезок в S_0, параллельный стороне BC треугольника S_0, концы которого разбивают отрезки $[B, A]$ и $[C, A]$ в отношении $a_0 : (1 - a_0)$. Аналогичные утверждения верны для барицентрических координат b и c. Как следствие, каждое из уравнений $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ определяет в барицентрических координатах соответствующую сторону треугольника S_0, а каждое из уравнений $a = 1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$ — соответствующую среднюю линию треугольника S_0.

Ясно, что условие $X \in S_0$ необходимо. Докажем индукцией по n необходимость условия (19) для барицентрических координат (a, b, c) точки X.

Предположим сначала, что $n = 1$ и $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ для двоичной записи барицентрических координат (a, b, c) некоторой точки $X \in S$. Если бы $\max(a_0, b_0, c_0) = 0$, то $\max(a, b, c) < 1/2$, что означает, что точка X лежит внутри треугольника, ограниченного средними линиями $a = 1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$ треугольника S_0, следовательно, $X \notin S_1$ и $X \notin S$. Поэтому $\max(a_0, b_0, c_0) = \max(a, b, c) = 1$, т.е. X есть одна из вершин A, B, C треугольника S_0. Пусть, например, это вершина A. Тогда $a = 1, b = 0, c = 0$. Следовательно, $a_k = b_k = c_k = 0$ для всех $k \geq 1$.

Предположим, что необходимость условия (19) доказана для всех $n \in N$, не превосходящих натурального числа l, и пусть $n = l + 1$. Если $\max(a_l, b_l, c_l) = 0$, то вследствие индукционного предположения $a_k = b_k = c_k = 0$ для всех $k \geq l$, в частности, для всех $k \geq l + 1$. Поэтому можно считать, что $\max(a_l, b_l, c_l) = 1$. Положим $\alpha = a_0, a_1 \ldots a_l$, $\beta = b_0, b_1 \ldots b_l$, $\gamma = c_0, c_1 \ldots c_l$. Ясно, что

$$a \geq \alpha,\ b \geq \beta,\ c \geq \gamma, \tag{20}$$

причем можно считать, что хотя бы одно из этих неравенств строгое; иначе $a_k = b_k = c_k = 0$ для всех $k \geq l + 1$. Тогда неравенства (20) означают, что точка X с координатами (a, b, c) лежит в треугольнике, ограниченном прямыми с уравнениями $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. Из условия $\max(a_l, b_l, c_l) = 1$ вытекает, что это треугольник вида S_{l,j_0}. Если $a_{l+1} = b_{l+1} = c_{l+1} = 0$, то $a < \alpha + 1/2^{l+1}$, $b < \beta + 1/2^{l+1}$, $c < \gamma + 1/2^{l+1}$, что эквивалентно тому, что точка X лежит внутри треугольника, ограниченного средними линиями треугольника S_{l,j_0}, следовательно, $X \notin S_{l+1}$ и $X \notin S$. Поэтому $\max(a_{l+1}, b_{l+1}, c_{l+1}) = 1$.

Предположим, что $X \in S_0$. Используя некоторые из проведенных здесь рассуждений, нетрудно заметить, что для данного $n \in N$ первое из альтернативных условий в (19) означает, что $X \notin (S_{n-1} \setminus S_n)$, а второе влечет, что X – некоторая граничная точка множества S_{n-1} и, следовательно, $X \in S$. Отсюда непосредственно получаем достаточность сформулированных в теореме условий.

Следствие 1. *Все барицентрические координаты a, b, c точки $X \in S$ представимы конечными двоичными дробями тогда и только тогда, когда одна из этих координат равна 1 или существует натуральное число k, такое, что ровно два из чисел a_k, b_k, c_k равны 1. В первом случае точка x является одной из вершин треугольника S_0. Во втором случае $a_n = b_n = c_n = 0$ для всех $n \geq k+1$ и ровно одно из чисел a_n, b_n, c_n равно 1 для каждого $n = 1, \ldots, k-1$. Хотя бы одна из координат a, b, c точки $X \in S$ не представима конечной двоичной дробью тогда и только тогда, когда $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ и ровно одно из чисел a_n, b_n, c_n равно 1 для каждого натурального числа n, причем существуют натуральные числа k, l, m, такие, что $a_k = b_l = c_m = 0$.*

Доказательство. Напомним, что условия $X \in S_0$ и $a + b + c = 1$; $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ эквивалентны. Случай, когда одна из этих координат равна 1, очевиден. Иначе $0 \leq a < 1$, $0 \leq b < 1$, $0 \leq c < 1$, т.е. $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Пусть $\max(a_k, b_k, c_k) = 1$ для некоторого натурального числа k и $\alpha_k = a_0, a_1 \ldots a_k$, $\beta_k = b_0, b_1 \ldots b_k$, $\gamma_k = c_0, c_1 \ldots c_k$. Тогда вследствие теоремы 3, $\max(a_n, b_n, c_n) = 1$ для каждого числа $n = 1, \ldots, k-1$. Следовательно,

$$0 \leq 1 - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k) = 1 - \sum_{l=1}^{k}(a_l + b_l + c_l)\frac{1}{2^l} \leq$$

$$\leq 1 - \sum_{l=1}^{k}\max(a_l, b_l, c_l)\frac{1}{2^l} = 1 - \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{2^l} = 1/2^k.$$

Из этих соотношений вытекает, что ровно одно из чисел a_n, b_n, c_n равно 1 для каждого $n = 1, \ldots, k-1$ и не более двух из чисел a_k, b_k, c_k равно 1. При этом ровно два из чисел a_k, b_k, c_k равны 1 тогда и только тогда, когда $\alpha_k+\beta_k+\gamma_k = 1$, т. е. $a = \alpha_k, b = \beta_k, c = \gamma_k$, что доказывает все утверждения теоремы, кроме последнего. Последнее утверждение теоремы следует из двух предыдущих фраз.

Ковер Серпинского C (см. стр. 207 – 208 книги [1]) можно определить как (единственное) подмножество единичного квадрата I^2 координатной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, являющееся пересечением счетного семейства замкнутых множеств C_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, где каждое множество C_i состоит из 8^i (замкнутых) квадратов $C_{i,j}$, имеющих стороны длины $1/3^i$ и попарно непересекающиеся внутренности, причем каждое множество C_i, $i = 1, 2, \ldots$, получается из C_{i-1} удалением из каждого квадрата $C_{i-1,j}$ внутренности квадрата со сторонами длины $1/3^i$, не пересекающегося со сторонами квадрата $C_{i-1,j}$.

Теорема 4. *Ковер Серпинского C состоит из всех точек $(x, y) \in Q = I \times I$, таких, что записи двух координат x, y в стандартной троичной системе счисления не могут иметь 1 в одном и том же разряде и не заканчиваться на этом разряде.*

Доказательство. Мы подразумеваем, что запись $x_0, x_1 \ldots$ числа $x \in I$ в стандартной троичной системе счисления не может заканчиваться нулями или бесконечной последовательностью двоек, за исключением случая, когда $x = x_0 = 0$. При этом $x_0 \leq 1$ и если $x_0 = 1$, то $x = x_0 = 1$.

Обозначим через D множество всех точек, подчиненных условию из теоремы 4. Ясно, что точка $(x, y) \in Q \diagdown D$ тогда и только тогда, когда существует наименьшее натуральное число n, такое, что $x_n = y_n = 1$ и существуют натуральные числа $l > n$ и $m > n$, такие, что $x_l > 0$ и $y_m > 0$, для записей чисел x и y в стандартной троичной системе счисления. В свою очередь, последнее утверждение, как нетрудно понять, эквивалентно тому, что $(x, y) \in C_{n-1} \diagdown C_n$. Отсюда непосредственно выводится, что $(x, y) \in D$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in C$.

Губка Менгера M — замкнутое подмножество единичного куба I^3. Куб I^3 является объединением $3^3 = 27$ равных (замкнутых) кубиков, получающихся из I^3 подобием с коэффициентом $1/3$. Множество M_1 есть объединение 20 кубиков, отличных от кубика k, не имеющего общих точек с гранями куба I^3, и 6 кубиков, каждый из которых имеет общую грань с кубиком k. Множество M_2 получается применением той же процедуры к каждому из 20 кубиков в M_1. Множество M_2 состоит из $20 \times 20 = 400$ равных еще более мелких кубиков. К каждому из них применяется та же процедура, что и на первом шаге и получается множество M_3, состоящее из $400 \times 20 = 8000$ кубиков и т.д. В результате получается бесконечная последовательность замкнутых множеств $M_1, M_2, \ldots$. Множество M определяется как пересечение всех множеств этой последовательности.

Теорема 5. *Пусть $p_i : I^3 = I \times I \times I \to I$; $i = 1, 2, 3$ — канонические проекции. Тогда*

$$M = p_1^{-1}(C) \cap p_2^{-1}(C) \cap p_3^{-1}(C). \qquad (21)$$

Другими словами, губка Менгера состоит из тех точек (x_1, x_2, x_3) единичного куба I^3, для которых записи любой пары из трех координат x_1, x_2, x_3 в стандартной троичной системе счисления не могут иметь 1 в одном и том же разряде и не заканчиваться на этом разряде.

Доказательство. Заметим, что второе утверждение теоремы есть простое логическое следствие первого ее утверждения и теоремы 4. Докажем первое утверждение теоремы.

Докажем индукцией по i, что

$$M_i = p_1^{-1}(C_i) \cap p_2^{-1}(C_i) \cap p_3^{-1}(C_i) \qquad (22)$$

для каждого неотрицательного целого числа i. Очевидно, утверждение (22) верно при $i = 0$. Предположим, что оно верно при $i = k$ и докажем его справедливость при $i = k + 1$. Из определения множеств C_i и M_i нетрудно увидеть, что

$$M_k \diagdown M_{k+1} =$$
$$= p_1^{-1}(C_k \diagdown C_{k+1}) \cup p_2^{-1}(C_k \diagdown C_{k+1}) \cup p_3^{-1}(C_k \diagdown C_{k+1}) =$$
$$= [p_1^{-1}(C_k) \diagdown p_1^{-1}(C_{k+1})] \cup [p_2^{-1}(C_k) \diagdown p_2^{-1}(C_{k+1})] \cup$$
$$\cup [p_3^{-1}(C_k) \diagdown p_3^{-1}(C_{k+1})].$$

Тогда, вследствие индукционного предположения,

$$M_{k+1} = M_k \diagdown (M_k \diagdown M_{k+1}) =$$
$$= [p_1^{-1}(C_k) \cap p_2^{-1}(C_k) \cap p_3^{-1}(C_k)] \diagdown$$
$$\diagdown \{[p_1^{-1}(C_k) \diagdown p_1^{-1}(C_{k+1})] \cup [p_2^{-1}(C_k) \diagdown p_2^{-1}(C_{k+1})] \cup$$
$$\cup [p_3^{-1}(C_k) \diagdown p_3^{-1}(C_{k+1})]\} =$$
$$= \{p_1^{-1}(C_k) \diagdown [p_1^{-1}(C_k) \diagdown p_1^{-1}(C_{k+1})]\} \cap$$
$$\cap \{p_2^{-1}(C_k) \diagdown [p_2^{-1}(C_k) \diagdown p_2^{-1}(C_{k+1})]\} \cap$$
$$\cap \{p_3^{-1}(C_k) \diagdown [p_3^{-1}(C_k) \diagdown p_3^{-1}(C_{k+1})]\} =$$
$$= p_1^{-1}(C_{k+1}) \cap p_2^{-1}(C_{k+1}) \cap p_3^{-1}(C_{k+1}).$$

Теперь на основании (22) получаем, что

$$M = \bigcap_{i=0}^{\infty} M_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} (p_1^{-1}(C_i) \cap p_2^{-1}(C_i) \cap p_3^{-1}(C_i)) =$$
$$= (\bigcap_{i=0}^{\infty} p_1^{-1}(C_i)) \cap (\bigcap_{i=0}^{\infty} p_2^{-1}(C_i)) \cap (\bigcap_{i=0}^{\infty} p_3^{-1}(C_i)) =$$
$$= p_1^{-1}(\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i) \cap p_2^{-1}(\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i) \cap p_3^{-1}(\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i) =$$
$$= p_1^{-1}(C) \cap p_2^{-1}(C) \cap p_3^{-1}(C).$$

5. Внутренние метрики на классических фракталах

Далее через d обозначается естественная (внутренняя) метрика объемлющего евклидова пространства E^2 (соответственно E^3) для фракталов S, C (соответственно M).

Предложение 7. *Пусть X, Y — произвольные точки в E^2 с барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) относительно вершин A, B, C треугольника S_0. Тогда формула*

$$d_1(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}|x_k - y_k| \qquad (23)$$

определяет метрику нормированного пространства в E^2, согласованную с векторной структурой пространства E^2. Каждый единичный шар пространства (E^2, d_1) является правильным выпуклым шестиугольником в (E^2, d) диаметра 2 в (E^2, d) со сторонами, параллельными сторонам треугольника S_0.

Доказательство. Заметим сначала, что отображение $f(X) = (x_1, x_2, x_3)$, сопоставляющее точке $X \in E^2$ ее барицентрические координаты, естественно рассматривать как отображение $f : E^2 \to \mathbb{R}^3$. Ясно, что тогда f является аффинным преобразованием плоскости E^2 на плоскость

$$P := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

в $\mathbb{R}^3$, а правая часть формулы (23) определяет метрику (которую также будем обозначать d_1) в $\mathbb{R}^3$, определяемую нормой

$$||(x_1, x_2, x_3)|| = \frac{1}{2}\left(|x_1| + |x_2| + |x_3|\right),$$

что доказывает первое утверждение. Введем вспомогательную евклидову метрику

$$d_2(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{k=1}^{3}(x_k - y_k)^2\Big)^{1/2}$$

в $\mathbb{R}^3$. Легко видеть, что ограничения на подмножество $\{A, B, C\}$ преобразований $f : (E^2, d) \to (P, d_1)$ и $f : (E^2, d) \to (P, d_2)$ являются изометриями. Следовательно, последнее из них является изометрией, а первое — изометрией на каждой из прямых $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, $x_3 = \text{const}$. Кроме того, если O — одна из вершин треугольника S_0, то легко проверить, что $d_1(x, O) = x_1 + x_2 + x_3 = 1$ для любой точки x на противоположной стороне треугольника S_0. Из последних двух фраз вытекает второе утверждение предложения.

Замечание 4. Единичный шар $\{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| \leq 1\}$ пространства $(\mathbb{R}^3, d_1)$ является правильным октаэдром в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^3, d_2)$. Второе утверждение предложения 7 эквивалентно тому, что пересечение этого октаэдра с плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ есть правильный выпуклый шестиугольник диаметра 2 в $(\mathbb{R}^3, d_2)$.

Предложение 8. *Пусть X, Y — произвольные точки в E^2 с барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) относительно вершин A, B, C треугольника S_0. Тогда*

$$d(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{k=1}^{3}(x_k - y_k)^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}|x_k - y_k| := d_1(X,Y) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}d(X,Y). \quad (24)$$

В общем случае и верхнюю, и нижнюю оценки для $d_1(x, y)$ нельзя улучшить.

Доказательство. Первое равенство вытекает из того, что преобразование $f : (E^2, d) \to (P, d_2)$ из доказательства предложения 7 есть изометрия. Из последнего утверждения предложения 7 вытекает первое неравенство в (24) и тот факт, что соотношение $(d_1/d_2)(X, Y)$ достигает максимального значения $\frac{2}{\sqrt{3}}$, когда $X = A$, а Y — середина стороны BC треугольника S_0. Отсюда следуют все утверждения предложения.

Напомним, что если (X, d) — метрическое пространство и A — непустое подмножество в X, то расстояние $d_A(a_1, a_2)$ между точками $a_1, a_2 \in A$ в *индуцированной на A внутренней метрике* определяется как точная нижняя граница длин путей в (A, d), соединяющих точки a_1 и a_2. В общем случае не исключено, что некоторые точки $a_1, a_2 \in A$ нельзя соединить путем конечной длины в (A, d). Тогда $d_A(a_1, a_2) = +\infty$. Если же таких пар точек не существует, то d_A — метрика.

Далее d_S обозначает внутреннюю метрику в S, индуцированную евклидовой метрикой d.

Предложение 9. *Если O — одна из вершин треугольника S_0, а X — произвольная точка в S, то $d_S(O, X) = d_1(O, X)$. Диаметры пространств (S, d_S), (S, d_1), (S, d) совпадают и равны 1.*

Доказательство. Так как фигура S обладает поворотной симметрией порядка 3 в (E^2, d), то можно считать, что $O = A$.

Докажем сначала первое утверждение.

Если $X = A$, то $d_S(A, X) = d(A, X) = d_1(O, x) = 0$. Если X — одна из вершин B или C, то отрезок $[AX] \subset S$ и

$$d_S(A, X) = d(A, X) = d_1(O, X) = 1. \qquad (25)$$

Поэтому можно считать, что X не совпадает ни с одной из вершин A, B или C. Далее будем пользоваться обозначениями из следствия 1 и его доказательства. Тогда $0 < b + c \leq 1, a_0 = b_0 = c_0 = 0$.

Определим последовательность точек $\{X_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ их барицентрическими координатами $(1 - (\beta_n + \gamma_n), \beta_n, \gamma_n)$. Ясно, что $X_0 = A$, последовательности $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ не убывают, последовательность $\{1-(\beta_n+\gamma_n)\}$ не возрастает и $X_n \to X$ при $n \to +\infty$. Кроме того, нетрудно проверить, что каждая точка X_n удовлетворяет всем условиям теоремы 3 и, следовательно, $X_n \in S$. Далее рассмотрим два случая: 1) хотя бы одна из координат a, b, c не представима конечной двоичной дробью; 2) все координаты a, b, c представимы конечными двоичными дробями.

1) В этом случае хотя бы одна из координат b, c не представима конечной двоичной дробью; поэтому найдутся сколь угодно большие n, такие, что $\max(b_n, c_n) = 1$ и последовательность $\{X_n\}, n = 0, 1, \ldots$ не стабилизируется. На основании следствия 1 для каждого натурального числа n не более одного числа из b_n, c_n равно 1. Отсюда вытекает, что точки X_{n-1}, X_n являются вершинами одного из треугольников вида $S_{n,l}$, и если $X_{n-1} \neq X_n$, то отрезок $[X_{n-1}, X_n]$ является стороной единственного треугольника такого вида и поэтому $[X_{n-1}, X_n] \subset S$. В любом случае легко получаем, что

$$d_S(X_{n-1}, X_n) = d(X_{n-1}, X_n) =$$
$$= d_1(X_{n-1}, X_n) = \beta_n - \beta_{n-1} + \gamma_n - \gamma_{n-1}. \quad (26)$$

Возьмем кривую L, являющуюся объединением ломаных $L_n = X_0X_1 \ldots X_n$ и конечной точки X с параметризацией, совпадающей на каждой ломаной L_n с параметризацией длиной дуги относительно метрики d или, что то же, метрики d_1. Тогда вследствие (26) ее длина в метрике d равна

$$l(L) = \lim_{n\to+\infty} l(L_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \beta_{n-1} + \gamma_n - \gamma_{n-1}) = b + c =$$

$$= \frac{1}{2}[(1-(1-(b+c))+(b-0)+(c-0))] = d_1(A, X).$$

Пусть $Y_1 = X_{n(1)}$ — первая из точек последовательности $\{X_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, отличная от $X_0 = Y_0 = A$; $Y_2 = X_{n(2)}$ — первая из точек последовательности $\{X_n\}$, $n = n(1), n(1)+1, \ldots$, отличная от $X_n(1) = Y_1$, и т.д. Тогда точка A содержится в (единственном) треугольнике вида $S_{n(1),j}$ со стороной AY_1, точка X вместе с точкой Y_1 содержится в некотором другом треугольнике вида $S_{n(1),j'}, j' \neq j$ (тоже единственном вследствие того, что не все барицентрические координаты точки X представимы конечными двоичными дробями), а все эти три точки лежат в единственном треугольнике вида $S_{n(1)-1,s}$. Как следствие,

$$l(L) = b + c \leq \frac{1}{2^{n(1)-1}}. \quad (27)$$

Для завершения доказательства первого утверждения достаточно показать, что если $l(L') \leq l(L)$, то $L' = L$. Такая кривая L' должна проходить через точку Y_1. Иначе она проходит через точку $Z_1 = S_{n(1),j} \cap S_{n(1),j''}$, где $S_{n(1),j''}, j'' \neq j, j'' \neq j'$; $S_{n(1),j''} \subset S_{n(1)-1,s}$, и тогда

$$l(L') \geq d(A, Z_1) + d(Z_1, X) > \frac{1}{2^{n(1)-1}} \geq l(L),$$

так как $d(A, Z_1) = \frac{1}{2^{n(1)}}$, а $d(Z_1, X) > \frac{1}{2^{n(1)}}$ вследствие того, что

$$Z_1 \in S_{n(1),j''},\ X \in S_{n(1),j'},\ S_{n(1),j''} \cap S_{n(1),j'} = \emptyset.$$

Аналогично доказывается, что дуга $\overline{Y_1X}$ кривой L' должна содержать точку Y_2 и т.д. Таким образом, при прохождении направленной кривой L' последовательно должны появляться все точки $Y_0, Y_1, \ldots$. Следовательно,

$$l(L') \geq \sum_{n=1}^{+\infty} d(Y_{n-1}, Y_n) = l(L),$$

и равенство здесь может соблюдаться только если L' составлена из отрезков $[Y_{n-1}, Y_n], n = 1, 2, \ldots$, т.е. если $L' = L$.

Докажем второе утверждение. Так как $d_S(A, B) = d_1(A, B) = d(A, B) = 1$, то диаметры пространства S во всех трех метриках не меньше 1. Докажем противоположное неравенство. Заметим прежде, что

$$d(O, X) \leq d_1(O, X) = d_S(O, X) \leq 1 \quad (28)$$

вследствие первого утверждения и предложений 7, 8. Пусть теперь $X, Y \in S$. Тогда точка X (соответственно Y) лежит в пересечении вида $S \cap S_{1,j}$ (соответственно $S \cap S_{1,j'}$). При этом оба эти множества содержат некоторую общую вершину O_1 и получаются из S метрическими подобиями с коэффициентом 1/2. Используя соотношения (28) и неравенство треугольника, получаем требуемые неравенства

$$d(X, Y) \leq d(X, O_1) + d(O_1, Y) \leq$$
$$\leq d_1(X, O_1) + d_1(O_1, Y) =$$
$$= d_S(X, O_1) + d_S(O_1, Y) \leq 1/2 + 1/2 = 1.$$

2) Доказательство в основном совершенно аналогично доказательству в случае 1). Укажем различия. На основании следствия 1 существует натуральное число k такое, что ровно два из чисел a_k, b_k, c_k равны 1, причем $a = \alpha_k, b = \beta_k, c = \gamma_k$ и ровно одно из чисел a_n, b_n, c_n равно 1 для каждого $n = 1, \ldots, k-1$. Далее возможны два случая: а) ровно одно из чисел b_k, c_k равно 1; б) ровно два из чисел b_k, c_k равны 1. В случае а) надо взять в качестве $L \subset S$ ломаную $AX_1 \ldots X_k$ и повторить те же рассуждения, что и в случае 1). Если же выполняется условие б), то между точками X_{k_1} и X_k надо вставить точку $Z = (1-(b+c)+1/2^k, b-1/2^k, c)$ или $Z' = (1-(b+c)+1/2^k, b, c-1/2^k)$ и рассмотреть ломаную $L = X_0X_1 \ldots X_{k-1}ZX_k$ или $L' = X_0X_1 \ldots X_{k-1}Z'X_k$. При этом $l(L) = l(L')$.

Аналогично предыдущему доказывается, что каждая направленная кривая $L'' \subset S$, должна совпадать с L или L', если $l(L'') \leq l(L)$. Все остальные утверждения доказываются аналогично.

Теорема 6. *Если X, Y — произвольные точки в S с барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3), то верны оценки*

$$d(X,Y) \leq d_S(X,Y) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} d(X,Y), \qquad (29)$$

$$d_1(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} |x_k - y_k| \leq d_S(X,Y) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{3} |x_k - y_k| = \frac{4}{\sqrt{3}} d_1(X,Y). \qquad (30)$$

В общем случае нижние оценки в этих неравенствах нельзя улучшить.

Доказательство. Если хотя бы одна из точек X или Y равна вершине некоторого треугольника вида $S_{i,j}$, содержащего обе точки X и Y, то неравенства (29) и (30) вытекают из предложений 8 и 9. Рассмотрим общий случай. Можно считать, что $X \neq Y$. Первые неравенства в (29) и (30) вытекают из неравенств треугольника для метрик и предложений 8, 9. Докажем вторые неравенства в (29) и (30).

Если хотя бы одна из точек X или Y равна вершине некоторого треугольника вида $S_{i,j}$, содержащего обе точки X и Y, то неравенства (29) и (30) вытекают из предложений 8 и 9. Рассмотрим общий случай. Можно считать, что $X \neq Y$. Существует наименьшее неотрицательное целое число k, такое, что некоторый треугольник вида $S_{k,j}$ содержит обе точки X и Y, но точки X и Y не содержатся одновременно ни в каком треугольнике вида $S_{k+1,l}$. Тогда существуют натуральные числа r и s, такие, что $X \in S_{k+1,r}$, $Y \in S_{k+1,s}$, $r \neq s$. Треугольники $S_{k+1,r}$ и $S_{k+1,s}$ содержат единственную общую точку, и эта точка является их общей вершиной O. Введем обозначения:

$$a = d(X,O), a_1 = d_1(X,O), b = d(Y,O),$$

$$b_1 = d_1(Y,O), c = d(X,Y), c_1 = d_1(X,Y).$$

Тогда $\alpha := \measuredangle(\overline{OX}, \overline{OY}) \geq \frac{\pi}{3}$. Следовательно,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \geq \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \geq \frac{1}{2}(a+b).$$

Отсюда, на основании предложения 8 и равенств

$$d_S(X,Y) = d_S(X,O) + d_S(O,Y) = d_1(X,O) + d_1(O,Y),$$

получаем:

$$c_1 \geq c \geq \frac{1}{2}(a+b) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(a_1 + b_1) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(d_S(X,O) + d_S(O,Y)) \geq \frac{\sqrt{3}}{4} d_S(X,Y).$$

Следовательно,

$$d_S(X,Y) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} d(X,Y) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} d_1(X,Y),$$

что дает вторые неравенства в (29) и (30).

Последнее утверждение следует из равенств (25).

Замечание 5. Вследствие неравенств (24) и (29), $1 \leq d_S/d_1 \leq d_S/d$. Поэтому метрика d_1 — лучшее приближение метрики d_S по сравнению с метрикой d. Кроме того, предложение 9 показывает, что во многих важных случаях расстояния в метриках d_1 и d_S совпадают. Для точек X, Y с барицентрическими координатами $(1/2, 1/4, 1/4)$ и $(1/4, 1/2, 1/4)$ соответственно верны равенства $d_S(X,Y) = 1/2 = 2d(X,Y) = 2d_1(X,Y)$. Авторам не известно, можно ли константу $4/\sqrt{3}$ в (29) и (30) заменить меньшим числом 2.

Предложение 10. *Если $X = (x_1, x_2)$ — одна из вершин квадрата C_0, а $Y = (y_1, y_2)$ — произвольная точка в C, то*

$$d(X,Y) \leq d_C(X,Y) \leq \sum_{k=1}^{2} |x_k - y_k| := d_3(X,Y).$$

Доказательство. Ясно, что $d(X,Y) \leq d_C(X,Y)$. Без ограничения общности можно считать, что $X = (0,0)$, а $Y \neq X$. Для записи координат точки Y будем использовать стандартную троичную систему счисления. В доказательстве будем пользоваться тем, что стороны всех квадратов $C_{k,j}$, $k = 1, 2, \ldots$ содержатся в C. Определим точки $X_{-1} = X$ и $X_n = (\alpha_n = a_0, a_1 \ldots a_n, \beta_n = b_0, b_1 \ldots b_n)$ для $n = 0, 1, \ldots$, где $a = y_1, b = y_2$, а $a_0, a_1 \ldots$ и $b_0, b_1 \ldots$ — их записи в стандартной троичной системе счисления. Введем точку $Y_n = (\alpha_n, \beta_{n-1})$, если оба числа a_n, b_n для данного n положительны, и $Y_n = X_{n-1}$ в противоположном случае. Здесь предполагается, что $\beta_{-1} = 0$. В любом случае отрезки $[X_{n-1}, Y_n]$ и $[Y_n, X_n]$ содержатся в C. Отсюда следует, что

$$d_C(X_{(n-1)}, X_n) \leq d_C(X_{n-1}, Y_n) + d_C(Y_n, X_n) =$$

$$= |x_{n,1} - x_{(n-1),1}| + |x_{n,2} - x_{(n-1),2}| =$$

$$= (x_{n,1} - x_{(n-1),1}) + (x_{n,2} - x_{(n-1),2}) =$$

$$= d_3(X_{(n-1)}, X_n).$$

Тогда

$$\sum_{k=-1}^{\infty} d_C(X_k, X_{k+1}) \leq \sum_{k=-1}^{\infty} d_3(X_k, X_{k+1}) =$$

$$= (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) = d_3(X,Y).$$

Следовательно, $\{X_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — сходящаяся в себе относительно d_C последовательность. Так как $d_C \geq d$ и $d(X_k, X) \to 0$ при $k \to \infty$, то

$d_C(X_k, X) \to 0$ при $k \to \infty$, и на основании последних выделенных в строку соотношений получим, что $d_C(X,Y) \leq d_3(X,Y)$.

Замечание 6. Нетрудно доказать, что пересечение множества C с каждой из прямых $y = 2x$ и $x = 2y$ совпадает с пересечением квадрата C_0 с каждой из этих прямых. Как следствие, очень трудно (а может, и невозможно) дать точную формулу для вычисления расстояния $d_C(X,Y)$ в условиях предложения 10.

Теорема 7. *Если X, Y — произвольные точки в C с координатами (x_1, x_2) и (y_1, y_2), то верны оценки:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d_3(X,Y) \leq d(X,Y) \leq d_C(X,Y) \leq$$

$$\leq 2\sqrt{2} d(X,Y) \leq 2\sqrt{2} d_3(X,Y), \qquad (31)$$

где

$$d_3(X,Y) = \sum_{k=1}^{2} |y_k - x_k|.$$

Доказательство. Все неравенства в (31), кроме третьего, хорошо известны.

Докажем третье. Можно считать, что $X \neq Y$. Тогда существует наименьшее натуральное число n, такое, что X (соответственно Y) принадлежит некоторому квадрату $C_{(n-1),r}$ (соответственно $C_{(n-1),s}$) и эти квадраты имеют общую сторону, но X (соответственно Y) принадлежит некоторому квадрату $C_{n,t}$ (соответственно $C_{n,u}$) и последние два квадрата не имеют общих сторон. Возможны два случая: 1) квадраты $C_{n,t}$ и $C_{n,u}$ имеют общую вершину Z; 2) квадраты $C_{n,t}$ и $C_{n,u}$ не пересекаются. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) Если Z совпадает с одной из точек X или Y, то, вследствие предложения 10,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d_3(X,Y) \leq d(X,Y) \leq d_C(X,Y) \leq$$

$$\leq d_3(X,Y) \leq \sqrt{2} d(X,Y), \qquad (32)$$

откуда следуют неравенства (31). Иначе $\measuredangle(\overline{ZX}, \overline{ZY}) \geq \pi/2$. Вводя обозначения $a = d(X,Z)$, $b = d(Z,Y)$, $c = d(X,Y)$, $a_1 = d_3(X,Z)$, $b_1 = d_3(Z,Y)$, $c_1 = d_3(X,Y)$, получим, что

$$c_1 \geq c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\measuredangle(\overline{ZX}, \overline{ZY})} \geq$$

$$\geq \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \geq \frac{1}{2}(a_1+b_1) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(d_C(X,Z) + d_C(Z,Y)) \geq \frac{1}{2} d_C(X,Y).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d_3(X,Y) \leq d(X,Y) \leq d_C(X,Y) \leq$$

$$\leq 2d(X,Y) \leq 2d_3(X,Y), \qquad (33)$$

откуда следуют неравенства (31).

2) В этом случае существуют (единственные) вершины X_0 и Y_0 треугольников $C_{n,t}$ и $C_{n,u}$ соответственно, такие, что $d_3(X_0, Y_0)$ реализует кратчайшее (положительное) расстояние в метрике d_3 между множествами вершин этих треугольников. При этом нетрудно видеть, что расстояние $d_3(X_0, Y_0)$ равно длине относительно метрики d_3 некоторой ломаной $L \subset C$. Следовательно, $d_C(X_0, Y_0) \leq d_3(X_0, Y_0)$. Если $X = X_0$ и $Y = Y_0$, то верны неравенства (32) и, следовательно, (31). Если $X = X_0$ и $Y \neq Y_0$, то $\measuredangle(\overline{Y_0X}, \overline{Y_0Y}) \geq \pi/2$ и используя проведенные ранее рассуждения, получим неравенства (33) и, следовательно, (31). То же верно, если $X \neq X_0$ и $Y = Y_0$.

Предположим, что $X \neq X_0$ и $Y \neq Y_0$. Возьмем в качестве точки Z середину (относительно метрики d_3) пути L. Аналогично второму случаю в 1) доказываются неравенства:

$$d_C(X,Z) \leq 2d(X,Z) := 2d \leq 2d_1 := 2d_3(X,Z);$$

$$d_C(Z,Y) \leq 2d(Z,Y) := 2d' \leq 2d'_1 := d_3(Z,Y).$$

Снова $\measuredangle(\overline{ZX}, \overline{ZY}) \geq \pi/2$. Вводя обозначения $f := d(X,Y)$, $f_1 := d_3(X,Y)$, аналогично предыдущему получим, что

$$f_1 \geq f \geq \sqrt{d^2 + d'^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(d + d') \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(d_C(X,Z) + d_C(Z,Y)) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} d_C(X,Y).$$

Отсюда выводятся неравенства (31).

Ясно, что ребра всех кубов $M_{l,j}, l = 0, 1, \ldots$ содержатся в M. На основе этого аналогично предложению 10 доказывается следующее предложение.

Предложение 11. *Если $X = (x_1, x_2, x_3)$ — одна из вершин куба M_0, а $Y = (y_1, y_2, y_3)$ — произвольная точка в M, то*

$$d(X,Y) \leq d_M(X,Y) \leq \sum_{k=1}^{3} |x_k - y_k| := d_4(X,Y).$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 7 заменой квадратов кубами на основе предложения 11.

Теорема 8. *Если X, Y — произвольные точки в M с координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3), то верны оценки*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} d_4(X,Y) \leq d(X,Y) \leq d_M(X,Y) \leq$$

$$\leq 2\sqrt{3} d(X,Y) \leq 2\sqrt{3} d_4(X,Y), \qquad (34)$$

где

$$d_4(X,Y) = \sum_{k=1}^{3} |y_k - x_k|.$$

6. Хаусдорфова и фрактальная размерности классических фракталов

Сначала напомним классическое определение размерности Хаусдорфа метрического пространства (X, d), следуя [5]. Для числа $\rho \geq 0$ и не более чем счетного покрытия $U = \{U_i\}_{i\in J}$ множества X его непустыми подмножествами ρ-вес покрытия $w_\rho(U)$ определяется как

$$w_\rho(U) = \sum_{i\in J} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho, \qquad (35)$$

где

$$\mathrm{diam}(U_i) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in U_i\}.$$

При $\rho = 0$ слагаемые вида 0^0 считаются равными 1. Для $\delta > 0$ положим

$$\mu_{\rho,\delta}(X) = \inf\{w_\rho(U) \mid \mathrm{diam}(U_i) < \delta \text{ для всех } i \in J\}. \qquad (36)$$

ρ-мерная *мера Хаусдорфа* метрического пространства (X, d) определяется как

$$\mu_\rho(X) = C(\rho) \lim_{\delta\to+0} \mu_{\rho,\delta}(X), \qquad (37)$$

где

$$C(\rho) := 2^{-\rho}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^\rho / \Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right) > 0$$

и где Γ — гамма-функция Эйлера.

Замечание 7. Обычно при определении $\mu_\rho(X)$, $\mu_{\rho,\delta}(X)$ в формуле (37) заменяется на $\nu_{\rho,\delta}(X)$, где $\nu_{\rho,\delta}(X)$ получается из $\mu_{\rho,\delta}(X)$ заменой условия $\mathrm{diam}(U_i) < \delta$ в (36) условием $\mathrm{diam}(U_i) \leq \delta$. Но легко видеть, что при такой замене $\mu_\rho(X)$ не меняется.

Размерность Хаусдорфа $\dim_H(X)$ метрического пространства (X, d) есть точная верхняя граница действительных чисел $\rho \geq 0$, для которых $\mu_\rho(X) > 0$.

Из определений непосредственно следует, что размерность Хаусдорфа не меняется при замене метрики d любой билипшицево эквивалентной ей метрикой. Поэтому, вследствие теорем 6, 7 и 8, евклидову метрику d на S, C или M можно заменить определяемой ей внутренней метрикой D_S, d_C или d_M. Но для удобства вычислений мы будем считать, что метрика на ковре Серпинского C индуцирована метрикой $d(X, Y) = \max\limits_{i=1,2} \mid x_i - y_i \mid$ на $\mathbb{R}^2$, метрика на губке Менгера M индуцирована из $\mathbb{R}^3$ метрикой $d(X, Y) = \max\limits_{i=1,2,3} \mid x_i - y_i \mid$.

Лемма 1. *Пусть $V = \{V_i\}_{i\in J}$ — не более чем счетное покрытие метрического пространства (X, d) непустыми подмножествами диаметра меньше $\delta > 0$ и $w_\rho(V) < +\infty$ для некоторого $\rho > 0$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует открытое покрытие $U = \{U_i\}_{i\in J}$ пространства (X, d) непустыми подмножествами диаметра меньше δ, удовлетворяющее условиям:*

1. $V_i \subset U_i$ *для каждого* $i \in J$.
2. $w_\rho(U) \leq w_\rho(V) + \epsilon$.

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. Обозначим $V^0 = \{V_i \in V \mid \mathrm{diam}(V_i) = 0\}$. По условию V^0 не более чем счетно. Если V^0 не пусто, то, обозначая его элементы через x_i, где $i = 1, \ldots, k$ или $i \in N$, определим U_i как открытый шар с центром в x_i радиуса $\epsilon_i \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\epsilon}{4i}\right)^{1/\rho}$. Тогда $\sum_{V_i\in V^0} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Если $V \backslash V^0$ не пусто, т. е. $w_\rho(V) > 0$, то для каждого $V_i \in V \backslash V^0$ определим U_i как ϵ_i-окрестность множества V_i, где

$$\epsilon_i < \frac{1}{2}\min\{\alpha \cdot \mathrm{diam}(V_i), \delta - \mathrm{diam}(V_i)\},$$

$$\alpha = \left(1 + \frac{\epsilon}{2w_\rho(V)}\right)^{1/\rho} - 1.$$

Из неравенства треугольника следует, что $\mathrm{diam}(U_i) \leq \mathrm{diam}(V_i) + 2\epsilon_i$ и поэтому $\mathrm{diam}(U_i) < \delta$. Вследствие (35),

$$\sum_{V_i\in V\backslash V^0} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho \leq \sum_{V_i\in V\backslash V^0} (\mathrm{diam}(V_i) + 2\epsilon_i)^\rho \leq$$

$$\leq \sum_{V_i\in V\backslash V^0} (\mathrm{diam}(V_i))^\rho \cdot \left(1 + \frac{\epsilon}{2w_\rho(V)}\right) = w_\rho(V) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Тогда

$$w_\rho(U) = \sum_{V_i\in V^0} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho + \sum_{V_i\in V\backslash V^0} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho \leq$$

$$\leq w_\rho(V) + \epsilon.$$

Лемма 2. *Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и $\mu_\rho(X) < +\infty$ для некоторого $\rho > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ в определении $\mu_{\rho,\delta}(X)$ (см. (36)) можно ограничиться только конечными (открытыми) покрытиями U пространства (X, d).*

Доказательство. Ясно, что

$$\mu_{\rho,\delta}(X) \leq \mu_\rho(X) < +\infty.$$

Осталось применить лемму 1.

Теорема 9. *$\dim_H(S) = r(S) = \log 3/\log 2$ для салфетки Серпинского S.*

Доказательство. Напомним, что $S = \cap\{S_k \mid k \in Z_+\}$, где каждое множество S_k состоит из 3^k (замкнутых) равносторонних треугольников $S_{k,j}$, имеющих стороны длины 2^{-k} и попарно непересекающиеся внутренности. В этом случае $r(S) = \log 3/\log 2$. Ясно, что $\mathrm{diam}(S_{k,j}) = 2^{-k}$. Пусть V_k — покрытие множества S_k треугольниками $S_{k,j}$. Из (35), (36) следует, что для любого $k \in N$ и каждого $\delta > 2^{-k}$

$$\mu_{r(S),\delta}(S) \leq w_{r(S)}(V_k) = 3^k \cdot (2^{-k})^{r(S)} = 1.$$

Тогда $\mu_{r(S)}(S) < +\infty$. Из определений размерности и меры Хаусдорфа следует, что достаточно доказать неравенство $\mu_{r(S)}(S) > 0$.

Так как салфетка Серпинского S замкнута и ограничена в E^2, то она компактна. На основании леммы 2 можно рассматривать только конечные открытые покрытия $U = \{U_i\}_{i\in J}$ пространства S. При этом всегда $\mathrm{diam}(U_i) \leq 1$, $i \in J$. Для каждого $i \in J$ существует такое $k \in Z_+$, что $2^{-(k+1)} \leq \mathrm{diam}(U_i) < 2^{-k}$. Легко видеть, что тогда U_i может пересечь не более двух множеств вида $S_{k,j} \cap S$. Если $n \geq k$, то U_i пересекает не более

$$2\cdot 3^{n-k} = 2\cdot 3^{n+1}\cdot 2^{-(k+1)r(S)} \leq 2\cdot 3^{n+1}\cdot(\mathrm{diam}(U_i))^{r(S)}$$

множеств вида $S_{n,j}\cap S$. Так как пространство S не имеет изолированных точек, а множества U_i, $i \in J$ непустые, открытые и их конечное число, то существует такое $n \in N$, что $\min\{\mathrm{diam}(U_i) \mid i \in J\} \geq 2^{-(n+1)}$. Покрытие U пересекает все 3^n множеств вида $S_{n,j} \cap S$, поэтому

$$3^n \leq \sum_{i\in J} 2\cdot 3^{n+1}\cdot(\mathrm{diam}(U_i))^{r(S)}.$$

Тогда в силу (35), $w_{r(S)}(U) \geq \frac{1}{6}$. Из (36), (37) следует, что $\mu_{r(S)}(S) > 0$.

Теорема 10. *$dim_H(C) = r(C) = \log 8/\log 3$ для ковра Серпинского C.*

Доказательство. Напомним, что $C = \cap\{C_k \mid k \in Z_+\}$, где каждое множество C_k состоит из 8^k (замкнутых) квадратов $C_{k,j}$, имеющих стороны длины 3^{-k} и попарно непересекающиеся внутренности. Ясно, что $\mathrm{diam}(C_{k,j}) = 3^{-k}$. В этом случае $r(C) = \log 8/\log 3$. Пусть V_k — покрытие множества C_k квадратами $C_{k,j}$. Из (35), (36) следует, что для любого $k \in N$ и каждого числа $\delta > 3^{-k}$

$$\mu_{r(C),\delta}(C) \leq w_{r(C)}(V_k) = 8^k\cdot(3^{-k})^{r(C)} = 1.$$

Тогда $\mu_{r(C)}(C) < +\infty$.

Заметим, что ковер Серпинского C (как и салфетка Серпинского S) компактен в E^2, так как он замкнут и ограничен. Доказательство неравенства $\mu_{r(C)}(C) > 0$ аналогично доказательству $\mu_{r(S)}(S) > 0$ (см. теорему 9).

Теорема 11. *$dim_H(M) = r(M) = \log 20/\log 3$ для губки Менгера M.*

Доказательство. Напомним, что $M = \cap\{M_k \mid k \in N\}$, где каждое множество M_k состоит из 20^k (замкнутых) кубиков $M_{k,j}$, имеющих стороны длины 3^{-k} и попарно непересекающиеся внутренности. Ясно, что $\mathrm{diam}(M_{k,j}) = 3^{-k}$. В этом случае $r(M) = \log 20/\log 3$. Пусть V_k — покрытие множества M_k кубиками $M_{k,j}$. Из (35), (36) следует, что для любого $k \in N$ и каждого числа $\delta > 3^{-k}$

$$\mu_{r(M),\delta}(M) \leq w_{r(M)}(V_k) = 20^k\cdot(3^{-k})^{r(M)} = 1.$$

Тогда $\mu_{r(M)}(M) < +\infty$.

Заметим, что губка Менгера M (как и салфетка Серпинского S) компактна в E^3, так как она замкнута и ограничена. Доказательство неравенства $\mu_{r(M)}(M) > 0$ аналогично доказательству неравенства $\mu_{r(S)}(S) > 0$ (см. теорему 9).

Замечание 8. Совершенно аналогично доказывается, что размерность Хаусдорфа канторова множества равна $\log 2/\log 3$. Все три рассматриваемых здесь множества имеют топологическую размерность 1, а канторово множество — топологическую размерность 0 (см. [2]). Поэтому все эти множества являются (самоподобными) фракталами в смысле Б. Мандельброта.

Авторы выражают благодарность Ольге Эберт (Center for Literacy Studies, the University of Tennessee, Knoxville, USA) и профессору Ю. Г. Никонорову за стимулирующие и плодотворные обсуждения проблематики этой статьи.

Литература

[1] Александров, П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию* / П. С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 370 с.

[2] Александров, П. С. *Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размеренности* / П. С. Александров, Б. А. Пасынков. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

[3] Андреев, П. Д. *Размерности $\mathbb{R}$-деревьев и самоподобные фрактальные пространства неположительной кривизны* / П. Д. Андреев, В. Н. Берестовский // Мат. труды. – 2006. – Т. 9, № 2. – С. 3 – 22.

[4] Морозов, А. Д. *Введение в теорию фракталов* / А. Д. Морозов. – Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.

[5] Федерер, Г. *Геометрическая теория меры* / Г. Федерер. – М.: Наука, 1987. – 760 с.

[6] Berestovskii, V. N. *Covering $\mathbb{R}$-trees, $\mathbb{R}$-free groups, and dendrites* / V. N. Berestovskii, C. P. Plaut // Adv. Math. – 2010. – V. 224, № 5. – C. 1765 – 1783.

[7] Hutchinson, J. E. *Fractals and self-similarity* / J. E. Hutchinson // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – V. 30, № 5. – P. 713 – 747.

[8] Mandelbrot, B. B. *The fractal geometry of nature* / B. B. Mandelbrot. – San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1982. – 497 p.

[9] Stakhov, A. P. *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science* / A. P. Stakhov. Singapore: World Scientific, 2009. – 739 p.

УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА ГРУППАХ ЛИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский

INVARIANT TENSOR FIELDS ON LOW DIMENSIONAL LIE GROUPS

O. P. Gladunova, E. D. Rodionov, V. V. Slavsky

Данная работа посвящена одному из разделов современной римановой геометрии — теории инвариантных тензорных полей на группах Ли. Предполагается дать краткий обзор некоторых результатов данной теории, наиболее близких к исследованиям авторов.

This paper is devoted to the theory of the invariant tensor fields on Lie groups which is one of the sections of modern Riemannian geometry. It is proposed to give a short survey of some results this theory which is similar to the other studies conducted by the authors.

Ключевые слова: инвариантные тензорные поля, группы Ли, алгебры Ли.

Keywords: invariant tensor fields, Lie groups, Lie algebras.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№10-01-90000-Бел_а), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

Введение

Данная работа посвящена одному из разделов современной римановой геометрии — теории инвариантных тензорных полей на группах Ли. Предполагается дать краткий обзор некоторых результатов данной теории по следующим темам, наиболее близким к исследованиям авторов.

1. Группы и алгебры Ли. Определения. Структура множества инвариантных метрик. Классификации групп Ли малых размерностей. Инвариантные тензорные поля на группах Ли.

2. Кривизны левоинвариантных метрик на группах Ли. Кривизна Риччи и одномерная кривизна 3-мерных групп Ли с левоинвариантными римановыми метриками. Оценки кривизн различного типа, сигнатуры операторов Риччи и одномерной кривизны. Существование метрик знакоопределенной кривизны Риччи и одномерной кривизны на 3-мерных группах Ли. Сигнатура оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли малой размерности.

3. Тензорные поля Вейля и Схоутена-Вейля на группах Ли малых размерностей. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с изотропным тензором Схоутена-Вейля. Левоинвариантные (псевдо)римановы метрики на 3-мерных группах Ли с почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля. Гармоничность формы Схоутена-Вейля по направлению на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой. Гармоничность тензора Вейля на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. О разложении оператора кривизны в слоях пространства расслоения бивекторов над четырехмерной группой Ли.

Надеемся, что представленные здесь сравнительно недавние результаты и их приложения найдут своего заинтересованного читателя, а ценные замечания будут с признательностью приняты.

I. Группы и алгебры Ли

1.1. Определения и конструкции

Данный раздел содержит сведения общего характера, которые хорошо известны и могут быть найдены в [17, 27, 29, 32].

Определение 1.1.1. *Пусть G — дифференцируемое многообразие, τ — дифференцируемая структура на G, " $\cdot$ " — групповая структура на G. Тройка $\{G, \cdot, \tau\}$ называется группой Ли, если дифференцируемая и групповая структуры согласованы, т. е. отображение $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ прямого произведения $G \times G$ в G дифференцируемо.*

Группа Ли называется компактной (связной), если многообразие G компактно (связно). Если группа Ли рассматривается над полем C (соответственно R), то группу Ли называют комплексной (соответственно вещественной) группой Ли.

Пусть G — группа Ли. С каждым элементом $y \in G$ связан диффеоморфизм $\ell(y) : G \to G$, который определяется равенством $\ell(y)x = y \cdot x$ и называется левым сдвигом. Векторное поле X на G называется левоинвариантным, если оно инвариантно относительно всех левых сдвигов, т. е. $d\ell(y)X_p = X_{y \cdot p}$ для всех $p, y \in G$. Здесь X_p — касательный вектор в точке $p \in G$. Левоинвариантные векторные поля на G образуют векторное пространство. Обозначим его через $L(G)$.

Определение 1.1.2. *Векторное пространство V над полем K ($K = C$ или $K = R$) с операцией умножения $V \times V \to V$, обозначаемой $(X, Y) \to [X, Y]$ и называемой скобкой (или коммутатором) элементов X и Y, называется алгеброй Ли над полем K, если выполняются следующие аксиомы:*

1) *операция коммутирования билинейна;*
2) *операция коммутирования кососимметрична;*
3) *справедливо тождество Якоби:* $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0,$ *для всех* $X,Y,Z\in V$.

Замечание. Если $X,Y\in L(G)$, то скобка Пуассона $[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X$ векторных полей X,Y также будет левоинвариантным векторным полем, и это задает в $L(G)$ билинейную операцию, относительно которой $L(G)$ является алгеброй Ли.

Замечание. Алгебра Ли $L(G)$ левоинвариантных векторных полей на G естественно отождествляется с касательным пространством T_eG в единице $e\in G$. Если $X_e\in T_eG$, то соответствие $X_e\longmapsto X\in L(G)$ определяет искомый изоморфизмом пространств $L(G)$ и T_eG. Положим $[X_e,Y_e]= =[X,Y]_e$. Тогда векторное пространство T_eG с операцией $[X_e,Y_e]$ образует алгебру Ли и называется алгеброй Ли группы G. Всюду далее алгебру Ли группы G будем обозначать через $\mathfrak{g}$. Алгебры Ли $L(G)$ и T_eG изоморфны.

Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определена форма Картана-Киллинга

$$B(X,Y)=-\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y)),$$

где оператор $\mathrm{ad}(X)$ на $\mathfrak{g}$ имеет вид:

$$\mathrm{ad}(X):Z\longmapsto[X,Z],\ \ \forall Z\in\mathfrak{g}.$$

Замечание. Отметим, что форма B инвариантна относительно любого автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 1.1.3. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется полупростой, если форма Картана-Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырождена. Подпространство $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется подалгеброй (соответственно идеалом), если $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\subset\mathfrak{a}$ (соответственно $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{a}$). Полупростую алгебру Ли называют простой, если она не имеет идеалов, отличных от 0 и $\mathfrak{g}$.*

Рассмотрим две последовательности идеалов: производный ряд $\mathfrak{g}\supseteq\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\supseteq\mathfrak{g}''=[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{g}^{(k)}=[\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}]\cdots$ и нижний центральный ряд $\mathfrak{g}_{(1)}=\mathfrak{g}\supseteq\mathfrak{g}_{(2)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\supseteq\mathfrak{g}_{(3)}=[\mathfrak{g}_{(2)},\mathfrak{g}]\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{g}_{(k)}=[\mathfrak{g}_{(k-1)},\mathfrak{g}]\cdots$.

Определение 1.1.4. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется разрешимой (нильпотентной), если $\mathfrak{g}^{(k)}=0$ ($\mathfrak{g}_{(k)}=0$) для некоторого k.*

Определение 1.1.5. *Группа Ли G называется полупростой (соответственно простой, разрешимой, нильпотентной), если ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста (соответственно проста, разрешима, нильпотентна).*

Определение 1.1.6. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется унимодулярной, если выполняется равенство $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X))=0$ для всех $X\in\mathfrak{g}$.*

Заметим также еще один факт. Для этого рассмотрим группу $GL(V)$ невырожденных линейных преобразований n-мерного вещественного пространства V.

Определение 1.1.7. *Гомоморфизм групп Ли $\alpha:G\to GL(V)$ называется линейным представлением группы G в конечномерном векторном пространстве V.*

Пусть $I(a)x=axa^{-1}$ — внутренний автоморфизм группы G. Переходя к дифференциалу, получим следующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$Ad(a)=dI(a)_e:T_eG\to T_eG,$$

где $a\in G$, $e\in G$ — единица группы G. Тогда отображение $Ad:a\to Ad(a)$ есть гомоморфизм группы G в $GL(\mathfrak{g})$, называемый присоединенным представлением группы G.

Определение 1.1.8. *Группа G называется унимодулярой, если $|\det Ad(x)|=1$ для всех $x\in G$ [29,36].*

Замечание. Отметим, что для связной группы Ли G ее унимодулярность эквивалентна унимодулярности алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим также, что унимодулярными являются все компактные, все полупростые, все связные нильпотентные группы Ли [29].

1.2. Структура множества инвариантных метрик

Определение 1.2.1. *Псевдоримановой метрикой сигнатуры (p,q) на дифференцируемом многообразии M размерности $n=p+q$ называется такая гладкая симметричная дифференциальная 2-форма g на M, что для любой точки $x\in M$ форма g_x на T_xM невырождена и имеет сигнатуру (p,q). Пара (M,g) называется псевдоримановым многообразием.*

Если $q=0$ (т. е. форма g_x положительно определена), форма g называется римановой метрикой, а пара (M,g) — римановым многообразием.

Если $p=1$ и $q>0$, форма g называется лоренцевой метрикой, а пара (M,g) — лоренцивым многообразием.

Определение 1.2.2. *(Псевдо)метрика на G называется левоинвариантной, если левые сдвиги группы G являются изометриями.*

Опишем алгоритм построения левоинвариантной римановой метрики на группе Ли G с помощью левых сдвигов.

Пусть $(X_e,Y_e)_e$ — некоторое (положительно определенное) скалярное произведение в точке

$e \in G$, где $X_e, Y_e \in T_eG$. Тогда, полагая $(X_p, Y_p)_p \stackrel{\text{def}}{=} (d\ell(p^{-1})X_p, d\ell(p^{-1})Y_p)_e$, получим тензорное поле типа $(2,0)$, или риманову метрику на группе Ли G в каждой точке $p \in G$. По построению эта метрика левоинвариантна.

Замечание. Нетрудно проверить, что если $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – две произвольные левоинвариантные римановы метрики, то существует самосопряженный линейный оператор $A : T_eG \to T_eG$, такой, что $\langle\cdot,\cdot\rangle = (A\cdot,\cdot)$. Таким образом, любое скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_eG$ задается с помощью фиксированного скалярного произведения и некоторого самосопряженного линейного оператора, действующего в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ [4].

Напомним также, что метрической алгеброй Ли называется пара $(\mathfrak{g}, Q)$, где $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, а Q — некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Произвольная левоинвариантная риманова метрика g на группе Ли G определяет скалярное произведение Q на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и, наоборот, каждое скалярное произведение Q на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную метрику g на группе G.

Теперь рассмотрим вопрос построения биинвариантной метрики, т. е. инвариантной относительно и правых сдвигов.

Лемма 1.2.1. [40] *Левоинвариантная метрика на G является также правоинвариантной, если и только если для любого элемента $a \in G$ линейное отображение*

$$\mathrm{Ad}(a) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

является изометрией относительно индуцированной метрики на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим оператор $U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, определяемый равенством $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$\langle U(X,Y), Z\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle [Z,X], Y\rangle + \langle [Z,Y], X\rangle\right\} \qquad (1)$$

В данных обозначениях, выполняются (см. [40])

Лемма 1.2.2. *Левоинвариантная риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на группе Ли G является биинвариантной в том и только том случае, если оператор $U : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, определяемый равенством (1) тривиален.*

Лемма 1.2.3. *В случае связной группы Ли G, левоинвариантная метрика является биинвариантной, если и только если линейное преобразование* $\mathrm{ad}(X)$ *кососимметрично для любого элемента $X \in \mathfrak{g}$ [40].*

Наконец, заметим, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста и компактна, то билинейная форма Картана-Киллинга $B(X,Y)$ невырождена в $\mathfrak{g} = T_eG$. Тогда биинвариантную (псевдо)риманову метрику можно задать на левоинвариантных векторных полях, положив

$$\langle X_p, Y_p\rangle = B(X_e, Y_e),$$

где $X_e, Y_e \in T_eG$, а $X_p = d\ell(p)X_e, Y_p = d\ell(p)Y_e$.

1.3. Классификации групп Ли малых размерностей

В данном разделе приведены сведения о классификации групп Ли и соответствующих им алгебр Ли малых размерностей с римановой метрикой, а также 3-мерных групп Ли с лоренцевой метрикой, которые потребуются для решения задач настоящей статьи.

Итак, пусть G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В размерности 3 соответствующая классификация групп Ли получена многими авторами (см., например, [40]).

Если G — трехмерная унимодулярная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G, то в $\mathfrak{g}$ существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, такой, что (см. [40]):

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2.$$

Здесь $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $i = 1,2,3$.

Имеется ровно шесть неизоморфных трехмерных унимодулярных алгебр Ли [40].

Пусть теперь G — трехмерная неунимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, такой, что (см. [40]):

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

где матрица $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ имеет след $\alpha + \delta \neq 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Замечание. В случае $\alpha + \delta = 2$ инвариант

$$D = \alpha\delta - \gamma\beta \qquad (2)$$

определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма (см. подробнее [40]).

Одна из классификаций соответствующих четырехмерных алгебр Ли дана Г. М. Мубаракзяновым в [25]. Придерживаясь системы обозначений [25], для изложения результатов будем предполагать, что фиксирован базис работ А. Г. Кремлева и Ю. Г. Никонорова [20, 21] в унимодулярном и неунимодулярном случаях соответственно. Классификация пятимерных алгебр Ли может быть найдена, например в [23, 24].

Наконец, если G — 3-мерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, то соответствующий классификационный результат получен в [28]. Будем придерживаться системы обозначений работы [28].

1.4. Об инвариантных тензорных полях на группах Ли

Изложение данного раздела опирается на работы [4, 19, 26].

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r = \mathrm{tr}(V \mapsto R(X,V)Y)$ и $s = \mathrm{tr}(r)$.

Определение 1.4.1. *Произведением Кулкарни-Номидзу двух симметрических 2-тензоров H, P называется 4-тензор $H \owedge P$, задаваемый формулой:*

$$(H \owedge P)(X,Y,Z,V) = \\ = H(X,Z)P(Y,V) + H(Y,V)P(X,Z) - \\ -H(X,V)P(Y,Z) - H(Y,Z)P(X,T),$$

где X, Y, Z, $V \in T_xM$.

Разделим тензор кривизны на метрический тензор, в смысле произведения Кулкарни-Номидзу [4]:

$$R = W + A \owedge g. \tag{3}$$

Целая часть A от деления R на g называется тензором одномерной кривизны (или тензором Схоутена), а остаток от деления W — тензором Вейля (или тензором конформной кривизны).

Также нам потребуются кривизна Риччи и одномерная кривизна, определяемые с помощью соответствующих квадратичных форм:

$$r(X) = \frac{r_{ij}X^iX^j}{g_{ij}X^iX^j}, \quad A(X) = \frac{A_{ij}X^iX^j}{g_{ij}X^iX^j},$$

где X^i — координаты вектора $X \in T_xM$.

Пусть далее G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — соответствующая алгебра Ли, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — левоинвариантная риманова метрика на G.

Фиксируем в $\mathfrak{g}$ ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad \nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, \quad \langle e_i, e_j\rangle = g_{ij},$$

где $\{c_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор.

Пусть $c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}), \quad \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks},$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица обратная к $\|g_{ks}\|$.

Формулу для вычисления тензора Римана можно представить в виде:

$$R_{ijkt} = c_{ij}^s \Gamma_{sk,t} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is,t} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js,t}.$$

Тензор Риччи и скалярную кривизну соответственно можно найти по формулам:

$$r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}, \quad s = r_{ik} g^{ik},$$

тензор одномерной кривизны равен:

$$A_{ik} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ik} - \frac{s g_{ik}}{2(n-1)}\right), \tag{4}$$

а его ковариантные производные есть

$$A_{ij;k} = A_{lj}\Gamma_{ki}^l + A_{il}\Gamma_{kj}^l.$$

Тензор Вейля вычисляется по формуле:

$$W_{ijkt} = R_{ijkt} - \\ -\frac{1}{n-2}(r_{ik}g_{jt} - r_{it}g_{jk} + r_{jt}g_{ik} - r_{jk}g_{it}) - \\ -\frac{\rho}{(n-1)(n-2)}(g_{it}g_{jk} - g_{ik}g_{jt}). \tag{5}$$

Дивергенцию тензора Вейля будем определять как в [46]:

$$\mathrm{div} W_{jkt} = g^{ip} W_{ijkt,p}, \tag{6}$$

где $W_{ijkt,p}$ — ковариантные производные тензора Вейля, и

$$W_{ijkt,p} = \Gamma_{pi}^l W_{ljkt} + \Gamma_{pj}^l W_{ilkt} + \Gamma_{pk}^l W_{ijlt} + \Gamma_{pt}^l W_{ijkl}.$$

Замечание. Дивергенция тензора Вейля кососимметрична относительно второго и третьего индексов, т.е. $\mathrm{div} W_{ijk} = -\mathrm{div} W_{ikj}$.

В размерности не выше 3 тензор Вейля тривиален, а роль его аналога играет тензор Схоутена-Вейля (или тензор Коттона), определяемый как

$$S_{ijk} = A_{ij;k} - A_{ik;j}. \tag{7}$$

Будем отождествлять ковариантные и контравариантные компоненты тензора S и определять квадрат его длины формулой

$$||S||^2 = S_{ijk}S^{ijk}. \tag{8}$$

Дивергенцию тензора Схоутена-Вейля зададим с помощью ковариантного дифференцирования с последующей сверткой с тензором g^{ij}. Возможны три варианта такой свертки, компоненты дивергенции при этом имеют вид:

$$g^{it}S_{ijk;t}, \quad g^{jt}S_{ijk;t}, \quad g^{kt}S_{ijk;t}.$$

Подчеркнем, что тензор S_{ijk} кососимметричен по индексам j и k, т.е. $g^{jt}S_{ijk;t} = -g^{jt}S_{ikj;t}$. Поэтому определим дивергенцию типа I и II тензора Схоутена-Вейля S_{ijk} соответственно формулами:

$$\mathrm{div}_1(S) = g^{it}S_{ijk;t}, \tag{9}$$

и

$$\mathrm{div}_2(S) = g^{jt} S_{ijk;t}. \qquad (10)$$

Замечание. В силу косой симметрии тензора S_{ijk} по индексам j и k в размерности три можно корректно определить также дивергенцию типа III

$$\mathrm{div}_3(S) = S_{i12;3} + S_{i23;1} + S_{i31;2}, \quad \forall i \in \{1,2,3\},$$

образующую псевдотензор валентности 1.

Будем определять ротор тензора Схоутена-Вейля равенствами

$$\mathrm{rot}(S_{ijk}) = S_{ijk;p} - S_{pjk;i} - S_{ipk;j} - S_{ijp;k}, \qquad (11)$$

где $S_{ijk;t}$ — его ковариантные производные,

$$S_{ijk;t} = S_{ljk}\Gamma^l_{ti} + S_{ilk}\Gamma^l_{tj} + S_{ijl}\Gamma^l_{tk}.$$

Замечание. Вышеприведенные формулы показывают, что данные тензоры суть функции структурных констант c^k_{ij} алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компонент метрического тензора g_{ij}.

II. Кривизны левоинвариантных метрик на группах Ли

Известно, что ограничения различного типа на кривизну риманова многообразия позволяют получить информацию о его геометрическом и топологическом строении. Яркими примерами этого являются теоремы Майерса [41] и Бохнера [36]. Исследованию таких выжных характеристик кривизны, как кривизна Риччи и одномерной кривизны посвящены работы многих математиков [3, 4]. В случае однородных пространств, отличных от групп Ли, стоит отметить работы [35, 37, 38, 43] по изучению сигнатур кривизны Риччи. В настоящем разделе приведены результаты относительно главных кривизн Риччи и одномерной кривизны групп Ли малых размерностей.

Напомним, что под сигнатурой симметрического оператора B, действующего на n-мерном евклидовом пространстве, понимается упорядоченный набор $(\mathrm{sgn}(\tau_1), \mathrm{sgn}(\tau_2), \ldots, \mathrm{sgn}(\tau_n))$, где $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_n$ – собственные значения оператора B, и $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x.

Кроме того, приведем следующие критерии.

Критерий 1 *[40] Связная группа Ли G допускает левоинвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи в том и только том случае, если G компактна и ее фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. В таком случае искомой метрикой является биинвариантная риманова метрика.*

Критерий 2 *[44] Связная группа Ли G допускает левоинвариантную риманову метрику положительной одномерной кривизны в том и только том случае, если G компактна и ее фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. В таком случае искомой метрикой является стандартная риманова метрика.*

Заметим также, что положительность одномерной кривизны риманова многообразия влечет положительность кривизны Риччи. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. существуют римановы метрики положительной кривизны Риччи и осциллирующей (принимающей значения разных знаков) одномерной кривизны (см. [44]).

2.1. Кривизна Риччи 3-мерных групп Ли с левоинвариантными римановыми метриками

Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда, в ортобазисе работы [40], главные значения кривизны Риччи и скалярная имеют вид (см. подробнее [40]):

$$r_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3),$$

$$r_2 = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3),$$

$$r_3 = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3),$$

$$s = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

Полагая

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i, \text{ где } i = 1,2,3,$$

получаем следующие результаты Дж. Милнора [40].

Теорема 2.1.1. *В ортобазисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ трехмерной унимодулярной группы Ли G квадратичная форма Риччи диагонализируема, и формулы для вычисления главных кривизн Риччи и скалярной кривизны, указанные выше, преобразуются к виду:*

$$r_1 = 2\mu_2\mu_3, \quad r_2 = 2\mu_1\mu_3, \quad r_3 = 2\mu_1\mu_2,$$

$$s = 2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2).$$

Следствие. *1) В зависимости от выбора левоинвариантной римановой метрики квадратичная форма Риччи группы $SU(2)$ может иметь одну из следующих сигнатур: $(+,+,+)$, $(+,0,0)$, $(+,-,-)$; а скалярная кривизна быть положительной, отрицательной или нулевой. 2) Для любой левоинвариантной метрики на 3-мерной группе Гейзенберга квадратичная форма Риччи имеет сигнатуру $(+,-,-)$ и строго отрицательную скалярную кривизну s. Кроме того, для частных кривизн Риччи выполняется*

$$|r_1| = |r_2| = |r_3| = |s|.$$

3) Пусть G есть одна из групп Ли $SL(2,\mathbb{R})$ или $E(1,1)$. Тогда, в зависимости от выбора левоинвариантной метрики, квадратичная форма

Риччи группы G может иметь либо сигнатуру $(+,-,-)$, либо $(0,0,-)$. При этом скалярная кривизна строго отрицательна.

Следствие. *На трехмерной унимодулярной группе Ли определитель $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ квадратичной формы Риччи всегда неотрицателен. Если определитель равен нулю, то не менее двух из главных кривизн Риччи равны нулю.*

Заметим, что позднее О. Ковальски и С. Ничкевич получили более общий результат [38].

Теорема 2.1.2. [38] *Унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и главными кривизнами Риччи r_1, r_2, r_3 существует, если и только если $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 > 0$ или если не менее двух r_i, $i = 1,2,3$ равны нулю.*

Из формул, приведенных в начале раздела, нетрудно заметить, что выполняются равенства:

$$
\begin{aligned}
r_1 - r_2 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3),\\
r_2 - r_3 &= (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1),\\
r_3 - r_1 &= (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2).
\end{aligned}
$$

Отсюда и из теоремы Куранта-Фишера [30], а также результатов Дж. Милнора в унимодулярном случае следует

Теорема 2.1.3. [44] *Пусть $r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) : G_1 \to \mathbb{R}$ — кривизна Риччи риманова многообразия $(G,(\cdot,\cdot))$. Тогда справедливы оценки таблицы 1.*

Таблица 1

Знаки $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$	Алгебра Ли	Кривизна Риччи
$+,+,+$	$su(2)$	$r_1 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_3, \quad r_1 \le r_2 \le r_3, r_3 > 0, r_1 \ge 0$ если $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_1 + \lambda_2$. $r_2 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_3, \quad r_2 \le r_1 \le r_3, r_3 > 0, r_2 \le 0$ если $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_1 + \lambda_2 \le \lambda_3$.
$+,+,-$	$sl(2,R)$	$r_1 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_3, \quad r_1 = r_2 < r_3, r_1 < 0, r_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 = \lambda_2$. $r_1 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_3, \quad r_1 < r_2 \le r_3, r_1 < 0, r_3 \ge 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1 + \lvert\lambda_3\rvert$. $r_1 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_2, \quad r_1 < r_3 \le r_2, r_1 < 0, r_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_1 + \lvert\lambda_3\rvert < \lambda_2$.
$+,+,0$	$e(2)$	$r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) = 0$, если $0 < \lambda_1 = \lambda_2$. $r_1 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_2, \quad r_1 < r_3 < r_2, r_1 < 0, r_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
$+,-,0$	$e(1,1)$	$r_3 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_1, \quad r_1 = r_2 = 0, r_3 < 0$ если $0 < \lambda_1 = \lvert\lambda_2\rvert$. $r_3 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_2, \quad r_3 < r_1 < r_2, r_3 < 0, r_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lvert\lambda_2\rvert$. $r_3 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_1, \quad r_3 < r_2 < r_1, r_3 < 0, r_1 > 0$ если $0 = \lvert\lambda_2\rvert < \lambda_1$.
$+,0,0$	h	$r_2 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le r_1, \quad r_2 = r_3 = -\frac{1}{2}\lambda_1^2 < 0,\ r_1\frac{1}{2}\lambda_1^2 < 0.$
$0,0,0$	R^3	$r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) = 0.$

Следствие. *Пусть $(G,(\cdot,\cdot))$ — 3-мерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой положительной кривизны Риччи. Тогда алгебра Ли группы G изоморфна $su(2)$, и множество левоинвариантных римановых метрик с $r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) > 0$ определяется системой неравенств:*

$$
\begin{aligned}
&0 < r_1,\\
&0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_1 + \lambda_2.
\end{aligned}
$$

Кроме того, $d = (\min_{G_1} r_{(\cdot,\cdot)}(\pi))(\max_{G_1} r_{(\cdot,\cdot)}(\pi))^{-1} \in (0,1]$, и $d = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Замечание. Утверждение теоремы 2.1.3 для ограничений на кривизну Риччи в неунимодулярном случае аналогично унимодулярному случаю [44].

Рассмотрим подробнее неунимодулярный случай. Во-первых, заметим, что

Теорема 2.1.4. [38] *Неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и главными кривизнами Риччи r_1, r_2, r_3 существует, если и только если или $r_1 = r_2 = r_3 < 0$, или если с точностью до перестановки индексов выполняются:*

$$2r_1 < r_2 + r_3 < 0,$$
$$r_1(r_2 + r_3) \leq r_2^2 + r_3^2,$$
$$r_1 - r_2 = k(r_2 - r_3)$$

для некоторого постоянного k.

Пусть далее G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и D — инвариант, определяемый равенством (2) отличный от 1.

Следуя [40], положим: $\alpha = 1 + \xi$, $\beta = (1 + \xi)\eta$, $\gamma = -(1 - \xi)\eta$, $\delta = 1 - \xi$, где $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Тогда квадратичная форма Риччи диагонализируема в этом базисе, и ее главные кривизны и след вычисляются по формулам:

$$r_1 = -2 - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 < 0,$$
$$r_2 = -2 - 2\xi - 2\xi\eta^2 < 0,$$
$$r_3 = -2 + 2\xi + 2\xi\eta^2,$$
$$s = -6 - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 < 0, \ (\xi \geq 0, \ \eta \geq 0),$$

а условие $D \neq 1$ переписывается в виде $\xi \cdot \eta \neq 0$.

Это позволяет заметить истинность

Теорема 2.1.5. [40] *Если инвариант D отрицателен, то для любой левонвариантной метрики на неунимодулярной группе Ли G сигнатура кривизны Риччи имеет вид $(+, -, -)$. Если $D \geq 0$, то возможна также сигнатура $(0, -, -)$, и если $D > 0$ также возможна сигнатура $(-, -, -)$. Другими словами, для $D > 0$ существует левоинвариантная метрика строго отрицательной секционной кривизны и для $D > 1$ существует левоинвариантная метрика постоянной отрицательной кривизны. Во всех случаях скалярная кривизна строго отрицательна.*

В заключение приведем

Теорема 2.1.6. [9] *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда кривизна Риччи группы $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакоопределена в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 2.*

Таблица 2

Алгебра Ли	Кривизна Риччи	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма, набором структурных констант	Отрицательна	$\alpha = 1 + \xi$, $\beta = (1 + \xi)\eta$, $\gamma = (\xi - 1)\eta$, $\delta = 1 - \xi$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi < \frac{1}{1+\eta^2}$.

Замечание. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик вещественных 4-мерных групп Ли изучалась А.Г. Кремлевым, Ю.Г. Никоноровым, 5-мерных нильпотентных групп Ли — А.Г. Кремлевым и М.С. Чебарыковым. Полученные результаты о наличии возможных сигнатур приведены в работах [20, 21] и [22, 31] соответственно.

2.2. Одномерная кривизна 3-мерных групп Ли с левоинвариантными римановыми метриками

Заметим, что в ортобазисе работы Дж. Милнора [40] одномерная кривизна диагонализируема, и ее главные значения равны (см. [44]):

$$a_1 = \frac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 + 6\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2),$$
$$a_2 = \frac{1}{8}(-3\lambda_1^2 + 5\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 + 6\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3),$$
$$a_3 = \frac{1}{8}(-3\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 + 5\lambda_3^2 + 6\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3).$$

Аналогично, в неунимодулярном случае имеем (см. [44]):

$$a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2\xi^2 < 0,$$
$$a_2 = -\frac{1}{2} - 2\xi - 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2,$$
$$a_3 = -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2.$$

На основании исследования вышеприведенных функций в унимодулярном случае имеет место

Теорема 2.2.1. [44] *Пусть $A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) : G_1 \to R$ — одномерная кривизна риманова многообразия $(G, (\cdot,\cdot))$. Тогда справедливы оценки таблицы 3.*

Таблица 3

Знаки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Алгебра Ли	Кривизна Риччи
$+,+,+$	$su(2)$	$a_1 \le A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_3$, $a_1 \le a_2 \le a_3, a_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_1 + \lambda_2$. $a_2 \le A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_3$, $a_2 \le a_1 < a_3, a_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_1 + \lambda_2 \le \lambda_3$.
$+,+,-$	$sl(2,R)$	$a_1 = a_2 \le A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_3$, $a_1 < 0, a_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 = \lambda_2$. $a_1 \le A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_3$, $a_1 < a_2 \le a_3, a_1 < 0, a_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1 + \lvert\lambda_3\rvert$. $a_1 \le A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_2$, $a_1 < a_3 < a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_1 + \lvert\lambda_3\rvert < \lambda_2$.
$+,+,0$	$e(2)$	$A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) = 0$, если $0 < \lambda_1 = \lambda_2$. $a_1 \le A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_2$, $a_1 < a_3 < a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
$+,-,0$	$e(1,1)$	$a_3 \le A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_2$, $a_3 < a_1 \le a_2, a_3 < 0, a_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 = \lvert\lambda_2\rvert$. $a_3 \le A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_1$, $a_3 < a_2 \le a_1, a_3 < 0, a_1 > 0$ если $0 = \lvert\lambda_2\rvert < \lambda_1$.
$+,0,0$	h	$a_2 \le r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \le a_1, \quad a_2 = a_3 < a_1, a_2 < 0, a_1 > 0$.
$0,0,0$	R^3	$A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) = 0$.

Таблица 4

№	1	2	3	4	5
Сигнатура	$(-,-,-)$	$(-,-,0)$	$(-,-,+)$	$(-,0,0)$	$(-,0,+)$
№	6	7	8	9	10
Сигнатура	$(-,+,+)$	$(0,0,0)$	$(0,0,+)$	$(0,+,+)$	$(+,+,+)$

Занумеруем все возможные сигнатуры для трехмерного случая так, как это указано в таблице 4.

Последовательное изучение всех унимодулярных и неунимодулярных трехмерных алгебр Ли в базисах работы Дж. Милнора [40] позволяет сформулировать

Теорема 2.2.2. [6] *Пусть G – унимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, s – произвольная сигнатура из таблицы 4. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 5 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак "+".*

Таблица 5

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$su(2)$	−	−	+	−	+	+	−	+	+	+
$sl(2,R)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
$e(2)$	−	−	+	−	−	−	+	−	−	−
$e(1,1)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
h	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
R^3	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−

Таблица 6

Алгебра Ли	Одномерная кривизна	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	$\frac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3(\lambda_2-\lambda_3)^2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2) > 0$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма набором структурных констант	Отрицательна	$\alpha = 1+\xi$, $\beta = (1+\xi)\eta$, $\gamma = -(1-\xi)\eta$, $\delta = 1-\xi$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi < -2+\sqrt{4+\frac{1}{1+\eta^2}}$.

Теорема 2.2.3. [6] *Пусть G — неунимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Тогда в качестве сигнатур оператора одномерной кривизны на $\mathfrak{g}$ реализуемы только сигнатуры $(-,-,-)$, $(-,-,0)$, $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, т. е. сигнатуры 1, 2, 3, 5 и 6 таблицы 4.*

Теорема 2.2.4. [9] *Пусть $(G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда одномерная кривизна группы $(G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакоопределена в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 6.*

Изучим теперь случай, когда кривизна Риччи знакоопределена, а одномерная кривизна осциллирует, т. е. принимает значения разных знаков. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2.2.5. [9, 44] *Пусть $(G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой знакоопределенной кривизны Риччи. Тогда одномерная кривизна группы $(G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакопеременна в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 7.*

Таблица 7

Алгебра Ли	Кривизна Риччи	Одномерная кривизна	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	Осциллирует	$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма, набором структурных констант	Отрицательна	Осциллирует	$\alpha = 1+\xi$, $\beta = (1+\xi)\eta$, $\gamma = -(1-\xi)\eta$, $\delta = 1-\xi$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi < \frac{1}{1+\eta^2}$.

III. Тензорные поля Вейля и Схоутена-Вейля на группах Ли малых размерностей

3.1. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с изотропным тензором Схоутена-Вейля

Данный раздел посвящен решению задачи о существовании левоинвариантных метрик на 3-мерных группах Ли, для которых квадрат длины $||S||^2 = S_{ijk}S^{ijk}$ тензора Схоутена-Вейля тривиален, а некоторые его компоненты отличны от нуля.

Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис, удовлетворяющий теореме 7.2.1 работы [3], тогда, применяя формулы раздела 1.4 в построенном базисе, получим компоненты тензора Схоутена-Вейля и квадрата его длины (см. подробнее [3, 28]). Исследование данных компонент позволяет сформулировать

Теорема 3.1.1. [28] *Пусть G — связная трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвари-*

антной лоренцевой метрикой имеющей нетривиальный тензор Схоутена-Вейля со свойством $||S||^2 = 0$, *тогда алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *группы Ли* G *изоморфна либо* $e(1,1)$, *либо* $sl(2,R)$.

Последовательным выбором базиса теорем 7.3.1 – 7.3.3 работы [3] и рассуждениями, аналогичными унимодулярному случаю, рассматривается неунимодулярный случай (см. [3, 28]).

3.2. Левоинвариантные (псевдо)римановы метрики на 3-мерных группах Ли с почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля

В данном разделе исследуются трехмерные группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля. Напомним, что

Определение 3.2.1. *Тензор* $T_{i_1\ldots i_p}$ *строения* $(p,0)$ *(см. [33]) называется гармоническим, если выполняются следующие три условия:*

(1) $T_{i_1\cdots i_p}$ — *кососимметрический,*

(2) $\mathrm{rot}(T_{i_1 i_2\cdots i_p}) = 0$ *или* $T_{i_1 i_2\cdots i_p;t} = T_{t i_2\cdots i_p;i_1} + T_{i_1 t\cdots i_p;i_2} + \cdots + T_{i_1 i_2\cdots t;i_p}$,

(3) $\mathrm{div}(T_{i_1 i_2\cdots i_p}) = g^{i_1 t} T_{i_1\ldots i_p;t} = 0$,

и почти гармоническим, если выполняются следующие два условия:

(1) $\mathrm{rot}(T_{i_1 i_2\cdots i_p}) = 0$,

(2) $\mathrm{div}(T_{i_1 i_2\cdots i_p}) = g^{i_1 t} T_{i_1\ldots i_p;t} = 0$.

Понятие почти гармонического тензора вводится потому, что кососимметрическая часть $S_{[ijk]}$ и симметрическая часть $S_{(ijk)}$ тензора Схоутена-Вейля равны нулю. Таким образом, для тензора Схоутена-Вейля не выполняется первое условие из данного определения гармонического тензора.

Первоначально приведем несколько фактов, не зависящих от размерности. Их доказательство может быть найдено, например, в [3].

Теорема 3.2.1. *Пусть* M — *риманово многообразие, тогда*

$$S_{ijk;t} + S_{ikt;j} + S_{itj;k} = \\ = \frac{1}{n-2}(R_{tki}{}^p r_{pj} + R_{kji}{}^p r_{pt} + R_{jti}{}^p r_{pk}).$$

Отметим, что если в условиях теоремы $n = 3$, то

$$S_{ijk;t} + S_{ikt;j} + S_{itj;k} = 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\}.$$

Теорема 3.2.2. *Пусть* M — *риманово многообразие, тогда справедливы равенства*

$$\mathrm{div}_1(S) = 0;$$
$$\mathrm{div}_2(S) = \frac{1}{n-2}\left(s_{;ik} + r_k{}^p r_{ip} + \right. \\ \left. + g^{jt}\left(R_{tki}{}^p r_{pj} - r_{ik;jt} - \frac{s_{;kt}g_{ij} - s_{;jt}g_{ik}}{2(n-1)}\right)\right).$$

Следствие. *Пусть* $M = G$ — *группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{div}_2(S) = \frac{1}{n-2}\left(g^{jt}\left(R_{tki}{}^p r_{pj} - r_{ki;jt}\right) + r_k{}^p r_{ip}\right).$$

Для дальнейшего исследования левоинвариантных римановых метрик 3-мерных групп Ли с почти гармоническим тензором Вейля рассмотрим базис работы Дж. Милнора [40]. Применяя формулы раздела 1.4 и приведенные выше теоремы данного раздела, определяем компоненты ротора и дивергенции тензора Схоутена-Вейля. Отсюда следуют теоремы (см. подробнее [3, 12]).

Теорема 3.2.3. [12] *Пусть* G — *трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathrm{div}_1(S) = 0$. *Тензор Схоутена-Вейля является почти гармоническим в том и только том случае, если алгебра Ли группы* G *имеет один из следующих типов: либо* $su(2)$, *либо* $e(2)$, *либо* R^3, *левоинвариантная риманова метрика гомотетична стандартной (т. е. структурные константы алгебры Ли равны между собой), а тензор Схоутена-Вейля тривиален.*

(2) $\mathrm{div}_2(S) = 0$ *тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы* G *имеет один из следующих типов: либо* $su(2)$, *либо* $e(2)$, *либо* R^3, *левоинвариантная риманова метрика гомотетична стандартной, а тензор Схоутена-Вейля тривиален.*

Теорема 3.2.4. [12] *Пусть* G — *трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathrm{div}_1(S) = 0$. *Тензор Схоутена-Вейля является почти гармоническим в том и только том случае, если матрица структурных констант алгебры Ли группы* G *имеет вид:*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2-\delta & \pm\sqrt{2\delta-\delta^2} \\ \pm\sqrt{2\delta-\delta^2} & \delta \end{pmatrix},$$

где $\delta \in [0,2]$, *а тензор Схоутена-Вейля тривиален.*

(2) $\mathrm{div}_2(S) = 0$ *тогда и только тогда, когда матрица структурных констант алгебры Ли группы* G *имеет вид такой же, как в (1), а тензор Схоутена-Вейля тривиален.*

Аналогичными рассуждениями в базисе работы [28] с привлечением результатов предыдущего раздела, получаем 3-мерные группы Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками и почти гармоническим тензором Схоутена- Вейля (см. подробнее [8, 11]).

3.3. Гармоничность формы Схоутена-Вейля по направлению на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой

Пусть $V = V^i E_i$ — левоинвариантное векторное поле. Отождествим V с вектором $\{V^k\} \in T_eG$ и определим кососимметрический тензор $w = \|w_{ij}\|$ по направлению вектора $\{V^k\}$ формулой

$$w_{ij} = V^k S_{kij}. \tag{12}$$

В силу косой симметрии тензора Схоутена-Вейля S_{kij} по индексам i и j тензор w_{ij} — кососимметрический. Ковариантные производные этого тензора равны

$$w_{ij;k} = w_{lj}\Gamma^l_{ki} + w_{il}\Gamma^l_{kj}.$$

Ротор и дивергенция тензора w_{ij} вычисляются соответственно по формулам:

$$\mathrm{rot}(w) = w_{ij;t} - w_{tj;i} - w_{it;j},$$
$$\mathrm{div}(w) = g^{it} w_{ij;t}.$$

Наряду с произвольными векторами будем рассматривать и гармонические векторы.

Определение 3.3.1. *Вектор $\{V^i\}$ называется гармоническим, если выполняются следующие условия:*

(1) $\mathrm{rot}(V) = V^i_{\ ;j} - V^j_{\ ;i} = 0$,

(2) $\mathrm{div}(V) = V^i_{\ ;i} = 0,$

где $V^i_{\ ;j} = -V^l \Gamma^i_{lk}$ — ковариантные производные вектора $\{V^i\}$.

Применяя данную конструкцию можно классифицировать 3-мерные группы и алгебры Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и гармонической формой w_{ij} по направлению произвольного или гармонического вектора (см. подробнее [2, 3, 12]).

3.4. Гармоничность тензора Вейля на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

Данный раздел посвящен исследованию вопроса гармоничности тензора Вейля W.

Определение 3.4.1. [4, 39] *(Псевдо)риманово многообразие (M, g) размерности $n \geq 4$ называется C-пространством или пространством с гармоническим тензором Вейля, если* $\mathrm{div}W = 0$.

Фиксируя на каждой четырехмерной вещественной алгебре Ли ортонормированный базис работ [20, 21] и применяя формулы раздела 1.4, находим компоненты дивергенции тензора Вейля, исследование которых позволяет сформулировать теоремы (см. подробнее [5, 7, 15, 16]).

Теорема 3.4.1. [15] *Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и разложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div}W = 0$ *в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в 8.*

Таблица 8

Алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы c^k_{ij}	Ограничения на c^k_{ij}
$4\mathbb{A}_1$	Алгебра коммутативная, т. е. все $c^k_{ij} = 0$	
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = B,\ c^1_{2,3} = B$	$B > 0$
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = C,\ c^2_{1,3} = -C$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{2,3} = C,\ c^2_{1,3} = -C$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = c^1_{2,3} = CL^2 + C,\ c^2_{1,3} = -C,\ c^4_{1,3} = CL$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = -c^2_{1,3} = BK^2 + B,\ c^1_{2,3} = B,\ c^4_{2,3} = -BK$	$B > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = H,\ c^4_{1,2} = -HM,\ c^1_{2,3} = -c^2_{1,3} = HM^2 + H$	$H > 0$

Теорема 3.4.2. [15] *Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и неразложимой алгеброй Ли. Тогда G не является C-пространством.*

Теорема 3.4.3. [7] *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и разложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div}W = 0$ *в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 9.*

Таблица 9

Алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы c_{ij}^k	Ограничения на c_{ij}^k
$\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$	$c_{1,2}^2 = H$	H>0
$2\mathbb{A}_2$	$c_{1,2}^2 = H,\ c_{3,4}^4 = G$	H>0, G>0
$\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = H$	$H > 0$
$\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = \alpha L, -c_{1,3}^2 = c_{2,3}^1 = L$	$L > 0$

Теорема 3.4.4. [3] *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и неразложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div}W = 0$ *в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 10.*

Таблица 10

Алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы c_{ij}^k	Ограничения на c_{ij}^k
$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L$	L>0
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = \alpha L, c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$	$\alpha \neq 0, L > 0$
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta L, c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$	$\beta > 0, L > 0$
$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2H, c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H$	$H > 0$
$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2H\alpha, c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H\alpha, c_{2,4}^2 = -c_{3,4}^2 = H$	$H > 0, \alpha > 0$
$\mathbb{A}_{4,12}$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = H, c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = B, c_{1,4}^2 = -c_{2,4}^1 = -D$	$H > 0, D > 0$

3.5. О разложении оператора кривизны в слоях пространства расслоения бивекторов над четырехмерной группой Ли

В настоящем разделе исследуются 4-мерные римановы многообразия с теми или иными ограничениями на целую часть разложения тензора кривизны в прямую сумму произведения Кулкарни-Номидзу тензора одномерной кривизны с метрическим тензором и тензора Вейля W. Изучаются 4-мерные римановы многообразия, для которых автодуальная или антиавтодуальная составляющая тензора Вейля W равна нулю (см., например, [4]). Такие многообразия называются конформно полуплоскими [4, 34], в отличие от конформно плоских ($W = 0$). Конформно плоские римановы метрики исследовались в [3, 42]. Однородные конформно плоские римановы многообразия классифицированы Д.В. Алексеевским и Б.Н. Кимельфельдом в [1]. Вопрос о классификации конформно полуплоских однородных римановых многообразий в общем случае остается открытым. В настоящем разделе дана классификация вещественных четырехмерных алгебр Ли конформно полуплоских групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Сначала рассмотрим римановы многообразия с условием равенства нулю целой части: $A \owedge g = 0$, и приведем несколько общих фактов, с доказательством которых можно ознакомиться в [14].

Теорема 3.5.1. [14] *Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n. Тогда $A \owedge g = 0$ в том и только том случае, если кривизна Риччи многообразия (M, g) равна нулю, или (M, g) является эйнштейновым многообразием с тривиальной константой Эйнштейна.*

Прямым следствием данной теоремы и теоремы Алексеевского-Кимельфельда является

Следствие. *Однородное риманово многообразие (M, g) с условием $A \owedge g = 0$ изометрично прямому риманову произведению евклидова пространства и плоского тора.*

Далее будем считать, что $\dim M = 4$. Тогда риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу:

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j)).$$

Оператор Ходжа $* : \Lambda_x^2 M \to \Lambda_x^2 M$, задаваемый соотношением

$$\langle *\alpha, \beta \rangle \,\mathrm{vol} = \alpha \wedge \beta$$

для любых $\alpha, \beta \in \Lambda_x^2 M$, $x \in M$), где vol — форма объема на M, обладает тем свойством, что$*^2 = \mathrm{Id}$. Отсюда

$$\Lambda_x^2 M = \Lambda_x^+ \oplus \Lambda_x^-, \qquad (13)$$

где Λ_x^+ и Λ_x^- обозначают соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 оператора $*$.

Риманову тензору кривизны в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор $\mathcal{R} : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V)\rangle_x = R_x(X, Y, T, V),$$

где $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$.

Матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ относительно разложения (13) можно представить в блочном виде [45]:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array} \right),$$

где W^+ и W^- — матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора Вейля W.

Согласно (3), можем записать

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} W^+ & 0 \\ \hline 0 & W^- \end{array} \right), \quad (14)$$

где первая матрица соответствует произведению $A \owedge g$, а вторая — тензору Вейля W.

Любой ортонормированный базис e_1, e_2, e_3, e_4 пространства T_xM определяет ортонормированный базис

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3) \end{array} \quad (15)$$

пространства $\Lambda^{\pm}_x M$ (см., например, [4]).

Отметим, что матрицы W^+ и W^- являются симметричными и их компоненты в ортонормированном базисе (15) находятся по формулам:

$$W^+_{11} = \frac{1}{2}(R_{1212} + 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12},$$
$$W^+_{22} = \frac{1}{2}(R_{1313} - 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12},$$
$$W^+_{33} = \frac{1}{2}(R_{1414} + 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12},$$
$$W^+_{12} = \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442}),$$
$$W^+_{13} = \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423}),$$
$$W^+_{23} = \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}),$$

и соответственно

$$W^-_{44} = \frac{1}{2}(R_{1212} - 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12},$$
$$W^-_{55} = \frac{1}{2}(R_{1313} + 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12},$$
$$W^-_{66} = \frac{1}{2}(R_{1414} - 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12},$$
$$W^-_{45} = \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} - R_{3413} + R_{3442}),$$
$$W^-_{46} = \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} - R_{3414} + R_{3423}),$$
$$W^-_{56} = \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} - R_{4214} + R_{4223}),$$

а элементы блока Z в базисе (15) равны:

$$Z_{11} = \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3434}),$$
$$Z_{22} = \frac{1}{2}(R_{1313} - R_{2424}),$$
$$Z_{33} = \frac{1}{2}(R_{1414} - R_{2323}),$$
$$Z_{12} = \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} + R_{3413} - R_{3442}),$$
$$Z_{13} = \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} + R_{3414} - R_{3423}),$$
$$Z_{23} = \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}).$$

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируем в $\mathfrak{g}$ базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ работ [20, 21]. Применяя формулы раздела 1.4 и вышеприведенные формулы блоков $W^{\pm}$, Z, находим компоненты блоков матрицы (14). Исследование которых позволяет сформулировать (см. подробнее [10, 13])

Теорема 3.5.2. [13] *Пусть G — вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда*
1) $W^+ = 0$ в том и только том случае, если $W = 0$;
2) $W^- = 0$ в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий: либо $W = 0$, либо алгебра Ли группы G есть одна из алгебр следующего списка: алгебра Ли $\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$ $(-1 < \beta \le 1)$ с набором структурных констант $c^1_{1,4} = 2H$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H > 0$, $\beta = 1$ или $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2H$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H > 0$, $\beta = 1$; алгебра Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$ $(\alpha > 0)$ с набором структурных констант $c^1_{1,4} = 2H\alpha$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H\alpha$, $c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -H$, $H > 0$ или $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2H\alpha$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H\alpha$, $c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -H$, $H > 0$.

Теорема 3.5.3. [10] *Пусть G — действительная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда, если $A \owedge g = 0$, то алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна либо алгебре Ли $4\mathbb{A}_1$, либо $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$.*

Теорема 3.5.4. [10] *Пусть G — действительная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда $A \owedge g \neq 0$.*

Заключение

Приведем список задач, которые связаны с тематикой данной работы и остаются открытыми.

1. Обобщить результаты О. Ковальского и С. Ничкевич о возможных сигнатурах оператора Риччи (оператора одномерной кривизны) в размерности 4 (см. [38]).

2. Исследовать возможные сигнатуры оператора одномерной кривизны на 4-мерных группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками.

3. Классифицировать конформно полуплоские 4-мерные однородные римановы многообразия.

4. Получить оценки различного типа кривизн для 4-мерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

5. Получить оценки различного типа кривизн для 4-мерных однородных римановых пространств.

6. Исследовать области знакоопределенной кривизны Риччи (одномерной кривизны) в случае 4-мерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

7. Изучить области знакоопределенной кривизны Риччи (одномерной кривизны) в случае 4-мерных однородных римановых пространств.

8. Иследовать трехмерные и четырехмерные однородные (псевдо)римановы многообразия с (почти)гармоническим тензором Вейля, Схоутена-Вейля.

Литература

[1] Алексеевский, Д. В.*Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий* / Д. В. Алексеевский, Б. Н. Кимельфельд // Мат. заметки. – 1978. – Т. 24, № 1. – С. 103 – 110.

[2] Балащенко, В. В. *Левоинвариантные римановы метрики с гармонической сверткой тензора Схоутена-Вейля на трехмерных группах Ли* / В. В. Балащенко, О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Вестник БГПУ, серия: естественные и точные науки. – 2007. – № 7. – С. 5 – 13.

[3] Балащенко, В. В. *Однородные пространства: теория и приложения* // В. В. Балащенко, Ю. Г. Никоноров, Е. Д. Родионов, В. В. Славский – Ханты-Мансийск, Югорск. гос. ун-т, 2008 – 280 с.

[4] Бессе, А. *Многообразия Эйнштейна* / А. Бессе. – М.: Мир, 1990. – 704 с.

[5] Воронов, Д. С. *Гармонический тензор Вейля на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / Д. С. Воронов, О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Вестник АлтГПА: естественные и точные науки. – 2010. – № 2. – С. 5 – 24

[6] Воронов, Д. С. *Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / Д. С. Воронов, О. П. Гладунова // Известия АГУ: математика и механика. – 2010. – № 1. – Вып. 2 – С. 24 – 28.

[7] Воронов, Д. С. *Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля* / Д. С. Воронов, Е. Д. Родионов // ДАН. – 2010. – Т. 432. – № 3. – С. 301 – 303.

[8] Гладунова, О. П. *Левоинвариантные лоренцевы метрики с почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Вестник БГПУ: естественные и точные науки. – 2006. – № 6. – С. 10 – 26.

[9] Гладунова, О. П. *Области знакоопределенной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Вестник АлтГПА: естественные и точные науки. – 2011. – № 3.

[10] Гладунова, О. П. *Об операторе кривизны на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Известия АГУ: математика и механика. – 2010. – № 1. – Вып. 2. – С.29 – 33.

[11] Гладунова, О. П. *О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // ДАН. – 2009. – Т. 428. – № 6. – С. 733 – 736.

[12] Гладунова, О. П. *О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // ДАН. – 2008. – Т. 419. – № 6. – С. 735 – 738.

[13] Гладунова, О. П. *О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Т. 13. – Вып. 3. – С. 3 – 16.

[14] Гладунова, О. П. *Римановы многообразия с тривиальной целой частью в разложении тензора кривизны* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Известия АГУ: математика и механика. – 2011. – № 2. – Вып. 2.

[15] Гладунова, О. П., Славский В.В. *Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля* / О. П. Гладунова, В. В. Славский // ДАН. – 2010. – Т. 431. – № 6. – С. 736 – 738.

[16] Гладунова, О. П. *О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли* / О. П. Гладунова, В. В. Славский // Мат. труды. – 2011. – Т. 14. – № 1. – С. 1 – 20.

[17] Джекобсон, Н. *Алгебры Ли*/ Н. Джекобсон. – М.: Мир, 1964. – 357 с.

[18] Дубровин, Б. А. *Современная геометрия. Методы и приложения*/ Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: Наука, 1986. – 760 с.

[19] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии.* / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981.

[20] Кремлев, А. Г. *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай* / А. Г. Кремлев, Ю. Г. Никоноров // Мат. труды – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 115 – 147.

[21] Кремлев, А. Г. *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай* / А. Г. Кремлев, Ю. Г. Никоноров // Мат. труды – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 40 – 116.

[22] Кремлев, А. Г. *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на пятимерных нильпотентных группах Ли* / А. Г. Кремлев // Сибирские электронные известия – 2009. – Т. 6. – С. 326 – 339.

[23] Морозов, В. В. *Классификация нильпотентных алгебр Ли 6-го порядка* / В. В. Морозов // Изв. вузов. Серия: математика. – 1958. – Т. 5, № 4. – С. 161 – 174.

[24] Мубаракзянов, Г. М. *Классификация вещественных структур алгебр Ли 5-го порядка*/ Г. М. Мубаракзянов // Изв. вузов. Серия: математика – 1963. – Т. 34, № 3. – С. 99 – 106.

[25] Мубаракзянов, Г.М. *О разрешимых алгебрах Ли*/ Г. М. Мубаракзянов // Изв. вузов. серия: математика – 1963. – Т. 32, № 1. – С. 144 – 123.

[26] Новиков, С. П. *Современные геометрические структуры и поля*/ С. П. Новиков, И. А. Тайманов. – М.: МЦНМО, 2005. – 584 с.

[27] Понтрягин, Л. С. *Непрерывные группы*/ Л. С. Понтрягин. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 520 с.

[28] Родионов, Е. Д. *Левоинвариантные лоренцевы метрики на группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля* / Е. Д. Родионов, В. В. Славский, Л. Н. Чибрикова // Вестник БГПУ. Серия: естественные и точные науки. – Вып. 4. – 2004.

[29] Хелгасон, С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства* /С. Хелгасон. – М.: Мир, 1964. – 608 с.

[30] Хорн, Р. *Матричный анализ*/ Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 656 с.

[31] Чебарыков, М. С. *О кривизне Риччи неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли*/ М. С. Чебарыков // Мат. труды. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 186 – 211.

[32] Шевалле, К. *Теория групп Ли. Т. 1.* / К. Шевалле. – М.: ИЛ, 1948. – 274 с.

[33] Яно, К. *Кривизна и числа Бетти*/ К. Яно, С. Бохнер. – М.: ИЛ, 1957. – 154 с.

[34] Atiyah M. F. *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry* / M. F. Atiyah, N. J. Hitchin,I. M. Singer // Proc. Roy. Soc. London Ser.A – 1978. – V. 362, no. 1711. – P. 425 – 461.

[35] Berard-Bergery L. *Les espaces homogenes Riemanniens de dimension 4* / L. Berard-Bergery // Semin. Arthur Besse. – Paris, 1978/79, (1981). – P. 40 – 60.

[36] Bochner,S. *Vectors fields and Ricci curvature*/ S. Bochner // Bull. Ann. Math. Soc. – 1946. – Vol. 52. – P. 776 – 797.

[37] Ishihara, S.*Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions* / S. Ishihara // J. Math. Soc. Japan. – 1955. – Vol. 7. – P. 345 – 370.

[38] Kowalski, O.*On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds*/ O. Kowalski, S. Nikcevic. // Geom. Dedicata. – 1996. – no. 1. – P. 65 – 72.

[39] Listing, M.*Conformal Einstein spaces in N-dimensions*/ M. Listing // Ann. Global Anal. Geom. – 2001. – Vol. 20. – P. 183 — 197.

[40] Milnor, J.*Curvature of left invariant metric on Lie groups*/ J. Milnor // Advances in mathematics. – 1976. – Vol. 21. – P. 293 – 329.

[41] Myers, S. B.*Riemannian manifolds with positive mean curvature* / S. B. Myers // Duke Math. J. – 1941. – Vol. 8. – P. 401 – 404.

[42] Nikonorov, Yu. G. *Geometry of homogeneous Riemannian manifolds*/Yu. G. Nikonorov, E. D. Rodionov, V. V. Slavsky // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – Vol. 146, no. 6. – P. 6313 – 6390.

[43] Patrangenaru, V.*Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triple*/ V. Patrangenaru // Pacific J. Math. – 1996. – V. 173, no. 1. – P. 511 – 532.

[44] Rodionov, E. D.*Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups*/ E. D. Rodionov, V. V. Slavsky // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7th International Conference. – Brno, 1999. – P. 111 – 126.

[45] Singer, I. M. *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces* / I. M. Singer, J. A. Thorpe // Global Analisis, Papers in Honour of K. Kodarira, Univ. Tokyo Press. – 1969. – P. 355 – 365.

[46] Yano, K. *Differential geometry on complex and almost complex spaces* / K. Yano. – Pergamon press, 1965. – 325 p.

УДК 514.76.2

ПРОСТРАНСТВО ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР НА 6-МЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Н. А. Даурцева

THE SPACE OF LEFTINVARIANT ORTHOGONAL ALMOST COMPLEX STRUCTURES ON 6-DIMENSIONAL LIE GROUPS

N. A. Daurtseva

В статье изучается пространство $\mathcal{Z}$ левоинвариантных ортогональных почти комплексных структур на 6-мерной группе Ли. Для явного описания элементов этого пространства используется изоморфизм $\mathcal{Z}$ и $\mathbb{C}P^3$, а также тот факт, что $\mathbb{C}P^3/T^3$ есть 3-мерный тетраэдр. Получены явные формулы для описания почти комплексной структуры как композиции поворотов.

The space $\mathcal{Z}$ of leftinvariant orthogonal almost complex structures on 6-dimensional Lie groups is researched. For the explicit view of this space elements the isomorphism of $\mathcal{Z}$ and $\mathbb{C}P^3$ is used. Representation of $\mathbb{C}P^3/T^3$ as 3-dimensional tetrahedron is used too. The explicit formula for almost complex structure as composition of rotations is found.

Ключевые слова: почти комплексные структуры, группы Ли.

Keywords: almost complex structures, Lie groups.

1. Введение

Пусть G – 6-мерная группа Ли. Всякую левоинвариантную почти комплексную структуру можно отождествить с эндоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ этой группы, квадрат которого равен минус единице. Если на группе Ли зафиксирована некоторая левоинвариантная метрика, то это позволяет выделить в множестве всех почти комплексных структур подмножество ортогональных, т. е. сохраняющих данную метрику. Пространство таких почти комплексных структур, дополнительно сохраняющих ориентацию, есть однородное пространство $\mathcal{Z} = SO(6)/U(3)$ изоморфное $\mathbb{C}P^3$. В различных задачах, возникающих для почти эрмитовых структур на многообразиях и, в частности, группах Ли, возникает необходимость в явных формулах, задающих почти комплексную структуру вместо неявного условия $I^2 = -1$. В двумерном случае существует ровно одна почти комплексная структура, ортогональная относительно некоторой метрики. В 4-мерном случае такие структуры образуют двупараметрическое семейство, параметризуемое точками на сфере S^2 (см., например, [8]). В 6-мерном случае ортогональные структуры образуют 6-параметрическое семейство и явное описание таких структур в литературе отсутствует.

Основным результатом данной статьи является явное описание структур из $\mathcal{Z}$, через однородные координаты в $\mathbb{C}P^3$, а также описание этих структур как композиции поворотов в некотором базисе алгебры Ли.

2. Определения и обозначения

Пусть (M^{2n}, g) – риманово многообразие класса C^∞.

Определение 1. *Почти комплексной структурой на M называется поле эндоморфизмов $J_x : T_xM \longrightarrow T_xM$, гладко зависящее от $x \in M$ и удовлетворяющее условию $J_x^2 = -Id_x$, где Id_x – тождественный эндоморфизм T_xM, $\forall x \in M$. Если почти комплексная структура оставляет метрику g инвариантной:*

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \Xi(M),$$

то J называется ортогональной относительно метрики g, а пару (g, J) на M^{2n} называют почти эрмитовой структурой. Многообразие, наделенное почти эрмитовой структурой, называется почти эрмитовым.

Определение 2. *Будем говорить, что почти комплексная структура J на M ассоциирована с кососимметрической 2-формой ω, если*

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \Xi(M).$$

Если (g, J) почти эрмитова структура на M, то такая 2-форма ω определяется по формуле

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

и называется фундаментальной 2-формой.

Замечание 1. Мы будем отождествлять почти комплексную структуру с ее фундаментальной формой, когда это будет удобно.

Замечание 2. Каждая почти комплексная структура на многообразии определяет на нем некоторую ориентацию [3].

Пусть теперь $M = G$ – 6-мерная группа Ли, g – некоторая левоинвариантная метрика на G. Левоинвариантная почти комплексная структура I на G однозначно определяется своим значением на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, линейным эндоморфизмом:

$$I : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad I^2 = -1. \qquad (1)$$

С другой стороны, линейный эндоморфизм (1) определяет левоинвариантную почти комплексную структуру на группе Ли G. В случае, когда речь идет о левоинвариантных структурах на группе Ли, их ограничение на алгебру Ли мы будем обозначать также как и структуру на всей группе. Таким образом, множество всех g-ортогональных левоинвариантых почти комплексных структур на группе Ли G есть множество всех линейных эндоморфизмов:

$$I : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad I^2 = -1,$$
$$g(IX, IY) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Множество $\mathcal{Z}$ всех таких почти комплексных структур, сохраняющих ориентацию, есть однородное пространство $SO(6)/U(3)$. Действительно [3], зафиксируем некоторый ортонормированный базис $(e) = (e_1, \ldots, e_6)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть I_0 – почти комплексная структура, такая что $I_0 e_1 = -e_4$, $I_0 e_2 = -e_5$, $I_0 e_3 = -e_6$, тогда любая другая левоинвариантная ортогональная почти комплексная структура I может быть получена из I_0 как $I = SI_0S^{-1}$, для некоторого $S \in SO(6)$, т. е. группа $SO(6)$ действует на $\mathcal{Z}$ транзитивно. Подгруппа изотропии элемента I_0 состоит из ортогональных, коммутирующих с I_0 матриц, то есть совпадает с $U(3)$. Следовательно, $\mathcal{Z} = SO(6)/U(3)$.

3. Диффеоморфизм $\mathcal{Z}$ в $\mathbb{C}P^3$

Известно [4], что $SO(6)/U(3)$ диффеоморфно $\mathbb{C}P^3$. Построим этот диффеоморфизм в явном виде. Пусть (v^0, v^1, v^2, v^3) – унитарный базис $V = \mathbb{C}^4$. Тогда $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ можно отождествить с $\mathfrak{g}^*$:

$$\begin{aligned} &2v^0 \wedge v^1 = e^1 + ie^4, \quad 2v^2 \wedge v^3 = e^1 - ie^4, \\ &2v^0 \wedge v^2 = e^2 + ie^5, \quad 2v^3 \wedge v^1 = e^2 - ie^5, \\ &2v^0 \wedge v^3 = e^3 + ie^6, \quad 2v^1 \wedge v^2 = e^3 - ie^6, \end{aligned} \qquad (2)$$

здесь e^i обозначает ковектор, дуальный к e_i. Почти комплексная структура I на $\mathfrak{g}$ стандартным образом – $(Ie^i)(X) = e^i(IX)$ определяет почти комплексную структуру на $\mathfrak{g}^*$, которую мы будем обозначать так же. Каждая почти комплексная структура определяет разложение комплексификации $\mathfrak{g}^{*\mathbb{C}}$ в прямую сумму собственных подпространств:

$$\mathfrak{g}^{*1,0} = \{\alpha \in \mathfrak{g}^{*\mathbb{C}} : I\alpha = i\alpha\} = \{\varphi - iI\varphi : \varphi \in \mathfrak{g}^*\},$$
$$\mathfrak{g}^{*0,1} = \{\alpha \in \mathfrak{g}^{*\mathbb{C}} : I\alpha = -i\alpha\} = \{\varphi + iI\varphi : \varphi \in \mathfrak{g}^*\}.$$

Обратно, каждая почти комплексная структура однозначно определяется через $\mathfrak{g}^{*1,0}$.

Для стандартной структуры $I = I_0$ собственное подпространство, соответствующее i, есть $\mathfrak{g}^{*1,0} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e^1 + ie^4, e^2 + ie^5, e^3 + ie^6\}$, а значит, согласно формулам (2) $\mathfrak{g}^{*1,0}$, отождествляется с $V_{v^0} = \{v^0 \wedge v,\ v \in V\} \subset \Lambda^2 V$.

Произвольная почти комплексная структура I ведет себя так же, как I_0 в другом базисе $(e') = (e)S$, где $S \in SO(6)$. Так как $SU(4) \longrightarrow SO(6)$ образует двойное накрытие, то для произвольной почти комплексной структуры подпространство в $\Lambda^2 V$, соответствующее $\mathfrak{g}^{*1,0}$, имеет аналогичный вид:

$$V_u = \{u \wedge v : v \in V\} \subset \Lambda^2 V.$$

Таким образом, каждая структура из $\mathcal{Z}$ может быть отождествлена с точкой из $\mathbb{C}P^3$ следующим образом:

$$I \in \mathcal{Z} \longrightarrow \mathfrak{g}^{*1,0} \longrightarrow V_u \longrightarrow [u] \in \mathbb{C}P^3.$$

Кроме стандартной структуры I_0, определим еще три почти комплексные структуры, которые на векторах базиса действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} I_0e^1 = -e^4, I_0e^2 = -e^5, I_0e^3 = -e^6; \\ I_1e^1 = -e^4, I_1e^2 = e^5, I_1e^3 = e^6; \\ I_2e^1 = e^4, I_2e^2 = -e^5, I_2e^3 = e^6; \\ I_3e^1 = e^4, I_3e^2 = e^5, I_3e^3 = -e^6. \end{aligned}$$

Все они задают одну и ту же ориентацию, сохраняют метрику g, лежат в $\mathcal{Z}$ и соответствуют точкам $[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1] \in \mathbb{C}P^3$. Фундаментальные 2-формы, соответствующие этим структурам, имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_0 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6; \\ \omega_1 = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^6; \\ \omega_2 = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^6; \\ \omega_3 = -e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6. \end{aligned}$$

Пусть $z = [z^0, z^1, z^2, z^3]$ и $u = [u^0, u^1, u^2, u^3]$ произвольные точки в $\mathbb{C}P^3$. Эти две точки могут быть соединены 'ребром', состоящим из точек $\alpha z + \beta u$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\quad |\alpha| + |\beta| \neq 0$, будем обозначать его $\mathcal{E}_{zu}$ Не сложно показать, что 'ребро' $\mathcal{E}_{zu} = \{[\alpha, \beta] : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0\} = \mathbb{C}P^1 = S^2$. Аналогично три произвольные точки, не лежащие на одном 'ребре', определяют грань $\mathcal{F} = \mathbb{C}P^2$.

Таким образом, проективное пространство $\mathbb{C}P^3$ можно визуализировать как заполненный тетраэдр с вершинами $\omega_0 = [1,0,0,0]$, $\omega_1 = [0,1,0,0]$, $\omega_2 = [0,0,1,0]$, $\omega_3 = [0,0,0,1]$, 'ребрами' $\mathcal{E}_{ij} \cong \mathbb{C}P^1$ и 'гранями' $\mathcal{F}_i \cong \mathbb{C}P^2$ (ребро $\mathcal{E}_{ij}$ соединяет формы ω_i и ω_j, грань $\mathcal{F}_i$ является 'противолежащей' к вершине ω_i).

Лемма 1. *Фундаментальная 2-форма $\omega \in \mathcal{E}_{01}$ имеет вид:*

$$\begin{aligned} \omega = e^1 \wedge e^4 + r(e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6) + \\ + u(e^2 \wedge e^3 + e^6 \wedge e^5) + x(e^2 \wedge e^6 + e^5 \wedge e^3), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $r^2 + u^2 + x^2 = 1$.

Доказательство. Для произвольной формы $\omega \in E_{01}$ найдутся такие числа $s, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $s^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$, что соответствующая почти комплексная структура $I = sI_0 + (c_1 + ic_2)I_1$.

$$s[1,0,0,0] + (c_1 + ic_2)[0,1,0,0] = [s, c_1 + ic_2, 0, 0].$$

Пространство

$$V_{[s,c_1+ic_2,0,0]} = \{sv^0 + (c_1+ic_2)v^1 \wedge u, u \in V_\uparrow\}.$$

Поскольку $(sv^0 + (c_1+ic_2)v^1) \wedge v^0 = (c_1+ic_2)v^1 \wedge v^0 = -\frac{1}{2}(c_1+ic_2)(e^1+ie^4) = \frac{1}{2}(-c_1e^1 + c_2e^4 + +i(-c_2e^1 - c_1e^4))$, то для почти комплексной структуры $I \in \mathcal{E}_{01}$:

$$I(-c_1e^1 + c_2e^4) = c_2e^1 + c_1e^4.$$

Аналогично, равенства

$$(sv^0 + (c_1+ic_2)v^1) \wedge v^1 = \frac{1}{2}(se^1 + ise^4);$$

$$(sv^0+(c_1+ic_2)v^1)\wedge v^2 = sv^0\wedge v^2+(c_1+ic_2)v^1\wedge v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(s(e^2+ie^5) + (c_1+ic_2)(e^3-ie^6)) =$$

$$= \frac{1}{2}(se^2 + c_1e^3 + c_2e^6 + i(se^5 + c_2e^3 - c_1e^6));$$

$$(sv^0+(c_1+ic_2)v^1)\wedge v^3 = sv^0\wedge v^3+(c_1+ic_2)v^1\wedge v^3 =$$

$$= \frac{1}{2}(s(e^3+ie^6) + (c_1+ic_2)(-e^2+ie^5)) =$$

$$= \frac{1}{2}(se^3 - c_1e^2 - c_2e^5 + i(se^6 - c_2e^2 + c_1e^5))$$

дают:

$$I(se^1) = -se^4,$$

$$I(se^2 + c_1e^3 + c_2e^6) = -(se^5 + c_2e^3 - c_1e^6),$$

$$I(se^3 - c_1e^2 - c_2e^5) = -(se^6 - c_2e^2 + c_1e^5).$$

Тогда $\omega \in \mathcal{E}_{01}$, соответствующая I, имеет вид:

$$\omega = (-c_1e^1 + c^2e^4)\wedge(-c_2e^1 - c^1e^4) + se^1\wedge se^4 + (se^2 + c_1e^3 + c_2e^6)\wedge(se^5 + c_2e^3 - c_1e^6) +$$
$$+(se^3 - c_1e^2 - c_2e^5)\wedge(se^6 - c_2e^2 + c_1e^5) = e^1\wedge e^4 + (s^2 - c_1^2 - c_2^2)e^2\wedge e^5 + 2sc_2e^2\wedge e^3 -$$
$$-2sc_1e^2\wedge e^6 - 2sc_1e^5\wedge e^3 - 2sc_2e^5\wedge e^6 + (s^2 - c_1^2 - c_2^2)e^3\wedge e^6.$$

Полагая $r = s^2 - c_1^2 - c_2^2 = 2s^2 - 1$, $u = 2sc_2$, $x = -2sc_1$, можно привести форму ω к виду (3).

□

Теорема 1. *Пусть $[1, a, b, c] \in \mathbb{C}P^3$ – произвольная точка, не принадлежащая грани $\mathcal{F}_0$. Левоинвариантная почти комплексная структура $I \in \mathcal{Z}$, соответствующая этой точке, лежит в окрестности $U(I_0) = \{I \in \mathcal{Z} : 1 - II_0 - \text{обратим}\}$ структуры I_0 и в базисе (e) задается матрицей:*

$$\frac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 2\Im(\overline{a}b+c) & 2\Im(\overline{a}c-b) & x-2|b|^2-2|c|^2 & 2\Re(\overline{a}b-c) & 2\Re(\overline{a}c+b) \\ -2\Im(\overline{a}b+c) & 0 & 2\Im(\overline{b}c+a) & 2\Re(\overline{a}b+c) & x-2|a|^2-2|c|^2 & 2\Re(\overline{b}c-a) \\ -2\Im(\overline{a}c-b) & -2\Im(\overline{b}c+a) & 0 & 2\Re(\overline{a}c-b) & 2\Re(\overline{b}c+a) & x-2|a|^2-2|b|^2 \\ 2|b|^2+2|c|^2-x & -2\Re(\overline{a}b+c) & -2\Re(\overline{a}c-b) & 0 & 2\Im(\overline{a}b-c) & 2\Im(\overline{a}c+b) \\ -2\Re(\overline{a}b-c) & 2|a|^2+2|c|^2-x & -2\Re(\overline{b}c+a) & -2\Im(\overline{a}b-c) & 0 & 2\Im(\overline{b}c-a) \\ -2\Re(\overline{a}c+b) & -2\Re(\overline{b}c-a) & 2|a|^2+2|b|^2-x & -2\Im(\overline{a}c+b) & -2\Im(\overline{b}c-a) & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Пусть I – произвольная почти комплексная структура, лежащая в окрестности $U(I_0)$, $(I_{ij})_{i,j=1,..,6}$ – матрица этой структуры в базисе (e). Тогда координаты соответствующей точки $[1, a, b, c]$ из $\mathbb{C}P^3$ следующие:

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{1+I_{14}+I_{25}+I_{36}}((I_{35}-I_{26}) + i(I_{23}-I_{56})), \\ b &= \tfrac{1}{1+I_{14}+I_{25}+I_{36}}((I_{16}-I_{34}) + i(I_{46}-I_{13})), \\ c &= \tfrac{1}{1+I_{14}+I_{25}+I_{36}}((I_{24}-I_{15}) + i(I_{12}-I_{45})), \end{aligned} \quad (5)$$

где $x = 1 + |a|^2 + |b|^2 + |c|^2$.

Доказательство. Пусть $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $[1, a, b, c]$ – некоторая точка из $\mathbb{C}P^3$, не принадлежащая грани $\mathcal{F}_0$. Тогда прямые вычисления, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 1, дают соответствующую форму ω и почти комплексную структуру вида (4).

Пусть теперь $I \in U(I_0) = \{I \in \mathcal{Z} : 1 - -II_0 \text{ обратим}\}$. Для такой структуры [2] определен соответствующий кососимметрический оператор K, антикоммутирующий с I_0, такой, что:

$$I = (1-K)I_0(1-K)^{-1},$$
$$K = (1-II_0)^{-1}(1+II_0).$$

Пусть $K = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$, где $A + iB = = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$, тогда I принимает вид (4).

Обратно, пусть $I = (I_{ij})$ $(I_{ij} = -I_{ji})$ – произвольная почти комплексная структура из $U(I_0)$, тогда формулы (5) могут быть выведены непосредственно из равенства матриц (4) и $(I_{ij})_{i,j=1,..,6}$.

Следствие 1. *Пусть $I = [1, a, b, c] \in \mathbb{C}P^3$, тогда оператор $K = (1-II_0)^{-1}(1+II_0)$ выражается через a, b, c: $K = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$, где $A + iB =$*
$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. Формула (4) дает явное описание ортогональных матриц, удовлетворяющих условию $I^2 = -1$.

Пространство $\mathcal{Z}$ есть 6-мерный тетраэдр, известно [1], что $\mathcal{Z}/T^3$ есть 3-мерный тетраэдр. Опишем классы 2-форм, лежащих в этом фактор-пространстве. Если формы p_+ и p_- принимают все возможные значения на ребрах $\mathcal{E}_{03}$ и $\mathcal{E}_{12}$ соответственно, то ребра $\mathcal{E}_{p_+p_-}$ заполняют весь 6-мерный тетраэдр $\mathbb{C}P^3$.

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\substack{p_+ \in \mathcal{E}_{03} \\ p_- \in \mathcal{E}_{12}}} \mathcal{E}_{p_+p_-}.$$

Зафиксируем 2-мерные площадки $\mathbb{D}_1{=}\langle e^1, e^4\rangle$, $\mathbb{D}_2 = \langle e^2, e^5\rangle$, $\mathbb{D}_3 = \langle e^3, e^6\rangle$. Тор T^3 действует в $\mathbb{R}^6$ вращениями внутри этих площадок. Таким образом, две почти комплексные структуры I и J будут принадлежать одному классу эквивалентности в $\mathcal{Z}/T^3$, если $I = OJO^{-1}$, где $O \in SO(6)$ – матрица вращения внутри данных площадок. То есть будем отождествлять почти комплексные структуры, которые отличаются друг от друга лишь на повороты внутри этих площадок. Так как $(\cos\alpha e + \sin\alpha f) \wedge (-\sin\alpha e + \cos\alpha f) = e \wedge f$, то вершины тетраэдра остаются инвариантными при таких поворотах. Воспользуемся явным описанием ребра $\mathcal{E}_{01}$ из леммы 1. Введем сферические координаты:

$$\begin{aligned} &r = \sin\psi; \\ &u = \cos\varphi\cos\psi; \quad -\pi/2 \le \psi \le \pi/2 \\ &v = \sin\varphi\cos\psi; \quad\quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{aligned}$$

Тогда форма $\omega \in \mathcal{E}_{01}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega &= e^1\wedge e^4 + \sin\psi(e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^6) + \cos\varphi\cos\psi(e^2\wedge e^3 + e^6\wedge e^5) + \sin\varphi\cos\psi(e^2\wedge e^6 + e^5\wedge e^3) = \\ &= e^1\wedge e^4 + \sin\psi(e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^6) + \cos\psi(\cos\varphi e^2\wedge e^3 + \cos\varphi e^6\wedge e^5 + \sin\varphi e^2\wedge e^6 + \sin\varphi e^5\wedge e^3). \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$f^2 = \cos\varphi e^2 + \sin\varphi e^5; f^5 = -\sin\varphi e^2 + \cos\varphi e^5,$$

тогда $f^2\wedge e^3 + e^6\wedge f^5 = \cos\varphi f^2\wedge e^3 + \cos\varphi e^6\wedge f^5 + \sin\varphi f^2\wedge e^6 + \sin\varphi f^5\wedge e^3$, а значит, форма $\omega \in \mathcal{E}_{01}/SO(2)$ имеет вид $e^1\wedge e^4 + \sin\psi(e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^6) + \cos\psi(e^2\wedge e^3 + e^6\wedge e^5)$. Класс эквивалентности в этом случае составляют формы, лежащие на параллелях сферы-ребра $\mathcal{E}_{01}$.

Что происходит в общем случае для ребра $\mathcal{E}_{p_+p_-}$? В статье [4] предложено следующее описание произвольной формы $\omega \in \mathcal{Z}$. Пусть $J \in \mathcal{Z}$ – почти комплексная структура, соответствующая ω, и $\mathbb{D} = \langle e^1, e^2, e^4, e^5\rangle$. Зафиксируем e^3, тогда Je^3 ортогонален e^3, а значит, $Je^3 = ae^6 + bf^1$, где $f^1 \in \mathbb{D}$, $\|f^1\| = 1$ и $a^2 + b^2 = 1$. Единичная 1-форма $af^1 - be^6$ ортогональна и e^3 и Je^3, а значит, 2-форма $\omega \in \mathcal{Z}$ имеет вид:

$$\omega(P, a, b) = e^3\wedge(ae^6 + bf^1) - f^4\wedge(af^1 - be^6) + f^2\wedge f^5,$$

здесь $(f^1, f^2, f^4, f^5) = (e^1, e^2, e^4, e^5)S$, для некоторого $S \in SO(4)$. Известно, что для $\Lambda^2\mathbb{D}$ имеет место разложение: $\Lambda^2\mathbb{D} = \Lambda^2_+\mathbb{D} \oplus \Lambda^2_-\mathbb{D}$, где

$$\begin{aligned} \Lambda^2_+\mathbb{D} &= \{e^{14} + e^{25}, e^{12} + e^{54}, e^{15} + e^{42}\}, \\ \Lambda^2_-\mathbb{D} &= \{e^{14} - e^{25}, e^{12} - e^{54}, e^{15} - e^{42}\} \end{aligned}$$

– собственные подпространства оператора $*$ (e^{ij} обозначает 2-форму $e^i\wedge e^j$). Это разложение позволяет построить двойное накрытие $SO(4) \longrightarrow SO(3)\times SO(3)$. Таким образом, произвольная матрица $P \in SO(4)$ может быть представлена матрицей $\begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix} \in SO(6)$, где $P_+, P_- \in SO(3)$. Для формы ω матрицы P_+ и P_- имеют определенный геометрический смысл, а именно – $p_+ = \omega(P, 1, 0) \in \mathcal{E}_{03}$, $p_- = \omega(P, -1, 0) \in \mathcal{E}_{12}$. При изменении P_+ форма p_+ перемещается по ребру $\mathcal{E}_{03}$, а при изменении P_- форма p_- перемещается по ребру $\mathcal{E}_{12}$. Таким образом, с точностью до поворотов внутри площадок $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{03}/S^1 &= \{\sin\psi(e^{14} + e^{25}) + \cos\psi(e^{12} + e^{54}) + e^{36} : -\pi/2 \le \psi \le \pi/2\}, \\ \mathcal{E}_{12}/S^1 &= \{\sin\theta(e^{14} - e^{25}) + \cos\theta(e^{12} - e^{54}) - e^{36} : -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что паре матриц: (P_+, P_-), где $P_+ = \begin{pmatrix} \sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_- = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответствует матрица $\begin{pmatrix} \sin\frac{\psi+\theta}{2} & 0 & 0 & -\cos\frac{\psi+\theta}{2} \\ 0 & \cos\frac{\psi-\theta}{2} & -\sin\frac{\psi-\theta}{2} & 0 \\ 0 & \sin\frac{\psi-\theta}{2} & \cos\frac{\psi-\theta}{2} & 0 \\ \cos\frac{\psi+\theta}{2} & 0 & 0 & \sin\frac{\psi+6}{2} \end{pmatrix}$ из $SO(4)$. Полагая $a = \sin\varphi$, $b = \cos\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, получаем:

Теорема 2. *Форма $\omega \in \mathcal{Z}/\mathbb{T}^3$ имеет вид:*

$$\begin{aligned} \omega = e^3 &\wedge (\sin\varphi e^6 + \cos\varphi(\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}e^1 + \cos\tfrac{\psi+\theta}{2}e^5)) + \\ &+(\sin\varphi(\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}e^1 + \cos\tfrac{\psi+\theta}{2}e^5) - \cos\varphi e^6)\wedge \\ &\wedge(-\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}e^2 + \cos\tfrac{\psi-\theta}{2}e^4) + (\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}e^2 + \\ &+\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}e^4)\wedge(-\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}e^1 + \sin\tfrac{\psi+\theta}{2}e^5), \end{aligned}$$

где $\phi, \psi, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Следствие 2. *Компоненты произвольной почти комплексной структуры $J \in \mathcal{Z}$ в базисе (e):*

$$
\begin{aligned}
&J_{12}=\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_2),\\
&J_{13}=\cos\varphi(\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}\cos\varphi_1\cos\varphi_3-\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_1\sin\varphi_3),\\
&J_{14}=\sin\varphi\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}+\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\tfrac{\psi-\theta}{2},\\
&J_{15}=\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)-\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2),\\
&J_{16}=-\cos\varphi(\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_3+\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}\cos\varphi_1\sin\varphi_3),\\
&J_{23}=\cos\varphi(\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\varphi_2\sin\varphi_3+\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}\sin\varphi_2\cos\varphi_3),\\
&J_{24}=\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi\cos\varphi_1\sin\varphi_2)-\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2),\\
&J_{25}=\sin\varphi\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}+\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}\sin\tfrac{\psi+\theta}{2},\\
&J_{26}=\cos\varphi(\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\varphi_2\cos\varphi_3-\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}\sin\varphi_2\sin\varphi_3),\\
&J_{34}=\cos\varphi(\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\varphi_1\sin\varphi_3+\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_3),\\
&J_{35}=\cos\varphi(\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_2\sin\varphi_3-\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}cos\varphi_2\cos\varphi_3),\\
&J_{36}=\sin\varphi,\\
&J_{45}=\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi\sin\varphi_1\sin\varphi_2)-\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2),\\
&J_{46}=\cos\varphi(\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}\sin\varphi_1\sin\varphi_3-\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}\cos\varphi_1\cos\varphi_3),\\
&J_{56}=-\cos\varphi(\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_2\cos\varphi_3+\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}\cos\varphi_2\sin\varphi_3),\ \textit{где}\ \phi,\psi,\theta\in[-\pi/2,\pi/2],\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in[0,2\pi].
\end{aligned}
$$

Замечание 4. Следствие 2 дает явное описание произвольной, левоинвариантной ортогональной почти комплексной структуры на 6-мерной группе Ли. Поскольку каждая ортогональная почти комплексная структура в некотором ортонормированном базисе ведет себя как стандартная, то для ее описания достаточно указать способ построения нового базиса, в котором она будет вести себя стандартным образом. Введем обозначения: R_{φ_i} – поворот внутри площадки $\mathbb{D}_i$ на угол φ_i, R_α – поворот на угол α ($\alpha=\frac{\psi+\theta}{2}$) внутри площадки $\langle e_1,e_5\rangle$, R_β – поворот на угол β ($\beta=\frac{\psi-\theta}{2}$) внутри площадки $\langle e_2,e_4\rangle$, R_φ – поворот на угол φ внутри площадки $\langle e_1,e_6\rangle$. Тогда базис, в котором произвольная ортогональная почти комплексная структура будет вести себя как стандартная, может быть получен следующей последовательностью поворотов: $R_\varphi\circ R_\alpha\circ R_\beta\circ R_{\varphi_3}\circ R_{\varphi_2}\circ R_{\varphi_1}$.

4. Пример

Рассмотрим группу $G=SU(2)\times SU(2)$. На этой группе можно выделить два особых класса почти комплексных структур. Это, во-первых, комплексные структуры Калаби-Экмана на произведении трехмерных сфер и, во-вторых, ортогональные левоинвариантные структуры, для которых норма тензора Нейенхейса достигает своего максимального значения, в некотором смысле "максимально неинтегрируемые"структуры.

Конструкция, позволяющая получить интегрируемые структуры, широко известна и принадлежит Е. Калаби и Б. Экману [5]. Для ее построения используется конструкция расслоения Хопфа $S^3\longrightarrow^{S^1}\mathbb{C}P^1$, на произведении сфер она дает расслоение с комплексной базой и слоем

$$S^3\times S^3\longrightarrow^{S^1\times S^1}\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1.$$

Этот факт и наличие голоморфных функций перехода позволяет построить комплексную структуру на пространстве расслоения $S^3\times S^3$. Известно [6,9], что комплексные структуры Калаби-Экмана исчерпывают весь класс левоинвариантных комплексных структур на группе Ли $SU(2)\times SU(2)$. Зафиксируем стандартный базис $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)$ алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, в этом базисе интегрируемая структура, определяющая ту же ориентацию, что и I_0,I_1,I_2,I_3, имеет вид $Ie_1=-e_4$, $Ie_2=-e_3$, $Ie_5=e_6$. Очевидно, что все остальные ортогональные левоинвариантные комплексные структуры будут принадлежать орбите структуры I действия группы $SO(3)\times SO(3)$. Стабилизатором такого действия будет группа $SO(2)\times SO(2)$, таким образом, множеству интегрируемых почти комплексных структур в нашей модели будет соответствовать четырехмерное подмножество $S^2\times S^2=SO(3)\times SO(3)/SO(2)\times SO(2)$. Мы не будем полностью описывать множество таких структур в данной модели, это описание будет технически сложным, опишем лишь некоторые комплексные структуры. Рассмотрим следующие формы, соответствующие некоторым интегрируемым почти комплексным структурам:

$$
\begin{array}{ll}
e^{14}\pm e^{23}\mp e^{56}\in\mathcal{E}_{01}, & -e^{14}\pm e^{23}\pm e^{56}\in\mathcal{E}_{23},\\
\pm e^{12}\mp e^{45}+e^{36}\in\mathcal{E}_{03}, & \pm e^{12}\pm e^{45}-e^{36}\in\mathcal{E}_{12},\\
e^{25}\pm e^{46}\mp e^{13}\in\mathcal{E}_{02}, & -e^{25}\pm e^{46}\pm e^{13}\in\mathcal{E}_{13}.
\end{array}
$$

Каждая пара таких форм представляет собой диаметрально противоположные точки на экваторе соответствующего ребра тетраэдра. Других интегрируемых почти комплексных структур, которые лежали бы на ребрах тетраэдра, нет. Ребра-сферы, соединяющие "середины" скрещивающихся ребер, полностью состоят из интегрируемых почти комплексных структур.

"Максимально неинтегрируемые" структуры на группе Ли $SU(2)\times SU(2)$ переводят касательные векторы к одной сфере в касательные к другой [7], например, структуры I_0, I_1, I_2, I_3 "максимально неинтегрируемы". На множестве таких структур транзитивно действует группа $SO(3)\times$ $\times SO(3)$ с подгруппой изотропии $diag(SO(3))$, орбитой почти комплексной структуры I_0 относительно действия группы $SO(3) \times SO(3)$ будет $SO(3) = SO(3) \times SO(3)/diag(SO(3))$. Используя формулы следствия 2, можно найти условия, при которых $J_{12} = J_{13} = J_{23} = J_{45} = J_{46} = J_{56} = 0$. Решением этой системы уравнений будет:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(\varphi_1) = 0,\\ \sin(\varphi_2) = 0,\\ \sin(\varphi_3) = 0,\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l}\sin(\varphi_1) = 0,\\ \cos(\varphi_2) = 0,\\ \cos(\varphi_3) = 0.\end{array}\right.$$

Оба решения определяют одну и ту же форму, поэтому достаточно рассмотреть одну систему условий. Введем обозначения M_+ и M_- для "максимально неинтегрируемых" структур, лежащих на меридианах сфер-ребер $\mathcal{E}_{03}$ и $\mathcal{E}_{12}$ соответственно. $M_+ = \{\sin\psi(e^{14} + e^{25}) + \cos\psi(e^{15} + e^{42}) + e^{36} : -\pi \leq \psi \leq \pi\}$, $M_- = \{\sin\theta(e^{14} - e^{25}) + \cos\theta(e^{15} - -e^{42}) + e^{36} : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$. Обозначим $M_{p_+p_-}$ половину большого круга меридиана обобщенной сферы-ребра $\mathcal{E}_{p_-p_+}$, тогда множество всех "максимально неинтегрируемых" структур образует 3-мерное подмножество в $\mathbb{C}P^3$:

$$\bigcup_{\substack{p_- \in M_-\\ p_+ \in M_+}} M_{p_-p_+}$$

Литература

[1] Бухштабер, В. М. *Торические действия в топологии и комбинаторике* / В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. – М.: МЦНМО, 2004. – 272 с.

[2] Даурцева, Н. А. *О пространстве почти комплексных структур на многообразии* / Н. А. Даурцева, Н. К. Смоленцев // Вестник КемГУ. – **7**(2001).– С. 176 – 186.

[3] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии* / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2.

[4] Abbena, E. *Almost Hermitian geometry on six dimensional nilmanifolds* / E. Abbena, S. Garbiero, S. Salamon // Ann. Scuola Norm. Sup. – Pisa: Cl. Sci. – **30** (2001). – P. 147 -– 170.

[5] Calabi, E. *A class of compact complex manifolds which are not algebraic.* / E. Calabi, B. Eckmann // Ann.Math. – **58**(1935). – P. 494 – 500.

[6] Daurtseva, N.A. *Invariant complex structures on $S^3 \times S^3$* / N.A. Daurtseva // Electronic Journ. “Investigated in Russia”. – 2004. – P. 888 – 893; (http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/081e.pdf).

[7] Daurtseva, N.A. *Left-invariant almost nearly Kähler structures on $SU(2) \times SU(2)$ in the tetrahedron visualization for $\mathbb{C}P^3$* / N. A. Daurtseva // arXiv:0608704[math.DG](2006). 12 p.

[8] Ivashkovich, S. *Complex curves in almost-complex manifolds and meromorphic hulls* / S. Ivashkovich, V. Shevchishin // Bochum: Ruhr-Univ. – Bochum, 1999. – VI.– 186 p.

[9] Magnin, L. *Left invariant complex structures on $U(2)$ and $SU(2) \times SU(2)$ revisited* / L. Magnin // Preprint, arXiv: 0809.1182 [math.RA] (2008). 25 p.

УДК 517.54: 517.862

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ

В. Б. Ким

ABOUT A CLASS OF SMOOTHING SPLINE CUBIC CURVES

V.B.Kim

В работе рассмотрен новый класс сглаживающих кубических сплайновых кривых. Эти кривые не являются ни β -сплайновыми кривыми, ни кривыми Безье. Найдены параметрические уравнения этих кривых и определены их некоторые геометрические свойства.

A new class of smoothing spline cubic curves is considered in the article.These curves are neither β-spline curves not Bezier curves.The parametric equations of the curves are obtained and some geometric properties of this curves are studied.

Ключевые слова:сплайновые кубические кривые, β -сплайновые кривые, кривые Безье.
keywords:spline curves, β-spline curves, Bezier curves

Составные сплайновые кривые традиционно строятся по заданному массиву точек (опорному массиву). При этом различают два типа задач. Первый, когда искомая кривая должна проходить через заданные точки (задача аппроксимации), и второй, когда искомая кривая проходит не через сами точки, а вблизи них, удовлетворяя некоторому вариационному условию (задача сглаживания). Соответственно различают два типа сплайновых кривых— аппроксимирующие и сглаживающие.

Для аппроксимирующих кривых опорный массив не может быть произвольным —требуется, например, чтобы абсциссы его точек возрастали вместе с ростом нумерации точек. При построении же сглаживающих сплайновых кривых никакие дополнительные условия на точки массива не накладываются. Эти точки могут быть заданы как на плоскости, так и в пространстве, их взаимное расположение может быть произвольным, часть из них может совпадать и т. д.

Если количество вершин в опорном массиве достаточно велико, то найти функциональные коэффициенты $b(t)$ бывает довольно затруднительно. Поэтому опорный массив разбивают на элементарные массивы, каждый из которых определяет элементарный фрагмент искомой составной кривой. Сама же кривая является объединением соответствующих элементарных кривых.Как правило, для кубических сплайновых кривых число точек в элементарном массиве равно четырем.
Особенностью сглаживающих кубических сплайновых кривых является то, что каждый элементарный фрагмент можно задать с помощью одного и того же набора коэффициентов, не зависящих от точек опорного массива.
Эти коэффициенты можно найти как решения некоторой краевой задачи, выражающей в аналитической форме геометрические свойства, которыми должна обладать искомая кривая.

Пусть $\mathbf{P} = \{P_0, P_1, ..., P_m\}$ $(m \geq 3)$ — массив точек, определяющий составную сплайновую кубическую кривую Γ. Кривая Γ является объединением элементарных кривых Γ_i. Здесь и далее индекс i пробегает значения $1, 2, 3, ..., m-3$, а индексы λ, μ значения $0, 1, 2, 3$. Каждая элементарная кривая Γ_i определяется с помощью векторного уравнения:

$$\mathbf{R_i(t)} = b_0(t)\mathbf{P_{i-1}} + b_1(t)\mathbf{P_i} + b_2(t)\mathbf{P_{i+1}} + \\ + b_2(t)\mathbf{P_{i+2}}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{P_i}$– радиус-вектор точки P_i,

$$b_\lambda(t) = m_{\lambda 0} + m_{\lambda 1}t + b_{\lambda 2}t^2 + m_{\lambda 3}t^3, \qquad (2)$$

$t \in [0, 1]$.

Пусть Γ_i и Γ_{i+1} – две смежные элементарные кривые, определяемые соответственно массивами точек $\{P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}\}$ и $\{P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}\}$. Потребуем, чтобы составная сплайновая кривая Γ была не только непрерывной, но и имела бы непрерывный касательный вектор и непрерывный вектор кривизны. Получим следующую систему векторных уравнений :

$$\begin{aligned} &\mathbf{R_{i+1}}(0) = \mathbf{R_i}(\mathbf{1}),\\ &\mathbf{R'_{i+1}}(0) = \beta_1\mathbf{R'_i}(\mathbf{1}),\\ &\mathbf{R''_{i+1}}(0) = \beta_1^2\mathbf{R''_i}(\mathbf{1}) + \beta_2\mathbf{R'_i}(\mathbf{1}). \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $\beta_1 > 0$, $\beta_2 \geq 0$. Переходя к координатной записи, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $m_{\lambda\mu}$:

$$\begin{aligned} &m_{00} + m_{01} + m_{02} + m_{03} = 0,\\ &m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} = m_{00},\\ &m_{20} + m_{21} + m_{22} + m_{23} = m_{10},\\ &m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} = m_{20},\\ &m_{30} = 0,\\ &\beta_1(m_{01} + 2m_{02} + 3m_{03}) = 0,\\ &\beta_1(m_{11} + 2m_{12} + 3m_{13}) = m_{01},\\ &\beta_1(m_{21} + 2m_{22} + 3m_{23}) = m_{11},\\ &\beta_1(m_{31} + 2m_{32} + 3m_{33}) = m_{21},\\ &m_{31} = 0,\\ &\beta_1^2(2m_{02}+6m_{03})+\beta_2(m_{01}+2m_{02}+3m_{03}) = 0,\\ &\beta_1^2(2m_{12}+6m_{13})+\beta_2(m_{11}+2m_{12}+3m_{13}) = 2m_{02},\\ &\beta_1^2(2m_{22}+6m_{23})+\beta_2(m_{21}+2m_{22}+3m_{23}) = 2m_{12},\\ &\beta_1^2(2m_{32}+6m_{33})+\beta_2(m_{31}+2m_{32}+3m_{33}) = 2m_{22},\\ &2m_{32} = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Эта система содержит 15 уравнений на 16 неизвестных $m_{\lambda\mu}$. Не умаляя общности, можно считать, что $m_{33} \neq 0$. Тогда остальные коэффициенты выразятся через m_{33} следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{00} &= p^3m_{33},\\ m_{01} &= -3p^3m_{33},\\ m_{02} &= 3p^3m_{33},\\ m_{03} &= -p^3m_{33},\\ m_{10} &= (2p^2 + 2p + q)m_{33},\\ m_{11} &= (3p^3 - 3p)m_{33},\\ m_{12} &= -(3p^3 + 3p^2 + 3q)m_{33},\\ m_{13} &= (p^3 + p^2 + p + q)m_{33},\\ m_{20} &= m_{33},\\ m_{21} &= 3pm_{33},\\ m_{22} &= 3(p^2 + q)m_{33},\\ m_{23} &= -(p^2 + p + 2q + 1)m_{33},\\ m_{30} &= m_{31} = m_{32} = 0,\\ p &= \beta_1, \quad 2q = \beta_2. \end{aligned} \qquad (5)$$

Легко проверяются соотношения

$$\begin{aligned} &m_{00} + m_{10} + m_{20} + m_{30} =\\ &\quad = (p^3 + 2p^2 + 2p + q + 1)m_{33},\\ &m_{01} + m_{11} + m_{21} + m_{31} = 0,\\ &m_{02} + m_{12} + m_{22} + m_{23} = 0,\\ &m_{03} + m_{13} + m_{23} + m_{33} = 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Добавим к рассмотренной системе условие нормировки

$$\sum_{\alpha=0}^{3} b_\alpha(t) = 1. \qquad (7)$$

Геометрически это условие означает, что каждая элементарная кривая лежит в выпуклой оболочке точек своего опорного массива. В силу соотношений (6), условие нормировки равносильно условию

$$m_{33} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + q + 1}. \qquad (8)$$

Введем обозначение $\delta = p^3+2p^2+2p+q+1$. Очевидно, что $\delta \neq 0$.Тогда получаем, что коэффициенты найденной кривой имеют следующий вид (9):

$$
\begin{aligned}
b_0(t) &= \frac{p^3 - 3p^3t + 3p^3t^2 - p^3t^3}{\delta},\\
b_1(t) &= \frac{(2p^2+2p+q) + (3p^3-3p)t - (3p^3+3p+3q)t^2 + (p^3+p^2+p+2q)t^3}{,}\delta,\\
b_2(t) &= \frac{1 + 3pt + 3(p+q)t^2 - (p^2+p+2q+1)t^3}{\delta},\\
b_3(t) &= \frac{t^3}{\delta}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Кривые, коэффициенты в векторном уравнении которых определяются по формулам (9), называются β-сплайновыми кривыми [1]. В частном случае при $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$ мы получаем хорошо известные В-сплайновые кривые[1].

Заметим, что в рассмотренном случае опорные массивы двух смежных кривых имели три общих точки : P_i, P_{i+1}, P_{I+2}. Случай одной общей точки хорошо изучен — мы получаем кривые Безье. Какие кривые получаются, если смежные элементарные массивы имеют две общие точки? Какая краевая задача соответствует такому случаю?

Рассмотрим этот случай подробнее. Сохраним для удобства обозначения, использованные в предыдущем пункте. Будем считать, что две смежные элементарные кривые Γ_i и Γ_{i+1} определяются соответственно векторными уравнениями:

$$
\mathbf{R_i(t)} = b_0(t)\mathbf{P_{i-1}} + b_1(t)\mathbf{P_i} + b_2(t)\mathbf{P_{i+1}} + \\
+ b_2(t)\mathbf{P_{i+2}}; \tag{10}
$$

$$
\mathbf{R_{i+1}(t)} = b_0(t)\mathbf{P_{i+1}} + b_1(t)\mathbf{P_{i+2}} + b_2(t)\mathbf{P_{i+3}} + \\
+ b_3(t)\mathbf{P_{i+4}}. \tag{11}
$$

Коэффициенты $b_\alpha(t)$ имеют по-прежнему вид (2). Повторяя проведенные выше рассуждения, получим, что в рассматриваемом случае краевая задача (3) имеет лишь тривиальные нулевые решения $(b_\alpha(t) = 0)$.

Изменим краевую задачу, оставив лишь условие непрерывности кривой и условие непрерывности касательного вектора, т. е.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R_{i+1}}(0) &= \mathbf{R_i(1)},\\
\mathbf{R'_{i+1}}(0) &= \beta\mathbf{R'_i(1)}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Как и выше получаем систему уравнений :

$$
\begin{aligned}
&m_{00} + m_{01} + m_{02} + m_{03} = 0,\\
&m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} = 0,\\
&m_{20} + m_{21} + m_{22} + m_{23} = m_{00},\\
&m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} = m_{10},\\
&m_{20} = 0,\\
&m_{30} = 0,\\
&m_{01} + 2m_{02} + 3m_{03} = 0,\\
&m_{11} + 2m_{12} + 3m_{13} = 0,\\
&\beta(m_{21} + 2m_{22} + 3m_{23}) = m_{01},\\
&\beta(m_{31} + 2m_{32} + 3m_{33}) = m_{11},\\
&m_{21} = 0,\\
&m_{31} = 0,\\
&\beta > 0.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Система содержит 12 уравнений на 16 неизвестных $m_{\lambda\mu}$. Нетрудно заметить, что её можно разбить на четыре подсистемы, каждая из которых состоит из уравнений, содержащих $m_{\lambda\mu}$, где λ — фиксировано. Пользуясь этим, выразим часть неизвестных через $m_{00}, m_{01}, m_{10}, m_{11}$:

$$
\begin{aligned}
&m_{02} = -3m_{00} - 2m_{01},\\
&m_{03} = 2m_{00} + m_{01},\\
&m_{12} = -3m_{10} - 2m_{11},\\
&m_{13} = -2m_{10} + m_{11},\\
&m_{22} = 3m_{00} - rm_{01},\\
&m_{23} = rm_{01} - 2m_{00},\\
&m_{32} = 3m_{10} - rm_{11},\\
&m_{33} = rm_{11} - 2m_{10},\\
&m_{20} = m_{21} = m_{30} = m_{31} = 0.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Здесь $r = \beta^{-1}$.

Добавим к рассмотренной системе условие нормировки, которое дает еще четыре соотношения :

$$
\begin{aligned}
&m_{00} + m_{10} + m_{20} + m_{30} = 1,\\
&m_{01} + m_{11} + m_{21} + m_{31} = 0,\\
&m_{02} + m_{12} + m_{22} + m_{32} = 0,\\
&m_{03} + m_{13} + m_{23} + m_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Подставим в систему (15) найденные значения $m_{\lambda\mu}$ и получим соотношения :

$$
\begin{aligned}
&m_{00} + m_{10} = 1,\\
&m_{01} + m_{11} = 0,\\
&-(2+r)(m_{01} + m_{11}) = 0,\\
&(1+r)(m_{01} + m_{11}) = 0.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Нетрудно заметить, что система (16) содержит лишь два независимых соотношения :

$$
\begin{aligned}
&m_{00} + m_{10} = 1,\\
&m_{01} + m_{11} = 0.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Введем обозначения $m_{00} = a, m_{01} = b$. Тогда $m_{10} = 1 - a, m_{11} = -b$. Окончательно функциональные коэффициенты $b_\lambda(t)$ принимают вид :

$$
\begin{aligned}
&b_0(t) = a + bt - (3a + 2b)t^2 + (2a + b)t^3,\\
&b_1(t) = (1-a) - bt - (3-3a-2b)t^2 + (2-2a-b)t^3,\\
&b_2(t) = (3a - rb)t^2 + (rb - 2a)t^3,\\
&b_3(t) = (3 - 3a + rb)t^2 - (rb - 2a + 2)t^3.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Таким образом, решением краевой задачи (12) являются кривые Γ , у которых функциональные коэффициенты зависят от параметров a и b. Заметим, что при $t = 0$ получаем :

$$b_0(0) = a, b_1(0) = 1 - a, b_2(0) = b_3(0) = 0.$$

При $t = 1$ аналогично имеем :

$$b_0(1) = b_1(1) = 0, b_2(1) = a, b_3(1) = 1 - a.$$

Следовательно, каждая элементарная кривая Γ_i начинается в точке

$$\mathbf{R_i}(0) = a\mathbf{P_{i-1}} + (1 - a)\mathbf{P_i},$$

лежащей на ребре $P_{i-1}P_i$ опорного многоугольника, а кончается в точке

$$\mathbf{R_i(1)} = a\mathbf{P_{i+1}} + (1 - a)\mathbf{P_{i+2}},$$

лежащей на ребре $P_{i+1}P_{i+2}$ опорного многоугольника. Нетрудно также проверить , что в своей начальной точке кривая Γ_i касается ребра $P_{i-1}P_i$, а в конечной — ребра $P_{i+1}P_{i+2}$ Однако в общем случае построенная кривая не проходит через вершины опорного массива.

Можно сказать, что рассматриваемые составные кривые являются более гладкими, чем кривые Безье, но не обладают свойством непрерывности вектора кривизны. Наличие в функциональных коэффициентах $m_{\lambda\mu}$ параметров a и b позволяет менять форму кривой Γ, не меняя точек массива. Это свойство сближает их с β-сплайновыми кривыми. Представляет интерес дальнейшее изучение геометрических свойств построенных кривых.

Литература [1] Шикин , Е. В.*Кривые и поверхности на экране компьютера* / Е. В. Шикин, А. И. Плис. – М.: Диалог-МИФИ, 1996. – 240 с

УДК 514.76.2

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРИВОДИМЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. С. Корнев

INVARIANT REDUCED ALMOST COMPLEX STRUCTURES ON HOMOGENEOUS SPACES

E. S. Kornev

В работе вводится специальный класс почти комплексных структур, для которых существует разложение касательного пространства в прямую сумму подпространств, на которых эти структуры действуют инвариантно. Приводятся некоторые понятия и результаты для таких почти комплексных структур на однородных пространствах.

This work introduces the special class of almost complex structures which provide the tangent space decomposition into direct sum of the vector subspaces, and invariant act on these subspaces. Some concepts and results are provided For such almost complex structures on the homogeneous spaces.

Ключевые слова: почти комплексные структуры, однородные пространства, кэлеровы структуры.

Keywords: almost complex structures, homogeneous spaces, kähler structures.

1. Инвариантные почти комплексные структуры на однородных пространствах

Пусть M – однородное риманово пространство размерности $2n$, G – связная группа Ли, действующая на M транзитивно, H – подгруппа изотропии фиксированного элемента $o \in M$, и g – Ad_H-инвариантная риманова метрика на G. Тогда $M \cong G/H$ и $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли подгруппы изотропии H, а $\mathfrak{p}$ – ее ортогональное дополнение относительно метрики g. Подпространство $\mathfrak{p}$ раскладывается в прямую сумму Ad_H-инвариантных неприводимых векторных подпространств. Касательное пространство T_oM и подпространство $\mathfrak{p}$ изоморфны как векторные пространства. Если подгруппа H является нормальной, а распределение $\mathfrak{p}$ инволютивным, то M диффеоморфно группе $K = G/H$, а $\mathfrak{p}$ является алгеброй Ли группы K.

Почти комплексной структурой на вещественном четномерном многообразии M называется непрерывное поле вещественных линейных операторов $J_x : T_xM \mapsto T_xM : J_x \circ J_x = -Id$ для всех $x \in M$. Пусть R_g – представление группы G в группе собственных дифференцируемых преобразований однородного пространства M, ядро которого совпадает с H. Почти комплексная структура J на M называется G-инвариантной, если для любых $g \in G$ и $x = R_g(o) \in M$, $J_x = dR_g \circ J_o \circ dR_{g^{-1}}$. Любая G-инвариантная почти комплексная структура на однородном пространстве полностью определяется своим значением в начальной точке o.

Линейный изоморфизм пространств T_oM и $\mathfrak{p}$ индуцирует взаимно-однозначное соответствие между множеством G-инвариантных почти комплексных структур на M и множеством $A(\mathfrak{p})$, где $A(\mathfrak{p})$ – множество всех левоинвариантных полей линейных операторов на группе G, обладающих следующими свойствами: $\Phi \in A(\mathfrak{p})$, если для любого $X \in \mathfrak{p}, \Phi X \in \mathfrak{p}, (\Phi \circ \Phi)X = -X$, а для любого $Y \in \mathfrak{h}, \Phi Y = Y$. Такие линейные операторы называются аффинорами. Ограничение любого аффинора на подпространство $\mathfrak{p}$ есть левоинвариантная почти комплексная структура на K, а ограничение на подалгебру $\mathfrak{h}$ есть тождественный оператор. В дальнейшем будем отождествлять G-инвариантную почти комплексную структуру на однородном пространстве M и соответствующий ей аффинор на группе G.

Если подгруппа изотропии H имеет четную размерность, то любая левоинвариантная почти комплексная структура на группе G, инвариантно действующая на $\mathfrak{p}$, индуцирует G-инвариантную почти комплексную структуру на M.

2. Приводимые почти комплексные структуры и их индекс

Определение 1. *Почти комплексная структура J на многообразии M называется приводимой, если в каждой точке многообразия касательное пространство содержит нетривиальное собственное подпространство, инвариантное относительно действия J, распределение таких подпространств непрерывно зависит от точки и для любого нетривиального подпространства инвариантного относительно действия структуры J существует дополнительное подпространство, также инвариантное относительно действия J.*

Понятие приводимой почти комплексной структуры естественно возникает при рассмотрении расслоений (см. [2]) и однородных четномерных пространств с четномерной подгруппой изотропии. Для расслоений в качестве инвариантных относительно действия почти комплексной структуры подпространств можно рассматривать распределение касательное к слоям расслоения и горизонтальное распределение (связность), а для однородных пространств подпространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$.

Теорема 1. *Пусть J – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура на четномерном вещественном однородном пространстве $M \cong G/H$, тогда векторное пространство $\mathfrak{p}$ раскладывается в прямую сумму неприводимых подпространств инвариантных относительно действия почти комплексной структуры J. А матрица структуры J в фиксированном базисе пространства $\mathfrak{p}$ принимает блочно-диагональный вид:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

где A_k – квадратная матрица четного порядка.

Доказательство. Пусть J – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура на M и V_1 – инвариантное относительно ее действия векторное подпространство в $\mathfrak{p}$. По определению 1 в $\mathfrak{p}$ существует дополнительное к V_1 подпространство V_2 также инвариантное относительно действия J. Ограничение структуры J на V_1 есть почти комплексная структура J_1 на V_1, а ограничение J на V_2 есть почти комплексная структура J_2 на V_2. Повторяя это разложение для подпространств V_1 и V_2, на некотором конечном шаге получим разложение пространства $\mathfrak{p}$ в прямую сумму векторных подпространств $W_1, \dots, W_k$ и набор почти комплексных структур $J_1, \dots, J_k$, каждая из которых действует неприводимо на соответствующем подпространстве $W_l, 1 \leq l \leq k$. Выбор базиса в каждом из неприводимых векторных подпространств W_l дает представление исходной приводимой почти комплексной структуры J в виде блочно-диагональной матрицы.

Замечание. Из доказательства теоремы 1 следует, что любую приводимую почти комплексную структуру можно задать набором пар $\{V_1, J_1\}, \dots, \{V_k, J_k\}$, где V_l – четномерное векторное подпространство, J_l – неприводимая почти комплексная структура на V_l. Это сразу дает целый класс примеров однородных пространств с приводимыми почти комплексными структурами. В качестве исходного пространства можно взять однородное пространство, которое раскладывается в прямое произведение четномерных однородных пространств, на каждом из которых задана собственная почти комплексная структура.

Определение 2. *Индексом приводимой почти комплексной структуры J называется число i_J инвариантных относительно действия J неприводимых векторных подпространств.*

Из теоремы 1 следует, что если $\dim(M) = 2n \geq 4$, то $2 \leq i_J \leq n$. Для приводимых почти комплексных структур индекса n размерность любого неприводимого инвариантного подпространства равна 2. Для вещественных четырехмерных многообразий могут существовать только приводимые почти комплексные структуры индекса 2. Все левоинвариантные приводимые почти комплексные структуры в размерности 4 классифицированы и изучены в [1].

Почти комплексная структура J на вещественном многообразии размерности $2n$ называется интегрируемой (комплексной), если для любой точки

$x \in M$ существует окрестность U и локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ в этой окрестности, согласованные с действием этой структуры. Т. е. во всех точках из $U, \partial/\partial y_k = J\partial/\partial x_k$, для $k = 1, 2, \ldots, n$. Тензором Нейенхейса почти комплексной структуры J называется тензор N, такой, что для любых векторных полей X и Y

$$N(X,Y)=2([JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]-[X,Y]).$$

Почти комплексная структура интегрируема тогда, и только тогда, когда ее тензор Нейенхейса тождественно равен 0. Подробнее см. [3], т. 2, глава 9.

Теорема 2. *Если вещественное однородное пространство M, размерности $2n$, раскладывается в прямое произведение двумерных однородных пространств, то на M всегда существует интегрируемая приводимая почти комплексная структура индекса n.*

Доказательство сразу следует из того, что тензор Нейенхейса на прямом произведении многообразий равен сумме тензоров Нейенхейса на каждом из сомножителей и простого факта, что тензор Нейенхейса на любом двумерном многообразии тождественно равен нулю.

Теорема 3. *Пусть J – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура индекса 2 на однородном пространстве $M \cong G/H$, группа G имеет нетривиальный центр, A и B – подпространства в $\mathfrak{p}$ инвариантные относительно действия структуры J. Причем A лежит в центре алгебры Ли группы G, а тензор Нейенхейса структуры J равен 0 на B. Тогда структура J интегрируема.*

Доказательство. Пусть N – тензор Нейенхейса почти комплексной структуры J. Тогда, для любых X и $Y \in \mathfrak{p}, X = U_1 + V_1, Y = U_2 + V_2$, где U_1 и U_2 лежат в A, а V_1 и V_2 лежат в B. Поскольку U_1, U_2, JU_1, JU_2 лежат в центре алгебры Ли группы G, а на B $N \equiv 0$, получаем: $N(X,Y) =$ $= N(U_1,U_2)+N(U_1,V_2)+N(V_1,U_2)+N(V_1,V_2) = 0$. Таким образом, тензор Нейенхейса N равен нулю на всем подпространстве $\mathfrak{p}$ и структура J интегрируема на M.

3. Ортогональные и приводимые почти комплексные структуры

Почти комплексная структура J называется ортогональной относительно метрики g, если для любых векторных полей X и $Y, g(JX, JY) = g(X, Y)$, т. е. J является ортогональным оператором. Ad_H-инвариантная метрика g на группе G индуцирует метрику на однородном пространстве $M \cong G/H$. Будем считать, что метрика g также является левоинвариантной. Тогда она индуцирует G-инвариантную метрику на M. Из свойств аффиноров следует, что аффинор, соответствующий ортогональной почти комплексной структуре на M, является ортогональным относительно метрики g оператором на группе G. Поэтому множество ортогональных почти комплексных структур на M можно отождествлять со множеством ортогональных аффиноров на группе G.

Пересечение классов ортогональных и приводимых почти комплексных структур на однородных римановых пространствах описывает следующая теорема:

Теорема 4. *G-инвариантная ортогональная почти комплексная структура J на римановом однородном пространстве $M \cong G/h$ является приводимой тогда, и только тогда, когда ортогональное дополнение алгебры Ли подгруппы изотропии H содержит нетривиальное векторное подпространство инвариантное относительно действия структуры J.*

Доказательство. Существование для ортогональной приводимой почти комплексной структуры нетривиального векторного подпространства, инвариантного относительно действия этой структуры, следует из определения 1.

Пусть теперь J – G-инвариантная ортогональная почти комплексная структура на M и V – нетривиальное подпространство в $\mathfrak{p}$, на котором J действует инвариантно. Обозначим через $V^\perp$ ортогональное дополнение подпространства V в $\mathfrak{p}$. Для любых $X \in V$ и $Y \in V^\perp$ имеем:

$$g(X, JY) = g(JX, J \circ JY) = -g(JX, Y) = 0.$$

Т. е. $JY \in V^\perp$ и подпространство $V^\perp$ инвариантно относительно действия J. Таким образом, определение 1 полностью выполнено и почти комплексная структура J является приводимой.

4. Правильные и неправильные однородные пространства

Для описания связи между подпространствами, инвариантными относительно действия почти комплексной структуры и Ad_H-инвариантными подпространствами, необходимо ввести два специальных класса однородных пространств.

Определение 3. *Однородное риманово пространство $M \cong G/H$ называется правильным, если для любого Ad_H-инвариантного неприводимого подпространства существует ортогональное ему Ad_H-инвариантное неприводимое подпространство той же размерности. И называется неправильным, если пространство $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^\perp$ содержит хотя бы одно Ad_H-инвариантное неприводимое подпространство, для которого не существует ортогонального Ad_H-инвариантного неприводимого подпространства той же размерности. Неправильное однородное риманово про-*

странство называется строго неправильным, если все Ad_H-инвариантные неприводимые подпространства имеют разную размерность.

Из определения 3 следует, что не существует правильных однородных римановых пространств размерности ≤ 3, и неправильных однородных римановых пространств размерности ≤ 4.

Левоинвариантное поле линейных операторов Φ на группе Ли G называется изотропно-приводимым, если любое нетривиальное инвариантное относительно действия Φ подпространство также является инвариантным относительно действия подгруппы изотропии, т. е. Ad_H-инвариантным. При этом не требуется обязательного существования для любого инвариантного относительно действия Φ подпространства дополнительного подпространства также инвариантного относительно действия Φ.

Теорема 5. *Пусть $M \cong G/H$ – неправильное однородное пространство с Ad_H-инвариантной римановой метрикой. Причем, любое Ad_H-инвариантное подпространство в ортогональном дополнении $\mathfrak{p}$ алгебры Ли подгруппы изотропии H имеет четную размерность. Тогда любой левоинвариантный аффинор на группе G, сохраняющий разложение подпространства $\mathfrak{p}$ в ортогональную сумму Ad_H-инвариантных неприводимых подпространств, определяет G-инвариантную приводимую почти комплексную структуру на M. Причем, Ad_H-инвариантные неприводимые подпространства являются инвариантными относительно действия этой почти комплексной структуры. Если, кроме того, M является строго неправильным однородным пространством, а аффинор является изотропно-приводимым, то инвариантные относительно действия почти комплексной структуры неприводимые подпространства совпадают с Ad_H-инвариантными неприводимыми подпространствами, и индекс приводимой почти комплексной структуры равен числу Ad_H-неприводимых подпространств.*

Доказательство. Будем обозначать левоинвариантный ортогональный аффинор на группе G и соответствующую ему почти комплексную структуру на M одной буквой J. Пусть V_1 – Ad_H-инвариантное неприводимое подпространство в $\mathfrak{p}$, для которого в $\mathfrak{p}$ не существует ортогонального Ad_H-неприводимого подпространства той же размерности. Поскольку J сохраняет разложение $\mathfrak{p}$ в ортогональную сумму Ad_H-неприводимых подпространств, то подпространство JV_1 либо лежит в ортогональном дополнении подпространства V_1, либо совпадает с V_1. Из условия $\dim(JV_1) = \dim(V_1)$ получаем, что JV_1 может только совпадать с V_1, т. е. является инвариантным относительно действия J. Обозначим через V_2 ортогональное дополнение подпространства V_1 в $\mathfrak{p}$. Если V_2 содержит Ad_H-неприводимое подпространство, для которого в V_2 не существует ортогонального Ad_H-неприводимого подпространства, то повторяем предыдущие рассуждения. Если же для любого Ad_Hнеприводимого подпространства в $_V2$ найдется ортогональное Ad_H-неприводимое подпространство такой же размерности, то возможны два случая:

(1) все Ad_H-неприводимые подпространства являются инвариантными относительно действия J, и мы получаем разложение V_2 в ортогональную сумму инвариантных относительно действия J (не обязательно неприводимых) подпространств;

(2) почти комплексная структура J попарно переставляет Ad_H-неприводимые подпространства одинаковой размерности, и V_2 является неприводимым относительно действия J инвариантным подпространством.

В обоих случаях получаем, что подпространство V_2 является инвариантным относительно действия J подпространством и почти комплексная структура J является приводимой индекса не меньше 2. Однако в любом из рассмотренных случаев может оказаться, что какое-либо из Ad_H-неприводимых подпространств раскладывается в прямую сумму инвариантных относительно действия J неприводимых подпространств. В случае, когда M является строго неправильным, а почти комплексная структура J изотропно-приводимой, случай (2) не возможен и любое Ad_H-неприводимое подпространство является инвариантным относительно действия J. А существование разложения какого-либо из Ad_H-неприводимых подпространств в прямую сумму неприводимых относительно действия J подпространств противоречит Ad_H-неприводимости такого подпространства. Более того, из того, что структура J является изотропно-приводимой, следует, что любое неприводимое относительно действия J подпространство V, лежащее в Ad_H-неприводимом подпространстве W, может только совпадать с W. Таким образом, Ad_H-неприводимые и неприводимые относительно действия J подпространства совпадают.

Замечание. Из доказательства теоремы 5 видно, что на правильном римановом однородном пространстве, для которого все Ad_H-инвариантные подпространства имеют четную размерность, можно построить почти комплексную структуру, которая не является приводимой.

5. Построение ассоциированной метрики на симплектическом однородном пространстве

Пусть Ω – G-инвариантная симплектическая форма на однородном многообразии M размерности $2n$. По теореме Дарбу, на M можно выбрать G-

инвариантный базис 1-форм $\theta_1, \ldots, \theta_{2n}$, в котором форма Ω принимает вид:

$$\Omega = \theta_1 \wedge \theta_2 + \cdots + \theta_{2n-1} \wedge \theta_{2n}.$$

Пусть $e_1, \ldots, e_{2n}$ – базис расслоения TM дуальный этому базису 1-форм. Из теоремы 1 следует, что любая G-инвариантная приводимая почти комплексная структура максимального индекса n на M с инвариантными подпространствами $\{e_1, e_2\}, \ldots, \{e_n, e_{2n}$ в таком базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

где A_k – блок вида:

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ C_k & d_k \end{pmatrix}.$$

Из условия $A_k^2 = -Id$ находим, что $d_k = -a_k, a_k^2 + +b_k c_k = -1$. Из условия $b_k c_k = -a_k^2 - 1$ следует, что параметры b_k и c_k не обращаются в 0 и имеют разные знаки при любых k. Будем считать, что для всех $k, b_k < 0, c_k > 0$. Таким образом, множество всех G-инвариантных приводимых почти комплексных структур максимального индекса параметризуется областью в пространстве $\mathbb{C}^n$ образованной элементами вида:

$$z = (a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n), \quad b_k < 0$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Это является обобщением параметризации П. Годушона для четырехмерного расслоения Хопфа из [2].

Пусть J_z – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура индекса n. Тогда, из дуальности базисов и формул $J_z e_{2k-1} = a_k\, e_{2k-1} + +c_k\, e_{2k}$, $J_z e_{2k} = b_k\, e_{2k-1} - a_k\, e_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем: $J_z\theta_{2k-1} = a_k\,\theta_{2k-1} + b_k\,\theta_{2k}$, $J_z\theta_{2k} = = c_k\,\theta_{2k-1} - a_k\,\theta_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Используя эти равенства и условие $a_k^2 + b_k c_k = -1$, получаем:

$$\Omega \circ J_z = \Omega.$$

Таким образом, любая приводимая почти комплексная структура J_z сохраняет симплектическую форму Ω.

Обозначим через g_z однопараметрическое семейство G-инвариантных невырожденных симметричных 2-форм на M, таких, что для любых $X, Y \in \mathfrak{p}, g_z(X, Y) = \Omega(X, J_z Y)$. Пользуясь формулой $\theta_{2k-1} \wedge \theta_{2k}(X, Y) = x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и условием $a_k^2 + = -b_k c_k - 1$ для всех k, получаем:

$$g_z(X, X = \sum_{k=1}^{n}(c_k x_{2k-1}^2 - 2\, a_k x_{2k-1} x_{2k} - b_k x_{2k}^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(c_k\,(x_{2k-1} - \frac{a_k}{c_k}\, x_{2k})^2 - \frac{a_k^2}{c_k}\, x_{2k}^2 - b_k x_{2k}^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(c_k\,(x_{2k-1} - \frac{a_k}{c_k}\, x_{2k})^2 + \frac{1}{c_k}\, x_{2k}^2) \geq 0.$$

Таким образом, получаем однопараметрическое семейство G-инвариантных римановых метрик ассоциированных с симплектической формой Ω и однопараметрическим семейством приводимых почти комплексных структур J_z. Если множество допустимых значений параметра z содержит непустое подмножество Σ, такое, что для любого $z \in \Sigma$ приводимая почти комплексная структура J_z интегрируема, то множество пар $(g_z, J_z)|z \in \Sigma$ образует семейство G-инвариантных кэлеровых структур на M. Множество Σ может быть дискретным или состоять из нескольких связных компонент. Левоинвариантные ассоциированные метрики и кэлеровы структуры на группах Ли размерности 4 полностью описаны в [1].

Пусть ∇_z – связность Леви-Чивитты ассоциированной g_z. Известно, что интегрируемость почти комплексной структуры J, сохраняющей замкнутую внешнюю 2-форму, эквивалентна условию $\nabla J \equiv 0$. Последнее Условие можно также записать в виде $\|\nabla J\| \equiv 0$. Для приводимых почти комплексных структур J_z получаем, что множество Σ есть множество нулей функции $f(z) = \|\nabla_z J_z\|$ на $\mathbb{C}^n$ в пересечении с областью допустимых значений параметра z. Таким образом, задача поиска кэлеровых структур, ассоциированных с G-инвариантными приводимыми комплексными структурами максимального индекса на симплектическом однородном пространстве, сводится к поиску нулей функции f.

Литература

[1] Корнев, Е. С. *Почти комплексные структуры и метрики на группах Ли размерности 4* / Е. С. Корнев. – Германия: Саарбрюкен: Lambert Academic Publishing, 2010. – 148 с.

[2] Годушон, П. *Поверхности Хопфа – квазикомплексные многообразия размерности 4* / П. Годушон // доклад VII, в кн. "Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/79 г." – Москва: Мир, 1985 – С. 120 – 138.

[3] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии* в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Намидзу. – Москва: Наука, 1981.

УДК 514.76.2

ПОТОК ДЛЯ $SPIN(7)$-СТРУКТУРЫ

Е. Г. Малькович

FLOW FOR $SPIN(7)$-STRUCTURE

E. G. Malkovich

Мы приводим уравнение потока для $Spin(7)$-структуры на конусе над 7-мерным 3-сасакиевым многообразием.

We introduce equation of a flow for the $Spin(7)$-structure on a cone over 7-dimensional 3-Sasakian manifold.

Ключевые слова: группа голономии, $Spin(7)$-структура, поток Риччи.

Keywords: holonomy, $Spin(7)$-structure, Ricci flow.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-01-00598), грантом «Ведущие научные школы» (№ НШ-7256.2010.1.) и грантом Президента РФ (№ МД-249.2011.1).

1. Введение

Одной из задач современной дифференциальной геометрии является поиск метрик со специальными геометрическими свойствами. Как правило, под этим подразумевается существование некоторых геометрических структур или различного рода ограничения на тензор кривизны. Метрики со специальными группами голономии дают ответ на оба вопроса: метрики с исключительными группами голономии имеют нулевой тензор Риччи, и на данный момент неизвестно ни одной риччи-плоской метрики на компактном многообразии, группа голономии которой была бы общего вида.

В последнее время получил распространение метод геометрических потоков. Геометрический поток представляет из себя эволюционное уравнение на метрику, под действием которого метрика должна деформироваться к некоторому требуемому виду. Условно потоки можно разделить на внешние и внутренние. Внешние потоки деформируют геометрию подмногообразий и их вложение в многообразия большей размерности. Например, поток Уилмора должен приводить произвольную поверхность в $\mathbb{R}^3$ к минимальной поверхности. Обобщением потока Уилмора является поток средней кривизны, действующий на гиперповерхностях в произвольном многообразии. Из внутренних потоков наиболее известным является поток Риччи:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = R_{ij},$$

с помощью которого была доказана гипотеза геометризации Тёрстона, и как следствие, гипотеза Пуанкаре. В 2007 году Бренделом и Шэйном с помощью потока Риччи была доказана дифференциальная теорема о сфере, утверждающая, что если секционная кривизна многообразия принимает значения в полуинтервале $(1, 4]$, то оно диффеоморфно сфере.

Менее известны другие внутренние потоки: поток Калаби и поток Ямабе. Поток Ямабе, рассмотренный Гамильтоном некоторое время спустя после введения потока Риччи, должен деформировать метрику в ее конформном классе так, чтобы скалярная кривизна стремилась к постоянной величине. Поток Калаби возникает как градиентный поток на кэлеровых многообразиях для решения задачи минимизации функционала скалярной кривизны. Основную проблему при изучении геометрических потоков представляет теорема существования решения. Трудность вызвана тем, что геометрический поток представляет из себя нелинейное уравнение параболического типа. Никаких общих методов для решения подобных задач не существует, и на настоящий момент все результаты касаются тех или иных частных случаев.

Грубо говоря, если можно корректно определить оператор Лапласа от некоторого объекта Ψ, то можно исследовать уравнение вида $\Psi_t = \Delta\Psi$. Параллельная $Spin(7)$-структура однозначно определяет метрику. В свою очередь, существование параллельной $Spin(7)$-структуры — это существование параллельной 4-формы, а на формах определен оператор Лапласа-Бельтрами. В данной статье мы приводим эволюционное уравнение на $Spin(7)$-структуру специального вида, определенную на конусе над 3-сасакиевым многообразием, чей кватернионно-кэлеров орбифолд обладает кэлеровой структурой. В разделе 2 содержатся в достаточной полноте необходимые определения и примеры. В разделе 3 мы приводим необходимые обозначения и формулируем основное утверждение.

2.Предварительные сведения

Группа голономии — это инвариант n-мерного многообразия (риманова или псевдориманова), являющийся подгруппой Ли группы $O(n)$ и тесно связанный с геометрией данного многообразия. Дадим строгое определение: пусть $\gamma : [0, 1] \to M$ — кусочно гладкая кривая, такая, что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$ для некоторых $x, y \in M$. Тогда для любого касательного вектора $e \in T_xM$ существует единственное гладкое сечение s, такое, что

$\nabla_{\dot\gamma(t)}s(t) = 0$ и $s(0) = e$ для некоторой связности ∇. Определим $P_\gamma(e) := s(1)$. Тогда $P_\gamma : T_xM \to T_yM$ корректно определенное линейное отображение, называемое параллельным переносом. Петлей называют кривую, у которой начало и конец совпадают: $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Тогда группой голономии называют

$$Hol_x(\nabla) = \{P_\gamma : \ \gamma(0) = \gamma(1) = x\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только связность Леви-Чивита, которая сохраняет длины векторов при параллельном переносе, то есть выполнено $Hol_x(\nabla) \subseteq O(n)$. Кроме того, если многообразие связно, то можно показать, что класс сопряженности Hol_x не зависит от выбора отмеченной точки x. В дальнейшем будет рассмотрен только односвязный случай, поэтому будем считать, что группа голономии Hol является связной подгруппой Ли в $SO(n)$.

Теорема Берже утверждает, что если риманово многообразие неприводимо и не является симметрическим пространством, то существует ровно 7 случаев подгрупп в $O(n)$, которые могут быть группами голономии некоторого риманова многообразия. Среди этого списка выделяются группы G_2 и $Spin(7)$, определенных соответственно на 7-мерных и 8-мерных многообразиях. Метрики с соответствующими группами называются исключительными. Достаточно долго стоял вопрос о конкретных примерах метрик с данными группами голономии. Основной интерес представляют компактные примеры. Например, в теоретической физике, в теории струн, данные многообразия должны моделировать "пространство скрытых размерностей". Однако один из первых компактных примеров — К3-поверхность с голономией $SU(2)$ — был построен с помощью склейки из некомпактных частей. В дальнейшем пример К3-поверхности был использован Джойсом для построения метрик с голономиями G_2 и $Spin(7)$. Поэтому поиск некомпактных примеров также представляет определенный интерес, в особенности если удается отследить поведение метрики на бесконечности.

Далее мы рассмотрим класс 7-мерных 3-сасакиевых многообразий. Они наделены многими вспомогательными структурами, которые можно использовать для поиска интересующих нас метрик. Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности m с метрикой g. Конусом $\bar M$ над M будем называть многообразие $\mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой $\bar g = dt^2 + t^2 g$. Многообразие M называется 3-сасакиевым, если метрика $\bar g$ на $\bar M$ гиперкэлерова, т. е. ее группа голономии содержится в $Sp(\frac{m+1}{4})$ (в частности, $m = 4n-1, n \geq 1$). Данное определение эквивалентно классическому: M — 3-сасакиево, если на нем существует три ортонормированных киллинговых векторных поля ξ^i, таких что $[\xi^a, \xi^b] = 2\varepsilon^{abc}\xi^c$ и удовлетворяющих условию сасакиевости [3]. Условие сасакиевости на векторное поле ξ говорит, что тензорное (1,1) поле $\Phi = \nabla\xi$ должно удовлетворять условию $(\nabla_X\Phi)(Y) = g(Y,\xi)X - g(X,Y)\xi$ для любых векторных полей X и Y на M. Нас интересует поиск метрик со специальными голономиями, и мы будем пользоваться первым определением. Мы будем деформировать конусную метрику на $\bar M$ так, чтобы группа голономии стала исключительной.

В качестве классического примера 3-сасакиева многообразия можно привести 7-мерную сферу. Она естественным образом вкладывается в $\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{H}^2$ как единичная сфера. Векторные поля ξ^i порождаются умножением на мнимые единицы i, j, k. Как известно, 3-мерная сфера действует на 7-мерной, и возникает обобщенное расслоение Хопфа $S^3 : S^7 \to S^4$. Аналогичный факт верен и для произвольного 3-сасакиева многообразия M, оно расслаивается над $4n$-мерным кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$, слоем данного расслоения является либо S^3, либо $\mathbb{R}P^3 = S^3/\mathbb{Z}_2$. Нас будет интересовать случай, когда орбифолд $\mathcal{O}$ может быть наделен кэлеровой формой ω. Это ограничение устраняет из наших рассмотрений 7-мерную сферу, так как вторые когомологии 4-мерной сферы нулевые и на ней нет нетривиальных замкнутых 2-форм. Пространство Алоффа-Уоллаха $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ — единственное однородное 7-мерное 3-сасакиево многообразие, которое расслаивается над кэлеровым многообразием, в данном случае над $\mathbb{C}P^2$. Дальнейшие наши построения могут быть описаны явно для пространства Алоффа-Уоллаха, но они остаются справедливыми и для произвольного 3-сасакиева многообразия с кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$.

3. Поток для $Spin(7)$-структуры

Будем считать, что образующая $\mathbb{R}_+$ конуса $\bar M$ задается переменной $0 \leq t < \infty$. Тогда на $\bar M$ определено векторное поле ∂_t. Так как $Hol(\bar M) \subseteq Sp(2)$, то на конусе $\bar M$ есть три комплексных структуры J^i, $i = 1,2,3$. Рассмотрим поля $\xi^i := J^i(\partial_t)$, несложно проверить, что они будут ортогональны исходному ∂_t, то есть будут касательными к $M = M \times \{t = 1\} \subset \bar M$. Сопоставим векторным полям ξ^i 1-формы по правилу $\eta_i(X) = g(X, \xi^i)$ для векторных полей X на M. Данные три формы называются характеристическими формами 3-сасакиева многообразия. Далее определим 2-формы:

$$\omega_i = d\eta_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\eta_j \wedge \eta_k, \ \ i = 1,2,3.$$

Можно проверить [1], что данные формы корректно определены на горизонтальном подрасслоении $\mathcal{H}$ 3-сасакиева расслоения. В пространстве 1-форм на $\mathcal{H}$ можно выбрать подходящий ортонормированный базис $\{\eta_4, \eta_5, \eta, \eta_7\}$, так что формы ω_i примут вид:

$$\omega_1 = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7),$$
$$\omega_2 = 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5),$$
$$\omega_3 = 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6).$$

Эта форма записи довольно естественна, потому что эти формы получаются опусканием индекса операторов кватернионного умножения J^i при их ограничении на $\mathcal{H}$: $\omega_i(X,Y) = g(J^i(X),Y)$ для любых горизонтальных векторных полей X, Y [1]. Так как пространство 2-форм на 4-мерном расслоении горизонтальных векторов $\mathcal{H}$ имеет размерность 6, то «оставшаяся часть» пространства 2-форм $\Lambda^2\mathcal{H}^*$ будет порождена 2-формами вида

$$\zeta_1 = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 + \eta_6 \wedge \eta_7),$$
$$\zeta_2 = 2(\eta_4 \wedge \eta_6 + \eta_7 \wedge \eta_5),$$
$$\zeta_3 = 2(\eta_4 \wedge \eta_7 + \eta_5 \wedge \eta_6).$$

Мы предполагаем существование дополнительной кэлеровой структуры на орбифолде $\mathcal{O}$, поэтому, использовав оставшуюся свободу на выбор базиса $\{\eta_4, \eta_5, \eta, \eta_7\}$, будем считать что форма $\omega := \zeta_1$ и есть наша кэлерова форма.

Определим самосопряженную 4-форму на $\mathbb{R}^8$ следующим образом:

$$\Phi_0 = e^{0123} + e^{4567} + e^{0145} - e^{2345} - e^{0167} + e^{2367} + \\ + e^{0246} + e^{1346} - e^{0275} + e^{1357} + e^{0347} - \\ - e^{1247} - e^{0356} + e^{1256},$$

где $e^{ijkl} := e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l$. Группа линейных преобразований $\mathbb{R}^8$, сохраняющих данную форму, изоморфна $Spin(7)$. Чтобы перенести данную форму на произвольное риманово многообразие N, необходимо потребовать существование в каждой точке $p \in N$ подходящей изометрии ϕ, такой, что $\phi_p^*\Phi_0 = \Phi|_p$, где Φ — уже форма на N. Также необходимо потребовать параллельность формы Φ. При выполнении данных условий говорят, что Φ задает параллельную $Spin(7)$-структуру на N, и $Hol(N) = Spin(7)$. Кроме того, группа $Spin(7)$ также сохраняет ориентацию и метрику $g_0 = \sum_{i=0}^{7}(e^i)^2$. Таким образом, Φ автоматически определяет метрику на N.

Рассмотрим следующую форму на $\bar{M}$:

$$\Phi = e^{0123} + C^2B^2\eta_4 \wedge \eta_5 \wedge \eta_6 \wedge \eta_7 + \\ + \tfrac{B^2+C^2}{4}(e^{01} - e^{23}) \wedge \omega_1 + \tfrac{B^2-C^2}{4}(e^{01} - e^{23}) \wedge \omega + \\ + \tfrac{BC}{2}(e^{02} - e^{31}) \wedge \omega_2 + \tfrac{BC}{2}(e^{03} - e^{12}) \wedge \omega_3, \tag{1}$$

где

$$e^0 = dt,$$
$$e^i = A_i\eta_i, i = 1,2,3,$$
$$e^j = B\eta_j, j = 4,5,$$
$$e^k = C\eta_k, k = 6,7,$$

$A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t), C(t)$ — некоторые гладкие функции. Форма Φ соответствует римановой метрике на $\bar{M}$:

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 + \\ + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2). \tag{2}$$

Условие параллельности данной формы исследовалось в статье [2]. Данное условие эквивалентно системе нелинейных дифференциальных уравнений на функции $A_i(t), B(t), C(t)$. Чтобы данный набор функций определял метрику на гладком римановом многообразии, необходимо правильным образом задать начальные данные — разрешить особенность. Ранее было исследовано поведение функций на бесконечности и найдено непрерывное однопараметрическое семейство метрик $\bar{g}_\alpha$, «соединяющее» метрики Калаби:

Теорема [2]. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$, в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $SU(2)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (2) с группой голономии $H \subset Spin(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) > 0$ и $2A_2^2(0) = B^2(0)+C^2(0)$, то метрика $\bar{g}$ имеет группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$ и гомотетична одной из метрик семейства

$$\bar{g}_\alpha = \frac{r^4(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}{r^8 - 2\alpha^4(r^4-1) - 1}dr^2 + \\ + \frac{r^8 - 2\alpha^4(r^4-1) - 1}{r^2(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \\ + (r^2+\alpha^2)(\eta_4^2 + \eta_5^2) + (r^2-\alpha^2)(\eta_6^2 + \eta_7^2);$$

2) если $A_1(0)=0$, $-A_2(0)=A_3(0)<B(0)=C(0)$, то существует регулярная асимптотически локально коническая метрика $\bar{g}$ вида (2) с группой голономии $Spin(7)$.

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ вида (2) рассмотренной $Spin(7)$-структурой и с группой голономии $H \subset Spin(7)$ изометрична одной из указанных выше.

В формулировке данной теоремы пространство $\mathcal{M}_2$ — одно из двух возможных разрешений конусной особенности. За подробностями отсылаем к оригинальной статье.

Если оператор Лапласа-Бельтрами действует на 4-формах 8-мерного пространства, он имеет вид $\Delta = *\,d*d - d*d\,*$, где $*$ — оператор Ходжа. Поэтому для вычисления $\Delta\Phi$ необходимо знать форму объема и действие дифференциала на базисных формах. Следующие соотношения были получены в [1]:

$$de^0 = 0,$$
$$de^i = \tfrac{A_i'}{A_i}e^0 \wedge e^i + A_i\omega_i - \tfrac{2A_i}{A_{i+1}A_{i+2}}e^{i+1} \wedge e^{i+2},$$
$$d\omega_i = \tfrac{2}{A_{i+2}}\omega_{i+1} \wedge e^{i+2} - \tfrac{2}{A_{i+1}}e^{i+1} \wedge \omega_{i+2},$$

где $i = 1, 2, 3 \mod 3$.

Напомним, что ω — кэлерова форма, то есть замкнута. Форма объема имеет вид
$Vol = e^{01234567} = e^{0123} \wedge \frac{-B^2C^2}{8}\omega_2 \wedge \omega_2$. Теперь мы будем предполагать, что функции A_i, B, C зависят не только от переменной t, определенной на образующей конуса $\mathbb{R}_+$, но и от дополнительного параметра τ, играющего роль времени. Рассмотрим уравнение

$$\Phi_\tau = \Delta\Phi. \tag{3}$$

После довольно продолжительных, но не представляющих сложности вычислений, получим, что и левая и правая части уравнения (3) являются линейными комбинациями следующих десяти 4-форм: $\omega \wedge e^{01}$, $\omega \wedge e^{23}$, $\omega_1 \wedge e^{01}$, $\omega_1 \wedge e^{23}$, $\omega_2 \wedge e^{13}$, $\omega_2 \wedge e^{02}$, $\omega_3 \wedge e^{12}$, $\omega_3 \wedge e^{03}$, $\omega_1 \wedge \omega_1$, e^{0123}. Коэффициенты линейных комбинаций левой части уравнения зависят от функций A_i, B, C и их производных первого порядка по τ. Коэффициенты правой части зависят от функций A_i, B, C, их производных первого и второго порядков по t, причем зависимость от производных первого порядка нелинейная. Это согласуется с общей теорией параболических уравнений и, в частности, с потоком Риччи. Левая часть задается с помощью матрицы M и вектора f:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{B^2-C^2}{4A_1} & 0 & 0 & \frac{B}{2} & -\frac{C}{2} \\ 0 & \frac{C^2-B^2}{4A_2} & \frac{C^2-B^2}{4A_3} & -\frac{B}{2} & \frac{C}{2} \\ \frac{B^2+C^2}{4A_1} & 0 & 0 & \frac{B}{2} & \frac{C}{2} \\ 0 & -\frac{C^2+B^2}{4A_2} & -\frac{C^2+B^2}{4A_3} & -\frac{B}{2} & -\frac{C}{2} \\ \frac{BC}{2A_1} & 0 & \frac{BC}{2A_3} & \frac{C}{2} & \frac{B}{2} \\ 0 & \frac{BC}{2A_2} & 0 & \frac{C}{2} & \frac{B}{2} \\ -\frac{BC}{2A_1} & -\frac{BC}{2A_2} & 0 & -\frac{C}{2} & -\frac{B}{2} \\ 0 & 0 & \frac{BC}{2A_3} & \frac{C}{2} & \frac{B}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{BC^2}{16} & -\frac{B^2C}{16} \\ \frac{1}{A_1} & \frac{1}{A_2} & \frac{1}{A_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \left(A_1, A_2, A_3, B, C \right).$$

Мы получаем систему уравнений

$$M\frac{\partial f}{\partial \tau} = b. \tag{4}$$

Основную сложность в этом уравнении представляет правая часть b. Приведем лишь первую координату этого 10-мерного вектора:

$$\begin{aligned} b_1 = \tfrac{-BC}{128A_1A_2^2A_3^2}(&2B^3C^5A_1^3 - 2B^5C^3A_1^3 + 32BC^2A_1^2C'A_2A_3 + +8B^3A_3'C'A_2^2A_3A_1 + 4A_1'B^3CA_2'A_2A_3^2- \\ &-4A_1'BC^3A_2'A_2A_3^2 - 24BCC'^2A_2^2A_3^2A_1 - 16BC^2A_3'C'A_2^2A_3A_1 - 8BC^2C''A_2^2A_3^2A_1+ \\ &+8B^2CB''A_2^2A_3^2A_1 + 24BCB'^2A_2^2A_3^2A_1 + 16B^2B'C'A_2^2A_3^2A_1 - 16C^2C'B'A_2^2A_3^2A_1+ \\ &+16B^2CA_3'B'A_2^2A_3A_1 + 4B^3CA_2''A_2A_3^2A_1 - 4BC^3A_2''A_2A_3^2A_1 + 4B^3CA_3''A_2^2A_3A_1- \\ &-4BC^3A_3''A_2^2A_3A_1 - 4B^3C(A_2')^2A_3^2A_1 + 4BC^3(A_2')^2A_3^2A_1 - 4B^3C(A_3')^2A_2^2A_1+ \\ &+4BC^3(A_3')^2A_2^2A_1 - 32B^2CA_1^2B'A_2A_3 - 16B^3A_1^2C'A_2A_3 + 8B^3CA_1^2A_2'A_3+ \\ &+8B^3CA_1^2A_3'A_2 - 16B^3CA_1'A_2A_3A_1 + 16C^3A_1^2B'A_2A_3 - 8BC^3A_1^2A_2'A_3- \\ &-8BC^3A_1^2A_3'A_2 + 16BC^3A_1'A_2A_3A_1 + 16B^2CA_2'B'A_2A_3^2A_1 + 8B^3A_2'C'A_2A_3^2A_1- \\ &-8C^3A_2'B'A_2A_3^2A_1 - 16BC^2A_2'C'A_2A_3^2A_1 - 8C^3A_3'B'A_2^2A_3A_1 + 8A_1'B^2CB'A_2^2A_3^2- \\ &-8A_1'BC^2C'A_2^2A_3^2 + 4A_1'B^3CA_3'A_2^2A_3 - 4A_1'BC^3A_3'A_2^2A_3 + 2B^4C^3A_1^2B'A_2A_3- \\ &-2B^3C^4A_1^2C'A_2A_3 + B^5C^3A_1^2A_2'A_3 - B^3C^5A_1^2A_2'A_3 + B^5C^3A_1^2A_3'A_2 - B^3C^5A_1^2A_3'A_2), \end{aligned}$$

где, как и ранее, $F' \equiv \frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}$. Необозримость правой части делает практически невозможным анализ общей ситуации без помощи математических пакетов. Было установлено, что матрица M имеет ранг 5, в то время как ранг расширенной матрицы равен 6. Таким образом, найти решение общего вида не представляется возможным. Мы получаем следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть M — 7-мерное 3-сасакиево многообразие, чей кватернионно-кэлеров орбифолд может быть наделен кэлеровой структурой. Эволюционное уравнение (3) на $Spin(7)$-структуру определенную на конусе $\bar{M}$, задаваемую формой Φ вида (1), эквивалентно переопределенной системе уравнений (4).*

Литература

[1] Базайкин, Я. В. *О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$*/ Я. В. Базайкин // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 11 – 32.

[2] Базайкин, Я. В. *$Spin(7)$-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$* / Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 4. – С. 3 – 30.

[3] Boyer, C. P. *The geometry and topology*

of 3-Sasakian manifolds/ C. P. Boyer, K. Galicki, B .M. Mann // J. reine angrew. Math. – 1994. – Vol. 455. – P. 183 – 220.

УДК 514.76

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ К РЕШЕНИЮ ВОПРОСОВ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ K-КОНТАКТНЫХ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ СТРУКТУР САСАКИ НА ГРУППАХ ЛИ

Я. В. Славолюбова

APPLICATION OF SYSTEMS OF COMPUTER MATHEMATICS TO THE DECISION QUESTIONS OF EXISTENCE SEMI-RIEMANNIAN K-KONTACT-SASAKI-EINSTEIN STRUCTURES ON LIE GROUPS

Ya. V. Slavolyubova

С использованием процедур символьных вычислений на Maple найдены пятимерные алгебры Ли, допускающие левоинвариантные псевдоримановы K-контактные эйнштейновы структуры Сасаки. В качестве примера на одной из пятимерных алгебр Ли найдено в явной форме семейство структур Сасаки и получены геометрические свойства метрик семейства.

With use of procedures of symbolic computations on Maple the Lie algebras of dimension 5 supposing left invariant semi-Riemannian K-contact-Sasaki-Einstein structures are found. On one of Lie algebras of dimension 5 as an example the family of Sasaki structures is found in the obvious form and geometrical properties of metrics of family are received.

Ключевые слова: системы компьютерной математики, Maple, контактные структуры, пятимерные алгебры Ли, структуры Сасаки.

Keywords: systems of computer mathematics, Maple, contact structures, Lie algebras of dimension 5, Sasaki structures.

Системы компьютерной математики совмещают в одной оболочке обширный набор инструментов, позволяющий решать научные задачи как прикладного, так и теоретического характера. Однако они нацелены не на приближенные вычисления, а на решения задач, требующих проведения очень сложных символьных вычислений для получения точных решений или доказательств теорем. С использованием систем компьютерной математики получено множество новых математических результатов в областях, ранее далеких от использования компьютерных вычислений. Естественно, что для решения теоретических задач необходим этап математического моделирования, т. е. постановки задачи в том виде, в котором она возможна для компьютерного решения. Maple – одна из наиболее используемых систем компьютерной математики наряду с другими, такими, как Mathematica, MATLAB, MathCAD, Mupad, Derive [1]. Пакет Maple идеален для формулировки, решения и исследования различных математических моделей. При изучении геометрических структур на группах Ли возникает необходимость проведения чрезвычайно сложных вычислений. Многие задачи допускают возможность применения компьютерных символьных вычислений. В данной работе рассматривается применение системы компьютерной математики Maple к решению задач теории левоинвариантных контактных метрических структур на пятимерных группах Ли. Исследуемыми объектами являются группы и алгебры Ли размерности 5.

1. Предварительные сведения

Приведем сначала математические понятия, необходимые для постановки и моделирования задачи, решение которой осуществляется с использованием математического пакета Maple.

Определение 1. *Дифференцируемое $(2n+1)$-мерное многообразие M класса C^∞ называется контактным, если на нем задана 1-форма η, такая, что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1}.*

Контактная форма η определяет на многообразии M^{2n+1} распределение $D = \{X \in TM : \eta(X) = 0\}$ размерности $2n$, которое называется контактным. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле ξ, которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для всех векторных полей X на M^{2n+1}. Векторное поле ξ называется полем Риба или характеристическим векторным полем контактной структуры.

Определение 2. *Если (M^{2n+1}, η) – контактное многообразие, то контактной метрической* *структурой называется четверка (η, ξ, φ, g), где η – контактная форма, ξ – поле Риба, φ – аффинор на M^{2n+1}, g – риманова метрика со свойствами:*

1. $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$,
2. $d\eta(X, Y) = g(\varphi X, Y)$,
3. $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$,

где I – тождественный эндоморфизм TM^{2n+1}.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной. Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффинором: $g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Поэтому мы ассоциированные метрики будем задавать аффинором φ. Отметим также, что аффинор φ действует как почти комплексная структура на контактном распределении D. На контактном метрическом многообразии определены два тензора $N^{(1)}$ и $N^{(3)}$ следующими выражениями [2]:

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi,$$

$$N^{(3)}(X) = (L_\xi \varphi)X.$$

Определение 3. *Контактная метрическая структура называется структурой Сасаки, если на многообразии $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ интегрируема почти комплексная структура J, определенная формулой*

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}),$$

где $X \in TM^{2n+1}$, $t \in \mathbb{R}$, f – функция класса C^∞.

Определение 4. *Контактная метрическая структура называется K-контактной структурой, если поле Риба ξ порождает группу изометрий метрики g, т.е. поле Риба ξ является киллинговым относительно метрики g.*

Определение 5. [3] *Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется η-эйнштейновой структурой, если существуют гладкие функции a и b на M^{2n+1}, такие, что $\forall\ X, Y \in TM^{2n+1}$*

$$Ric_g(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y).$$

Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли G, то естественно рассматривать левоинвариантные контактные структуры. В этом случае контактная форма η, векторное поле Риба ξ, аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице, т. е. на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G.

2. Применение пакета Maple к исследованию контактных метрических структур на алгебре Ли

Известно [4], не существует K-контактных-эйнштейновых и, тем более, сасаки-эйнштейновых, левоинвариантных римановых структур на группах Ли размерности ≥ 5. Однако в псевдоримановом случае такие структуры существуют и могут быть получены в явном виде. В размерности 5 следующие разрешимые алгебры Ли допускают левоинвариантные псевдоримановы эйнштейновы K-контактные структуры Сасаки: разложимые $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2 \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{d}_{4,\lambda} \times \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$, $\delta \neq 0$; неразложимая $\mathfrak{g}_{5,22}$. Напомним, что $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ – прямое произведение алгебр Ли $aff(\mathbb{R}) \times aff(\mathbb{R})$, где $aff(\mathbb{R})$ – алгебра Ли группы Ли аффинных преобразований $\mathbb{R}$; $\mathfrak{r}'_2$ – алгебра Ли $aff(\mathbb{C})$, рассматриваемая как вещественная алгебра Ли [5]; а $\mathfrak{g}_{5,22}$ - 22-я алгебра Ли классификационного списка А. Диатты разрешимых и неразложимых алгебр Ли [4]. Подробно рассмотрим одну из них.

Алгебра Ли $\mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}$. Алгебра Ли $\mathfrak{r}'_2$ есть овеществление комплексной аффинной алгебры $aff(\mathbb{C})$. Она имеет базис e_1, e_2, e_3, e_4, в котором скобки Ли задаются следующим образом: $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_4$, $[e_2, e_4] = -e_3$. Алгебра является разрешимой, но не нильпотентной. Первый производный идеал $D^1\mathfrak{r}'_2$ двумерен, центр – нулевой. Алгебра Ли $\mathfrak{r}'_2$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{A}_{4,12}$ из [5]. Она является прямой суммой двух неабелевых алгебр $\mathfrak{r}'_{2,1} \times \mathfrak{r}'_{2,2}$, алгебра Ли $\mathfrak{r}'_{2,1}$ имеет базис $-e_1 - ie_2$, $e_3 + ie_4$, а алгебра Ли $\mathfrak{r}'_{2,2}$ имеет базис $-e_1 + ie_2$, $e_3 - ie_4$. Группу Ли, соответствующую данной алгебре Ли $\mathfrak{r}'_2$, будем обозначать символом R'_2. Алгебра Ли $\mathfrak{r}'_2$ является точной симплектической, и симплектические формы ω имеют вид:

$$\omega_1 = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4, \quad \omega = d\alpha, \quad \alpha = -e^3,$$

$$\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, \quad \omega = d\alpha, \quad \alpha = -e^4.$$

Рассмотрим контактное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}e_5$ алгебры Ли $\mathfrak{r}'_2$ с симплектической формой $\omega_1 = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4$, тогда контактная форма имеет вид $\eta = -e^3 + e^5$. Легко видеть, что $d\eta = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = e_5$. Контактное распределение D – это левоинвариантное распределение, заданное следующим подпространством в алгебре Ли. Если $(x_1, \ldots, x_5)$ – координаты на $\mathfrak{g}$, соответствующие выбранному базису e_i, то $D \subset \mathfrak{g}$ задается уравнением: $-x_3 + x_5 = 0$.

Для построения и компьютерного исследования ассоциированной контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) мы находим вычислительные формулы основных тензоров контактной метрической структуры и проводим следующие начальные этапы:

- определяем контактную форму η, поле Риба ξ и форму $d\eta$ в символьном виде;

- загружаем массивы структурных констант алгебр Ли $\mathfrak{r}_2'$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_2' \times \mathbb{R}e_5$;
- задаем массив аффинора φ в общем виде, как символьную матрицу и находим условия на его элементы для выполнения свойств 1 и 3 контактной метрической структуры.

Далее для решения вопроса о существовании ассоциированных K-контактных структур и структур Сасаки мы выполняем следующие этапы:

- составляем программу пересчета структурных констант с учетом выбора нового базиса;
- находим вид аффинора φ из условия: $d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$, решая в Maple систему алгебраических уравнений, вытекающую из условия: $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$;
- вычисляем ассоциированную метрику g, определенную при фиксированных η и ξ аффинором φ по следующей формуле: $g_{ij} = d\eta_{ik}\varphi_j^k + \eta_i\eta_j$;
- составляем программы и вычисляем основные геометрические характеристики построенной метрики: компоненты связности, тензор кривизны и его норму, секционные кривизны, тензор Риччи и его норму, оператор Риччи, главные кривизны Риччи, скалярную кривизну;
- составляем программу для решения вопроса об эйнштейновости и η-эйнштейновости;
- используя символьные вычисления, находим основные тензоры контактной метрической структуры;
- составляем программу для решения вопроса о K-контактности структуры;
- составляем программу для проверки различными критериями выполнения свойств K-контактности, сасакиевости.

Продемонстрируем эти этапы на примере решения данной задачи на прямом произведении $\mathfrak{r}_2' \times \mathbb{R}$. Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) задается контактной формой $\eta = -e^3 + e^5$; полем Риба $\xi = e_5$; аффинором

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & -\psi_{14} & \psi_{24} & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & -\psi_{11} & \psi_{21} & 0 \\ -\psi_{32} & \psi_{42} & \psi_{12} & -\psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где параметры ψ_{ij} удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \psi_{11}^2 + \psi_{12}\psi_{21} + \psi_{13}\psi_{31} - \psi_{14}\psi_{32} = -1 \\ \psi_{12}(\psi_{11} + \psi_{22}) + \psi_{13}\psi_{32} + \psi_{14}\psi_{42} = 0 \\ \psi_{12}\psi_{24} + \psi_{13}\psi_{21} + \psi_{14}(\psi_{11} - \psi_{22}) = 0 \\ \psi_{14}\psi_{31} - \psi_{21}(\psi_{11} + \psi_{22}) + \psi_{24}\psi_{32} = 0 \\ \psi_{12}\psi_{31} + \psi_{21}\psi_{42} - \psi_{32}(\psi_{11} - \psi_{22}) = 0 \\ \psi_{22}^2 + \psi_{12}\psi_{21} - \psi_{14}\psi_{32} + \psi_{24}\psi_{42} = -1 \end{cases},$$

ассоциированной метрикой g, относительно которой базис $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2$, $E_3 = e_3 + e_5$, $E_4 = e_4$, $E_5 = \xi = e_5$ является ортонормированным.

Составляем программы на m-языке Maple для выполнения поставленных выше этапов (см. пример листинга ниже). В результате компьютерного исследования структуры (η, ξ, φ, g) получается следующий теоретический результат.

Теорема 1. *Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на группе $R_2' \times \mathbb{R}$ является K-контактной при всех значениях параметров. Контактная метрическая структура на группе $R_2' \times \mathbb{R}$ является структурой Сасаки при следующих аффинорах φ_1, φ_2 и соответствующих метриках g_1, g_2:*

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & 0 \\ -\psi_{12} & \psi_{11} & -\psi_{14} & \psi_{13} & 0 \\ \frac{\psi_{13}(\psi_{12}^2-\psi_{11}^2-1)-2\psi_{11}\psi_{14}\psi_{12}}{\psi_{13}^2+\psi_{14}^2} & \frac{\psi_{14}(\psi_{11}^2-\psi_{12}^2+1)-2\psi_{11}\psi_{13}\psi_{12}}{\psi_{13}^2+\psi_{14}^2} & -\psi_{11} & -\psi_{12} & 0 \\ -\frac{\psi_{14}(\psi_{11}^2-\psi_{12}^2+1)-2\psi_{11}\psi_{13}\psi_{12}}{\psi_{13}^2+\psi_{14}^2} & \frac{\psi_{13}(\psi_{12}^2-\psi_{11}^2-1)-2\psi_{11}\psi_{14}\psi_{12}}{\psi_{13}^2+\psi_{14}^2} & \psi_{12} & -\psi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \psi_{13}^2 + \psi_{14}^2 \neq 0,$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} \frac{\psi_{13}(\psi_{12}^2-\psi_{11}^2-1)-2\psi_{11}\psi_{14}\psi_{12}}{\psi_{13}^2+\psi_{14}^2} & \frac{\psi_{14}(\psi_{11}^2-\psi_{12}^2+1)-2\psi_{11}\psi_{13}\psi_{12}}{\psi_{13}^2+\psi_{14}^2} & -\psi_{11} & -\psi_{12} & 0 \\ \frac{\psi_{14}(\psi_{11}^2-\psi_{12}^2+1)-2\psi_{11}\psi_{13}\psi_{12}}{\psi_{13}^2+\psi_{14}^2} & -\frac{\psi_{13}(\psi_{12}^2-\psi_{11}^2-1)-2\psi_{11}\psi_{14}\psi_{12}}{\psi_{13}^2+\psi_{14}^2} & -\psi_{12} & \psi_{11} & 0 \\ -\psi_{11} & -\psi_{12} & -\psi_{13} & -\psi_{14} & 0 \\ -\psi_{12} & \psi_{11} & -\psi_{14} & \psi_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \psi_{13}^2 + \psi_{14}^2 \neq 0,$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & 0 & \mp 1 & 0 \\ -\psi_{32} & \psi_{31} & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} \psi_{31} & \psi_{32} & 0 & \mp 1 & 0 \\ \psi_{32} & -\psi_{31} & \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для метрики g_1 квадраты норм тензора Римана и Риччи имеют выражения: $\|Riem_1\|^2 = -16\psi_{13}^2 - 16\psi_{14}^2 - 8\psi_{13} + 2$, $\|Ric_1\|^2 = 2$. *Скалярная кривизна выражается формулой:* $S = 8\psi_{13} - 1$. *Матрица RIC_1 оператора Риччи имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} 2\psi_{13} - \frac{1}{2} & -2\psi_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 2\psi_{14} & 2\psi_{13} - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\psi_{13} - \frac{1}{2} & -2\psi_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 2\psi_{14} & 2\psi_{13} - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Метрика Сасаки является псевдоримановой эйнштейновой при $\psi_{13} = 3/4$, $\psi_{14} = 0$. *Секционные кривизны принимают следующие значения:* $K_{1,3} = K_{2,4} = -\frac{(4\psi_{13}-3)(\psi_{13}^2+\psi_{14}^2)}{4((\psi_{12}\psi_{13}-\psi_{11}\psi_{14})^2-\psi_{13}^2)}$, $K_{1,2} = 0$, $K_{3,4} = 0$, $K_{1,4} = K_{2,3} = \frac{\psi_{13}(\psi_{13}^2+\psi_{14}^2)}{(\psi_{11}\psi_{13}+\psi_{12}\psi_{14})^2+\psi_{13}^2}$, $K_{1,5} = \frac{1}{4}$, $K_{2,5} = \frac{1}{4}$, $K_{3,5} = \frac{1}{4}$, $K_{4,5} = \frac{1}{4}$.

Для метрики g_2 квадраты норм тензора Римана и Риччи имеют выражения: $\|Riem_2\|^2 = \frac{17}{2}$, $\|Ric_2\|^2 = 2$. *Скалярная кривизна выражается формулой:* $S = -1$.

Матрица оператора Риччи имеет следующий вид: $RIC_2 = diag(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$. *Метрика Сасаки является псевдоримановой η-эйнштейновой при любых параметрах. Секционные кривизны в направлениях базисных площадок $\langle E_i, E_j\rangle$ принимают следующие значения:* $K_{1,2} = 0$, $K_{1,4} = 0$, $K_{2,3} = 0$, $K_{1,5} = \frac{1}{4}$, $K_{2,5} = \frac{1}{4}$.

Аналогичным образом рассматривается контактное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_2' \times \mathbb{R}e_5$ с симплектической формой $\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$.

Опишем Maple-процедуру для определения свойства K-контактности одним из способов. Компоненты тензора $N^{(3)}$ вычисляются по формуле:

$$N^{(3)}{}_i^k = \varphi_i^s C_{2n+1,s}^k - C_{2n+1,i}^s \varphi_s^k.$$

Введем обозначения: **C** – массив структурных констант на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, **f** – аффинор на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, **N3** – тензор $N^{(3)}$, **YY** – количество ненулевых компонент тензора $N^{(3)}$. Входными параметрами данной процедуры являются массивы структурных констант C и массив элементов аффинора φ, $m = 2n+1$ — размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Выходным параметром является количество ненулевых компонент тензора $N^{(3)}$ и вывод их на печать.

Kkont:=proc(C,f,m)

Описываем локальные переменные:

local i,k,s,N3,YY;

Тело процедуры:

Определяем массив компонент тензора $N^{(3)}$ и выводим на печать его нетривиальные компоненты с указанием их количества:

```
N3:=array(1..m,1..m):
YY:=0:
    for i to m do
        for k to m do
            N3[k,i]:=sum(f[s,i]*C[m,s,k]-
            C[m,i,s]*f[k,s],'s'=1..m);
            if N3[k,i] <> 0 then YY :=
            YY+1
            fi
    od od;
print('Kolichestvo<>0'=YY);
for i to m do
    for k to m do
        if N3[k,i] <> 0 then print((k,i)=
        simplify(evalm(N3[k,i])))
        fi
od od;
end:
```

Вызов процедуры производится следующей командой:

Kkont(C,f,m).

Литература

[1] Дьяконов, В. *Maple 9 в математике, физике и образовании* / В. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 688 с.

[2] Blair, D. E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry* / D. E. Blair // Lecture Notes in Mathematics. – Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. – 145 p.

[3] Davidov, J. *Eta-Einstein condition on twistor spaces of odd-dimensional Riemannian manifolds* / J. Davidov // Journal of Geometry 86, 2006. – P. 42 – 53.

[4] Diatta, A. *Left invariant contact structures on Lie groups* / A. Diatta // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/math/0403555v2, свободный.

[5] Ovando, G. *Four dimensional symplectic Lie algebras* / G. Ovando // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/math/0407501 v1, свободный.

[6] Ghanam, R. *Variationality of Four-Dimensional Lie Group Connection* / R. Ghanam, G. Thompson, E. Miller // J. of the Lie Theory. – 2004. – Vol. 14. – P. 395 – 425.

УДК 514.76.2

КАНОНИЧЕСКИЕ ПСЕВДОКЭЛЕРОВЫ МЕТРИКИ НА ШЕСТИМЕРНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Н. К. Смоленцев

CANONICAL PSEUDO-KÄHLER METRICS ON SIX-DIMENSIONAL NILPOTENT LIE GROUPS

N. K. Smolentsev

Найдены левоинвариантные псевдокэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли, зависящие только от тех параметров, которые оказывают влияние на кривизну. Все такие структуры имеют нулевой тензор Риччи, нулевую псевдориманову норму и большинство из них не являются плоскими. Полученные псевдокэлеровы структуры дают простые модели псевдокэлеровых шестимерных нильмногообразий.

Left-invariant pseudo-Kähler structures on the six-dimensional nilpotent Lie groups, depending only from those parametres which influence curvature are discovered. All such structures have a zero Ricci tensor, zero Pseudo-Riemannian norm and the majority of them are not flat. The received pseudo-Kähler structures give simple models pseudo-Kähler six-dimensional nilmanifolds.

Ключевые слова: шестимерные группы Ли, нильмногообразия, псевдокэлеровы группы Ли, симплектические группы Ли.

Keywords: six-dimensional Lie groups, nilmanifolds, pseudo-Kähler Lie groups, symplectic Lie groups.

1. Кэлеровы и псевдокэлеровы структуры на группах Ли

Левоинвариантная кэлерова структура на группе Ли G – это тройка (g, J, ω), состоящая из левоинвариантной римановой метрики g, ортогональной левоинвариантной комплексной структуры J и левоинвариантной симплектической формы $\omega(X, Y)$, причем

$$g(X, Y) = \omega(X, JY) \qquad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

Поэтому такую структуру на группе Ли G можно задать парой (J, ω), где J – комплексная структура, а ω – симплектическая форма, *согласованная* с J, т.е. такая, что $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$. Если $\omega(X, JX) > 0$, $\forall X \neq 0$, получается кэлерова метрика, а если условие положительности не выполняется, то $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ является псевдоримановой метрикой и тогда (g, J, ω) называется *псевдокэлеровой* структурой на группе Ли G. Из левоинвариантности следует, что (псевдо)кэлерова структура (g, J, ω) может быть задана значениями J, ω и g на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Тогда $(\mathfrak{g}, J, \omega, g)$ называется *псевдокэлеровой алгеброй Ли*. Обратно, если $(\mathfrak{g}, J, g)$ есть алгебра Ли, наделенная комплексной структурой J, ортогональной относительно псевдоримановой метрики g, то равенство (1) определяет (фундаментальную) 2-форму ω, которая замкнута тогда и только тогда, когда J параллельна [9].

Поскольку (псевдо)кэлерова группа Ли G является симплектической, то следует также иметь ввиду ряд общих фактов о симплектических структурах. В частности: полупростые группы Ли не допускают симплектической формы, компактные группы Ли (за исключением тора) также не допускают симплектической формы, четырехмерные симплектические и унимодулярные симплектические группы Ли являются разрешимыми [4].

Условие существования положительно определенной кэлеровой метрики накладывает серьезные ограничения на структуру алгебры Ли. Например, в работе Benson C. и Gordon C. показано [3], что такая алгебра Ли не может быть нильпотентной за исключением абелевого случая. Задача нахождения эрмитовых или симплектических многообразий, которые не являются кэлеровыми, имеет достаточно длинную историю. Первым можно считать пример, приведенный Терстоном [14], четырехмерного многообразия, которое является симплектическим, но не допускает кэлеровой метрики. Идеи работы Терстона были развиты в серии работ Cordero L.A., Fernãndez M. и Gray A. и были получены другие примеры симплектических многообразий, не допускающих кэлеровой метрики. Все эти примеры являются нильмногообразиями, т. е. компактными факторами нильпотентной группы Ли по дискретной подгруппе. Итоги исследований представлены в книге Tralle A., Oprea J. [15].

Хотя нильмногообразия (за исключением тора) не допускают кэлеровой метрики [3], но на таких многообразиях могут существовать псевдокэлеровы структуры. В данной работе мы рассмотрим псевдокэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли. Приведем некоторые общие факты о псевдокэлеровых структурах на группах Ли.

Особыми объектами на симплектической алгебре Ли $(\mathfrak{g}, \omega)$ являются изотропные и лагранжевы подпространства. Напомним, что подпространство $W \subset \mathfrak{g}$ называется *ω-изотропным*, если и только если $\omega(W, W) = 0$ и называется *ω-лагранжевым*, если оно ω-изотропно и из $\omega(W,u) = 0$ следует $u \in W$. Подпространства $U, V \subset W$ симплектического пространства (W,ω) будем называть *ω-дуальными*, если для любого вектора $u \in U$ существует вектор $v \in V$ такой, что $\omega(u,v) \neq 0$ и, наоборот, $\forall v \in V, \exists u \in U, \omega(u,v) \neq 0$.

Если g – (псевдо)риманова метрика, то для данного подпространства W из $\mathfrak{g}$, ортогональное подпространство $W^\perp$ определяется обычным образом, $W^\perp = \{X \in \mathfrak{g} | \ g(X,Y) = 0, \forall \ Y \in W\}$. Подпространство W называется *изотропным*, если $W \subset W^\perp$ и называется вполне изотропным, если $W = W^\perp$.

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита, соответствующая псевдоримановой метрике g. Она определяется из шестичленной формулы [9], которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид: $2g(\nabla_X Y, Z) = = g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y])$. Напомним, что тензор кривизны $R(X,Y)$ и тензор Риччи $Ric(X,Y)$ определяются формулами:

$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$,

$Ric(X,Y) = \sum_i \varepsilon_i g(R(e_i,X)Y, e_i)$,

где $\{e_i\}$ – ортонормированный репер на $\mathfrak{g}$ и $\varepsilon_i = = g(e_i,e_i)$. Риманова метрика g называется плоской, если $R \equiv 0$, и Риччи-плоской, если $Ric \equiv 0$.

Лемма 1.1. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ – (псевдо)кэлерова алгебра Ли. Тогда если $\mathfrak{h}$ есть ω-изотропный идеал, то:*

- *$\mathfrak{h}$ является абелевым*
- *$J(\mathfrak{h})$ есть ω-изотропная подалгебра в $\mathfrak{g}$.*

Таким образом, $\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}$ есть подалгебра $\mathfrak{g}$ и сумма не обязательно прямая. При этом $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}$ есть идеал в $\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}$ инвариантный относительно J.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{h}$ есть ω-изотропный идеал, первое утверждение следует из условия замкнутости и невырожденности ω. Условие интегрируемости J, ограниченное на абелев идеал $\mathfrak{h}$, влечет $[JX, JY] = J([JX,Y] + [X,JY])$. Это показывает, что $J\mathfrak{h}$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}$. Согласованность J и ω показывает, что $\omega(JX,JY) = \omega(X,Y) = 0$ для $X, Y \in \mathfrak{h}$, и тогда $J\mathfrak{h}$ – ω-изотропна. Кроме того, если $\mathfrak{h}$ есть ω-лагранжев, то $J\mathfrak{h}$ также ω-лагранжева и второе утверждение доказано.

Подмногообразие N является вполне геодезическим, если $\nabla_X Y \in TN$ для $X, Y \in TN$. На уровне алгебр Ли мы имеем вполне геодезические подпространства и подалгебры, которые соответствуют вполне геодезическим подмногообразиям и подгруппам группы Ли G с левоинвариантной псевдометрикой g.

Следующие свойства сразу вытекают из формулы для определения ковариантной производной и из свойств (псевдо)кэлеровой структуры (J,ω) алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение 1.2. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g}, J, g)$ – (псевдо)кэлерова алгебра Ли и предположим, что $\mathfrak{h}$ есть идеал, удовлетворяющий $J\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^\perp$ и $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h} = 0$ (т. е. $\mathfrak{h}$ есть ω-лагранжев), тогда для $X, Y \in \mathfrak{h}$ имеет место следующее:*

- *$\nabla_X Y \in J\mathfrak{h}$;*
- *$\nabla_{JX} JY \in J\mathfrak{h}$;*
- *$\nabla_X JY \in \mathfrak{h}$; и $\nabla_{JX} Y \in \mathfrak{h}$.*

Таким образом, подгруппа соответствующая $J\mathfrak{h}$ в группе Ли G является вполне геодезической.

Предложение 1.3. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g}, J, g)$ – (псевдо)кэлерова алгебра Ли и предположим, что $\mathfrak{h}$ есть абелев идеал, удовлетворяющий условиям $J\mathfrak{h} = \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^\perp$. Тогда имеет место:*

- *$\nabla_Z Y \in \mathfrak{h}$ для всех $Y \in \mathfrak{h}$, и $Z \in \mathfrak{g}$; в частности: $\nabla_X Y = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{h}$*

Таким образом, нормальная подгруппа H, соответствующая идеалу $\mathfrak{h}$, является вполне геодезической в группе Ли G.

Для s-ступенной нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ размерности m определена возрастающая центральная последовательность идеалов:

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{s-1} \subset \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g},$$

$\mathfrak{g}_k = \{X \in \mathfrak{g} | \ [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_{k-1}\}, \ k \geq 1$.

Если J – комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то можно по аналогии определить возрастающую последовательность идеалов $\mathfrak{a}_k(J)$ следующим образом: $\mathfrak{a}_0(J) = \{0\}$, $\mathfrak{a}_k(J) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}_{k-1}(J)$ и $[JX, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}_{k-1}(J)\}$, $k \geq 1$. Каждый идеал $\mathfrak{a}_k(J)$ инвариантен относительно J и $\mathfrak{a}_k(J) \subseteq \mathfrak{g}_k$ для $k \geq 1$.

Напомним, что левоинвариантная комплексная структура J на G называется *нильпотентной*, если для ряда $\mathfrak{a}_k(J)$ существует номер p такой, что $\mathfrak{a}_p(J) = \mathfrak{g}$.

Очевидно, что идеал $\mathfrak{a}_1(J)$ лежит в центре $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если нильпотентная алгебра Ли имеет двумерный центр $\mathcal{Z}$, то для любой левоинвариантной комплексной нильпотентной структуры J идеал $\mathcal{Z}$ инвариантен относительно J. Если нильпотентная алгебра Ли имеет возрастающую центральную последовательность идеалов $\mathfrak{g}_k$, $k = 0, 1, \dots, s$, для которой размерности возрастают каждый раз на две единицы, то для любой левоинвариантной комплексной нильпотентной структуры J выполняются равенства $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{a}_k(J)$, $k = 0, 1, \dots, s$. Если базис $\mathfrak{g}$ выбран так, что $\mathfrak{g}_1 = \{e_{2n-1}, e_{2n}\}$, $\mathfrak{g}_2 = \{e_{2n-3}, e_{2n-2}, e_{2n-1}, e_{2n}\}$, ..., то комплексная структура J имеет следующий блочный вид (например, для шестимерного случая):

$$J_{\mathfrak{I}} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} & 0 & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} & 0 & 0 \\ \psi_{51} & \psi_{52} & \psi_{53} & \psi_{54} & \psi_{55} & \psi_{56} \\ \psi_{61} & \psi_{62} & \psi_{63} & \psi_{64} & \psi_{65} & \psi_{66} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Оставшиеся параметры в (2) не являются свободными, они связаны условиями интегрируемости $N_J = 0$ и $J^2 = -1$.

Лемма 1.4. *Если $C^1(\mathfrak{g})$ – первый производный идеал и $\mathcal{Z}$ – центр алгебры Ли, то для любой симплектической формы ω на $\mathfrak{g}$, $\omega(C^1(\mathfrak{g}), \mathcal{Z}) = 0$.*

Сразу следует из формулы $d\omega(X,Y,Z) = = \omega([X,Y],Z) - \omega([X,Z],Y) + \omega([Y,Z],X) = 0$, $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Лемма 1.5. *Если $C^1\mathfrak{g}$ – первый производный идеал, то $\omega(C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}), \mathfrak{a}_1(J)) = 0$.*

Следствие 1.6. *Для любой (псевдо)кэлеровой структуры $(\mathfrak{g}, \omega, g, J)$ идеал $\mathfrak{a}_1(J) \subset \mathcal{Z}$ ортогонален подпространству $C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g})$:*

$$g(C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}), \mathfrak{a}_1(J)) = 0.$$

Из формулы $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y])$ для ковариантной производной ∇ на группе Ли сразу вытекают следующие наблюдения:

- если векторы X и Y лежат в центре алгебры Ли, то $\nabla_X Y = 0$ для любой левоинвариантной (псевдо)римановой структуры g на алгебре Ли;
- если вектор X лежит в центре алгебры Ли, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X$.

Лемма 1.7. *Если вектор X лежит в идеале $\mathfrak{a}_1(J) \subset \mathcal{Z}$ алгебры Ли, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X = 0$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{a}_1(J) \subset \mathcal{Z}$ и $Z, Y \in \mathfrak{g}$. Тогда из следствия 1.6 выше вытекает, что $2g(\nabla_X Y, Z) = g(X, [Z,Y]) = 0$.

Следствие 1.8 *Если вектор X лежит в идеале $\mathfrak{a}_1(J) \subset \mathcal{Z}$ алгебры Ли, то $R(X,Y)Z = = R(Z,Y)X = 0$, $\forall Y, Z \in \mathfrak{g}$. Если согласованная с ω комплексная структура J имеет вид (2), то кривизна $R(X,Y)$ ассоциированной метрики не зависит от свободных параметров ψ_{51}, ψ_{52}, ψ_{53}, ψ_{54}, ψ_{61}, ψ_{62}, ψ_{63}, ψ_{64}.*

Замечание 1. Отметим, что параметры ψ_{ij} комплексной структуры J связаны тремя условиями: согласованность, интегрируемость и $J^2 = -1$. Поэтому некоторые из указанных выше параметров могут выражаться через другие, например через ψ_{11} и ψ_{12}. В следствии 1.8 речь идет о свободных параметрах, т. е. таких, которые остались независимыми. От них кривизна не зависит.

Как уже отмечалось, (псевдо)кэлерова метрика g может быть неопределенной. В знакоопределенном случае Риччи-плоские метрики являются плоскими [1]. В неопределенном случае это вообще неверно. Однако в размерности четыре, если $\mathfrak{g}$ – унимодулярная и псевдокэлерова метрика является Риччи-плоской, то она плоская.

2. Кэлеровы и псевдокэлеровы структуры на четырехмерных группах Ли

Кэлеровы и псевдокэлеровы структуры (J, ω) на четырехмерных группах Ли изучались в последнее время во многих работах. Отметим серию статей Г. Овандо [11], [12] и работы Е. С. Корнева [8]. В работе [4] показано, что четырехмерные псевдокэлеровы группы Ли могут быть только разрешимыми. В работе Г. Овандо [12] подробно изучены псевдокэлеровы левоинвариантные метрики на четырехмерных группах Ли. Совместимые пары (J, ω) параметризованы с точностью до комплексного изоморфизма. Показано, что многие из таких групп Ли допускают псевдокэлеровы эйнштейновы метрики. Рассмотрены Риччи-плоские и плоские метрики. В частности, показано, что в размерности четыре Риччи-плоские унимодулярные псевдокэлеровы алгебры Ли являются плоскими. Показано, что в восьми из 11 семейств (псевдо)кэлеровых алгебр Ли существуют эйнштейновы представители. В работе [12] показано, что симплектическая алгебра Ли, допускающая абелеву комплексную структуру, является псевдокэлеровой. В этом случае $(\mathfrak{g}, J)$ является псевдокэлеровой, если и только если, J является абелевой. Например, алгебра Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$ имеет и абелевы и неабелевы комплексные структуры; однако только абелевы допускают согласованную симплектическую форму. Напомним, что комплексная структура J называется *абелевой*, если она удовлетворяет условию $[JX, JY] = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Четырехмерные (псевдо)кэлеровы алгебры Ли. Классификацию четырехмерных разрешимых вещественных алгебр Ли можно найти, например, в работе [2]. Обозначим $\{e^i\}$ базис на $\mathfrak{g}^*$ дуальный к базису $\{e_i\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и пусть $e^{ij} = e^i \wedge e^j$.

Теорема 2.1. ([12]) *Пусть $\mathfrak{g}$ – (псевдо)кэлерова алгебра Ли, тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна одной из следующих алгебр Ли, наделенных комплексной и согласованной симплектической структурами из следующего списка:*

$\mathfrak{rh}_3$: $[e_1,e_2]=e_3,\quad Je_1=e_2,\ Je_3=e_4,\quad \omega=a(e^{13}+e^{24})+b(e^{14}-e^{23})+ce^{12},\ a^2+b^2\neq 0$

$\mathfrak{rr}_{3,0}$: $[e_1,e_2]=e_2,\quad Je_1=e_2,\ Je_3=e_4,\quad \omega=a\,e^{12}+b\,e^{34},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{rr}'_{3,0}$: $[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\quad Je_1=e_4,\ Je_2=e_3,\quad \omega=a\,e^{14}+b\,e^{23},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$: $[e_1,e_2]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_4,\quad Je_1=e_2,\ Je_3=e_4,\quad \omega=a\,e^{12}+b\,e^{34},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{r}'_2$: $[e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_4,\ [e_2,e_4]=-e_3,$
$J_1e_1=e_3,\ J_1e_2=e_4,\quad \omega_1=a\,(e^{13}-e^{24})+b\,(e^{14}+e^{23}),\ a^2+b^2\neq 0$
$J_2e_1=-e_2,\ J_2e_3=e_4,\quad \omega_2=a\,(e^{13}-e^{24})+b\,(e^{14}+e^{23})+c\,e^{12},\quad a^2+b^2\neq 0$

$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$: $[e_4,e_1]=e_1,\ [e_4,e_2]=-e_2,\ [e_4,e_3]=-e_3,$
$Je_4=e_1,\ Je_2=e_3,\quad \omega=a\,(e^{12}+e^{34})+b\,(e^{13}-e^{24})+c\,e^{14},\quad a^2+b^2\neq 0$

$\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$: $[e_4,e_1]=e_1,\ [e_4,e_2]=-\delta e_3,\ [e_4,e_3]=\delta e_2,\ \delta>0,$
$J_1e_4=e_1,\ J_1e_2=e_3,\quad J_2e_4=e_1,\ J_2e_2=-e_3,\quad \omega=a\,e^{14}+b\,e^{23},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{d}_{4,1}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_4,e_3]=e_3,\ [e_4,e_1]=e_1,$
$Je_1=e_4,\ Je_2=e_3,\quad \omega=a\,(e^{12}-e^{34})+be^{14},\ a\neq 0$

$\mathfrak{d}_{4,2}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_4,e_3]=e_3,\ [e_4,e_1]=2e_1,\ [e_4,e_2]=-e_2,$
$J_1e_4=-e_2,\ J_1e_1=e_3,\quad \omega_1=a\,(e^{14}+e^{23})+be^{24},\ a\neq 0$
$J_2e_4=-2e_1,\ J_2e_2=e_3,\quad \omega_2=a\,e^{14}+b\,e^{23},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{d}_{4,1/2}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_4,e_3]=e_3,\ [e_4,e_1]=\frac{1}{2}e_1,\ [e_4,e_2]=\frac{1}{2}e_2,$
$J_1e_4=e_3,\ J_1e_1=e_2,\quad J_2e_4=e_3,\ J_2e_1=-e_2,\quad \omega=a(e^{12}-e^{34}),\ a\neq 0$

$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_4,e_1]=\frac{\delta}{2}e_1-e_2,\ [e_4,e_3]=\delta e_3,\ [e_4,e_2]=e_1+\frac{\delta}{2}e_2,\quad \delta\geq 0,$
$J_1e_4=e_3,\ J_1e_1=e_2,\quad J_2e_4=-e_3,\ J_2e_1=e_2,\quad J_3e_4=-e_3,\ J_3e_1=-e_2,$
$\omega=a\,(e^{12}-\delta e^{34}),\ a\neq 0$.

Отметим, что $\mathfrak{rh}_3$ есть тривиальное расширение трехмерной алгебры Ли Гейзенберга, обозначаемой $\mathfrak{h}_3$; $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ есть алгебра Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, где $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ – алгебра Ли группы Ли аффинных движений $\mathbb{R}$, $\mathfrak{r}'_2$ есть вещественная алгебра Ли, лежащей в основе комплексной алгебры Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{r}'_{3,0}$ есть тривиальное расширение $\mathfrak{e}(2)$, алгебры Ли группы Ли движений $\mathbb{R}^2$; $\mathfrak{r}_{3,-1}$ – алгебра Ли $\mathfrak{e}(1,1)$ группы Ли движений 2-пространства Минковского. Унимодулярные четырехмерные разрешимые алгебры Ли – это следующие: $\mathbb{R}^4$, $\mathfrak{rh}_3$, $\mathfrak{rr}_{3,-1}$, $\mathfrak{rr}'_{3,0}$, $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{r}_{4,-1/2}$, $\mathfrak{r}_{4,\mu,-1-\mu}$ $(-1<\mu\leq -1/2)$, $\mathfrak{r}'_{4,\mu,-\mu/2}$, $\mathfrak{d}_4$, $\mathfrak{d}'_{4,0}$.

Из списка теоремы 2.1 получаем ряд следствий [12]:

1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная (неабелева) четырехмерная псевдокэлерова алгебра Ли, тогда она изоморфна $\mathbb{R}\times\mathfrak{h}_3$ и любая комплексная структура является абелевой.*

2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – четырехмерная алгебра Ли для которой любая комплексная структура допускает (псевдо)кэлерову структуру на $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна одной из алгебр $\mathbb{R}\times\mathfrak{h}_3$, $\mathbb{R}^2\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}\times\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$, $\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$, $\mathfrak{d}_{4,1}$ $\mathfrak{d}_{4,2}$*

3. *Пусть $\mathfrak{g}$ – четырехмерная алгебра Ли, допускающая абелеву комплексную структуру. Тогда $(\mathfrak{g},J)$ является (псевдо)кэлеровой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ – симплектическая и J – абелева.*

4. *Пусть $(\mathfrak{g},J)$ – неабелева четырехмерная алгебра Ли с комплексной структурой J, допускающая только знакоопределенные кэлеровы метрики, тогда $(\mathfrak{g},J)$ изоморфна либо алгебре Ли $(\mathfrak{d}_{4,1/2},J_1)$, или алгебре $(\mathfrak{d}'_{4,\delta},J_1,J_3)$.*

   Псевдокэлеровы алгебры Ли $(\mathbb{R}\times\mathfrak{h}_3,J)$, $(\mathfrak{aff}(\mathbb{C}),J_1,J_2)$, $(\mathfrak{r}_{4,-1,-1},J)$ и $(\mathfrak{d}_{4,1},J)$ и $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ допускают только нейтральные псевдоримановы метрики.

Здесь комплексные структуры J, J_1, J_2 и J_3 определены в таблице теоремы 2.1.

Теорема 2.2. ([12]) *Пусть $\mathfrak{g}$ – унимодулярная четырехмерная псевдокэлерова алгебра Ли, тогда метрика g является плоской и ее связность Леви-Чивита является полной.*

Теорема 2.3. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g},J)$ – не унимодулярная четырехмерная кэлерова алгебра Ли с псевдокэлеровой Риччи-плоской метрикой g. Тогда $(\mathfrak{g},J)$ изоморфна одной из $(\mathfrak{r}_{4,-1,-1},J)$, $(\mathfrak{d}_{4,2},J_2)$, $(\mathfrak{aff}(\mathbb{C}),J_2)$. Кроме того, эти алгебры Ли имеют плоские метрики и также Риччи-плоские но не плоские метрики.*

В работе [12] определены все эйнштейновы кэлеровы метрики в четырехмерном случае. Напомним, что $e^i\cdot e^j$ – это симметричное произведение 1-форм e^i и e^j.

Предложение 2.4. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g},J,g)$ – кэлерова алгебра Ли с эйнштейновой метрикой g. Тогда, если g – не Риччи-плоская, то g есть (псевдо)кэлерова метрика, соответствующая одной из следующих алгебр Ли:*

$\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$	J	$g = \alpha(e^1 \cdot e^1 + e^2 \cdot e^2 + e^3 \cdot e^3 + e^4 \cdot e^4)\,,$
$\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$	J_1	$g = \alpha(e^1 \cdot e^1 - e^2 \cdot e^2 + e^3 \cdot e^3 - e^4 \cdot e^4)\,,$
$\mathfrak{d}_{4,1/2}$	$J_1,$ J_2	$g = \alpha(e^1 \cdot e^1 + e^2 \cdot e^2 + e^3 \cdot e^3 + e^4 \cdot e^4)\,,$ $g = \alpha(e^1 \cdot e^1 + e^2 \cdot e^2 - e^3 \cdot e^3 - e^4 \cdot e^4)\,,$
$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$	J_1, J_3, J_2	$g = \alpha(e^1 \cdot e^1 + e^2 \cdot e^2 + \delta(e^3 \cdot e^3 + e^4 \cdot e^4))\,,$ $g = \alpha(e^1 \cdot e^1 + e^2 \cdot e^2 - \delta(e^3 \cdot e^3 + e^4 \cdot e^4))\,.$

Теорема 2.5. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g}, J, g)$ – кэлерова алгебра Ли. Если $\mathfrak{g}$ не допускает эйнштейновой кэлеровой метрики, то $\mathfrak{g}$ изоморфна одной из алгебр $\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$, $\mathfrak{d}_{4,1}$.*

3. Псевдокэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли

Как известно [3], не существует нильпотентных групп Ли, допускающих левоинвариантную кэлерову структуру, кроме абелевых. Однако псевдокэлеровы структуры существуют на многих нильпотентных группах Ли. Псевдокэлерова структура на группе Ли задается симплектической формой ω и согласованной с ней комплексной структурой J, т. е. такой, что $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$. Классификация левоинвариантных комплексных структур на шестимерных нильпотентных группах Ли получена в работе Саламона [13]. Полный список симплектических структур на шестимерных шильпотентных группах Ли, установлен в работе M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina [7]:

Каждая нильпотентная симплектическая алгебра Ли размерности 6 симплекто-изоморфна одной и только одной из следующих симплектических алгебр Ли:

1. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_6,$
   $\omega = e^1 \wedge e^6 + (1-\lambda)e^2 \wedge e^5 + \lambda e^3 \wedge e^4, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\,.$
2. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_6,$
   $\omega(\lambda) = \lambda(e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5), \qquad \lambda \neq 0\,.$
3. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6, \qquad \omega = e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4\,.$
4. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_5] = e_6,$
   $\omega(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 e^1 \wedge e^4 + \lambda_2(e^1 \wedge e^5 + e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5), \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_2 \neq 0\,.$
5. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = -e_6, \quad [e_2, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_5] = e_6,$
   $\omega_1(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 e^1 \wedge e^4 + \lambda_2(e^1 \wedge e^5 + e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5),\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_2 \neq 0\,,$
   $\omega_2(\lambda) = \lambda(e^1 \wedge e^6 - 2e^1 \wedge e^5 - 2e^2 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5),\ \lambda \neq 0\,,$
   $\omega_3(\lambda) = \lambda(e^1 \wedge e^4 - e^1 \wedge e^5 + e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5),\ \lambda \neq 0\,,$
   $\omega_4(\lambda) = \lambda(2e^1 \wedge e^4 + e^1 \wedge e^6 + 2e^2 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5),\ \lambda \neq 0\,.$
6. $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_6,$
   $\omega_1 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4, \qquad \omega_2 = -e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4\,.$
7. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_6, \quad [e_2, e_4] = e_6,$
   $\omega_1(\lambda) = \lambda(e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^5), \qquad \omega_2(\lambda) = \lambda(e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4), \quad \lambda \neq 0\,.$
8. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_6,$
   $\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4\,.$
9. $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_6,\ \omega(\lambda){=}\lambda(e^1 \wedge e^3{+}e^2 \wedge e^6{-}e^4 \wedge e^5),\ \lambda \neq 0.$
10. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_3] = e_6, \quad [e_2, e_4] = e_6,$
    $\omega_1 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^2 \wedge e^6 - e^3 \wedge e^4, \qquad \omega_2 = -e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^4\,.$
11. $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_6, \quad [e_2, e_4] = e_6,$
    $\omega_1(\lambda) = e^1 \wedge e^6{+}e^2 \wedge e^5{+}\lambda e^2 \wedge e^6{-}e^3 \wedge e^4, \quad \omega_2(\lambda) = -e^1 \wedge e^6{-}e^2 \wedge e^5{+}\lambda e^2 \wedge e^6{+}e^3 \wedge e^4,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$

12. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_3]=e_6,\quad [e_2,e_3]=-e_5,\quad [e_2,e_4]=e_6,$
$\omega(\lambda)=\lambda e^1\wedge e^5+e^2\wedge e^6+(\lambda+1)e^3\wedge e^4,\quad \lambda\neq 0,-1\,.$

13. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6,$
$\omega_1(\lambda)=e^1\wedge e^6+\lambda e^2\wedge e^5+(\lambda-1)\,e^3\wedge e^4,\quad \lambda\neq 0\,,1\,,$
$\omega_2(\lambda)=e^1\wedge e^6+\lambda e^2\wedge e^4+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^5,\quad \lambda\neq 0\,,$
$\omega_3=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+\frac{1}{2}e^2\wedge e^5-\frac{1}{2}e^3\wedge e^4\,.$

14. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_1,e_3]=e_5,\qquad \omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^5,$
$\omega_2=e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^5,\quad \omega_3=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

15. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,\qquad \omega_1=-e^1\wedge e^5+e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4,$
$\omega_2=e^1\wedge e^5-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4,\qquad \omega_3=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^5\,.$

16. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_3]=e_6,\quad [e_2,e_4]=e_6,\quad [e_3,e_4]=-e_5,$
$\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^3-e^4\wedge e^5,\qquad \omega_2=e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^3+e^4\wedge e^5\,.$

17. $[e_1,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

18. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_3]=e_5,\quad [e_2,e_3]=e_6,$
$\omega_1(\lambda)=e^1\wedge e^6+\lambda e^2\wedge e^5+(\lambda-1)\,e^3\wedge e^4,\quad \lambda\neq 0,\,1,$
$\omega_2(\lambda)=e^1\wedge e^5+\lambda e^1\wedge e^6-\lambda e^2\wedge e^5+e^2\wedge e^6-2\lambda e^3\wedge e^4,\quad \lambda\neq 0,$
$\omega_3=e^3\wedge e^5-e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+2e^3\wedge e^4\,.$

19. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^6-e^4\wedge e^5\,.$

20. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_2,e_3]=e_5,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4\,.$

21. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6,\qquad \omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4-e^3\wedge e^4-e^3\wedge e^5,$
$\omega_2=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4,\qquad \omega_3=-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

22. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

23. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_3]=e_6,\qquad \omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4,$
$\omega_2=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^5,\qquad \omega_3=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^6-e^3\wedge e^5\,.$

24. $[e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,$
$\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4,\qquad \omega_1=-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4\,.$

25. $[e_1,e_2]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

26. $\mathbb{R}^6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

Укажем также нильпотентные алгебры Ли, не допускающие ни комплексной, ни симплектической структур [13]:

1. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,$
$[e_2,e_3]=e_5,\ [e_3,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=-e_6.$

2. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,$
$[e_3,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_5]=-e_6.$

3. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,$
$[e_3,e_5]=e_6.$

4. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,$
$[e_3,e_5]=e_6.$

5. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\quad [e_3,e_4]=e_6.$

Следующие нильпотентные алгебры Ли не допускают только симплектической структуры:

1. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,$
$[e_3,e_5]=-e_6.$

2. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_2,e_4]=e_6.$

3. $[e_1,e_2]=e_6,\quad [e_3,e_4]=e_6.$

Алгебра Ли с коммутационными соотношениями $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_5] = e_6$ допускает комплексные структуры и отдельно симплектические, но не допускает согласованных, т. е. псевдокэлеровых структур.

Как уже упоминалось, на нильпотентных группах Ли нет кэлеровых метрик, но могут существовать псевдокэлеровы структуры. Достаточно подробное изучение псевдокэлеровых структур в шестимерном нильпотентном случае проведено недавно L. A. Cordero, M. Fernández и L. Ugarte [5]. Показано, что для псевдокэлеровой структуры (J, ω) на шестимерной нильпотентной группе Ли комплексная структура J должна быть нильпотентной, а на некоторых группах Ли – абелевой. В работе [6] показано, что левоинвариантные псевдокэлеровы метрики на нильпотентной группе Ли являются Риччи-плоскими, но многие из них неплоские.

В следующей теореме алгебру Ли $\mathfrak{g}$ будем записывать в виде m-ки $(0, 0, d\theta^3, \ldots, d\theta^m)$, в которой используется сокращение записи $\theta^{ij} = \theta^i \wedge \theta^j$ как ij. Например, запись $(0, 0, 0, 12)$ обозначает алгебру Ли со структурными уравнениями: $d\theta^1 = 0$, $d\theta^2 = 0$, $d\theta^3 = 0$ и $d\theta^4 = \theta^1 \wedge \theta^2$. Кроме того, у каждой алгебры указан также ее номер в списке симплектических алгебр Ли работы M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina [7].

Теорема 3.1. ([5]) *Шестимерная нильпотентная неабелева алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает согласованную пару (J, ω) тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из алгебр следующего списка:*

$\mathfrak{h}_{21} = (0, 0, 0, 0, 12, 14 + 25)$,
$\mathfrak{h}_{14} = (0, 0, 0, 12, 13, 14)$,
$\mathfrak{h}_{13} = (0, 0, 0, 12, 13, 14 + 23)$,
$\mathfrak{h}_{15} = (0, 0, 0, 12, 13, 24)$,
$\mathfrak{h}_{11} = (0, 0, 0, 12, 13 + 14, 24)$,
$\mathfrak{h}_{10} = (0, 0, 0, 12, 14, 13 + 42)$,
$\mathfrak{h}_{12} = (0, 0, 0, 12, 13 + 42, 14 + 23)$,
$\mathfrak{h}_{24} = (0, 0, 0, 0, 12, 34)$,
$\mathfrak{h}_{17} = (0, 0, 0, 0, 12, 14 + 23)$,
$\mathfrak{h}_{16} = (0, 0, 0, 0, 13 + 42, 14 + 23)$,
$\mathfrak{h}_{23} = (0, 0, 0, 0, 12, 13)$,
$\mathfrak{h}_{18} = (0, 0, 0, 12, 13, 23)$,
$\mathfrak{h}_{25} = (0, 0, 0, 0, 0, 12)$.

Для каждой алгебры Ли этого списка в работе [5] выбран пример нильпотентной комплексной структуры и для нее найдены согласованные симплектические формы. Естественнее опираться на классификационный список M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina [7], в котором приведены все симплектические 6-мерные алгебры Ли и показано, что каждая нильпотентная алгебра Ли симплектоизоморфна одной их алгебр этого списка. Таким образом, мы будем рассматривать алгебры Ли теоремы 3.1 с симплектической структурой из списка [7] и для них искать все согласованные комплексные структуры. Мы получим явные выражения комплексных структур и исследуем свойства кривизны. Оказывается, что существуют многопараметрические семейства таких комплексных структур. Однако все они имеют ряд общих свойств. А именно: ассоциированная псевдокэлерова метрика является Риччи-плоской, тензор Римана имеет нулевую псевдориманову норму, тензор Римана имеет несколько ненулевых компонент, зависящих, только от двух или, самое большее, трех параметров.

Для шестимерной нильпотентная алгебры Ли $\mathfrak{g}$, допускающей комплексную структуру, размерности ее возрастающей центральной последовательности $\mathfrak{g}_k$ могут быть: $(2, 4, 6)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$ и 6. Последовательность этих размерностей будем называть *типом алгебры Ли*. В списке алгебр Ли теоремы 3.1 алгебры Ли типа $(2, 4, 6)$ стоят в начале – семь первых алгебр Ли.

3.1 Алгебры Ли типа $(2, 4, 6)$

Рассмотрим нильпотентные алгебры Ли, у которых последовательность идеалов $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}$ имеет размерности $(2, 4, 6)$. Легко видеть, что такая алгебра Ли типа $(2, 4, 6)$ раскладывается в прямую сумму двумерных подпространств:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z},$$

обладающих свойствами:

- $\mathcal{Z} = \mathfrak{g}_1$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$,
- $\mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z} = \mathfrak{g}_2$,
- $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathcal{Z}$.

Будем далее считать, что в $\mathfrak{g}$ выбран базис $e_1, \ldots, e_6$ так, что $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ и $\{e_5, e_6\}$ – это базисы подпространств $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathcal{Z}$ соответственно.

Для любой нильпотентной комплексной структуры J на алгебре типа $(2, 4, 6)$ последовательность идеалов $\mathfrak{a}_k(J)$ совпадает с $\mathfrak{g}_k$, $k = 1, 2, 3$ и матрица J имеет вид (2). Кроме того, для такой комплексной структуры J имеем $C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}) = \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z} = \mathfrak{g}_2$.

Теорема 3.2. *Пусть шестимерная симплектическая алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \omega)$ имеет тип $(2, 4, 6)$ и*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z},$$

где $\mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z} = C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g})$ – абелева подалгебра. Предположим, что подпространства $\mathfrak{a}$ и $\mathcal{Z}$ – ω-изотропны и ω-дуальны, а на $\mathfrak{b}$ форма ω невырождена. Тогда для любой согласованной с ω комплексной структуры J и связности Леви-Чивита ∇ соответствующей псевдоримановой метрики g_J имеют место свойства:

- $\nabla_X Y \in \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{a}$,
- $\nabla_X Y \in \mathcal{Z}, \quad \forall X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}$,
- $\nabla_X Y = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{a}$. Если $\nabla_X Y$ имеет ненулевую компоненту из $\mathfrak{a}$, тогда существует вектор $JZ \in \mathcal{Z}$, такой, что $\omega(\nabla_X Y, JZ) \neq 0$. С другой стороны, $2\omega(\nabla_X Y, JZ) = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =$ $= \langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle =$ $= \omega([X,Y],JZ) = 0$, поскольку $\omega(C^1\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1(J)) = 0$. Пусть теперь $X \in \mathfrak{a}$ и $Y \in \mathfrak{b}$. Совершенно аналогично показывается, что $\nabla_X Y$ имеет нулевую компоненту из $\mathfrak{a}$. Предположим, что $\nabla_X Y$ имеет ненулевую компоненту из $\mathfrak{b}$. Тогда существует вектор $Z \in \mathfrak{b}$, что $JZ \in \mathfrak{b}$ и такой, что $\omega(\nabla_X Y, JZ) \neq 0$. В то же время, $2\omega(\nabla_X Y, JZ) = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =$ $= \langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle = \omega([X,Y],JZ) +$ $+ \omega([Z,X],JY) = 0$. Последнее равенство следует из того, что $Y, JY, Z, JZ \in \mathfrak{b} \subset C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g})$, тогда $[X,Y], [Z,X] \in \mathcal{Z}$ и $\omega(C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}), \mathcal{Z}) = 0$. Рассмотрим третье утверждение. Пусть $X, Y \in \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}$. Тогда для любого $Z \in \mathfrak{g}$, $2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =$ $= \langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle =$ $= \omega([Z,X],JY) + \omega([Z,Y],JX) = 0$ по тем же аргументам, что и в предыдущем пункте.

Следствие 3.3. *В предположениях теоремы 3.2, если вектор X лежит в идеале $\mathfrak{a}_2(J)$ алгебры Ли, то $R(X,Y)Z = R(Z,Y)X = 0$, $\forall Y, Z \in \mathfrak{g}$. Если согласованная комплексная структура J имеет вид (2), то кривизна $R(X,Y)$ ассоциированной метрики не зависит от свободных параметров ψ_{31}, ψ_{32}, ψ_{41}, ψ_{42}.*

Отметим, что параметры ψ_{ij} комплексной структуры J связаны тремя условиями: согласованность, интегрируемость и $J^2 = -1$. Поэтому некоторые из указанных выше параметров могут выражаться через другие. Если в результате среди ψ_{31}, ψ_{32}, ψ_{41}, ψ_{42} остались независимые параметры, то их можно считать нулевыми, поскольку от них кривизна не зависит. Напомним, что, согласно следствию 1.8, кривизна $R(X,Y)$ ассоциированной метрики не зависит также от свободных параметров ψ_{51}, ψ_{52}, ψ_{53}, ψ_{54}, ψ_{61}, ψ_{62}, ψ_{63}, ψ_{64}.

Следствие 3.4. *В предположениях теоремы 3.2 для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $R(X,Y)Z \in \mathcal{Z}$. Поэтому псевдориманова норма тензора Римана равна нулю. В соответствии с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}$ выберем базисе $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ и $\{e_5, e_6\}$. Тогда тензор кривизны может иметь с точностью до симметрий только четыре ненулевые компоненты $R^5_{1,2,1}$, $R^6_{1,2,1}$, $R^5_{1,2,2}$, $R^6_{1,2,2}$.*

Аналогичные утверждения имеют место для алгебр Ли типа (2,6). Алгебра Ли типа (4,6) является прямым произведением четырехмерной алгебры Ли и $\mathbb{R}^2$. Случай (3,6) является наиболее сложным.

Теперь рассмотрим все шестимерные нильпотентные алгебры Ли типа $(2,4,6)$. В соответствии с теоремой 3.1 имеется 7 таких алгебр Ли, которые допускают псевдокэлерову структуру. Напомним, что номер у каждой алгебры соответствует ее номеру в списке работы [7].

1. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{14}$. Рассмотрим шестимерную группу Ли G_{14}, которая имеет алгебру Ли $\mathfrak{h}_{14}$, определенную следующими коммутационными соотношениями: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_5$. Легко видеть, что она имеет тип (2,4,6), $\mathcal{Z} = \mathfrak{g}_1 = \{e_5, e_6\}$, $\mathfrak{g}_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}$. Согласно результатам [7], данная алгебра имеет три симплектических структуры:
$\omega_1 = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6$,
$\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6$,
$\omega_3 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$.

Левоинвариантные комплексные структуры на этой группе найдены в явном виде в работе Магнина [10] (алгебра $M1$). Показано, что группа Ли G_{14} имеет 10 параметрическое семейство левоинвариантных комплексных структур. Прямая проверка согласованности семейства комплексных структур на G_{14} показывает, что для первых двух симплектических форм не существует согласованных комплексных структур. Для формы ω_3 согласованная комплексная структура зависит от 6 параметров и имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \psi_{11} & -\psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{42}\psi_{11}^2+\psi_{42}+2\psi_{41}\psi_{12}\psi_{11}}{\psi_{12}^2} & \psi_{41} & -\psi_{11} & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & 0 & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{12} & \psi_{11} & 0 & 0 \\ \psi_{51} & J_{52} & \psi_{42} & -\psi_{41} & \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{61} & \psi_{51} & \psi_{41} & \frac{\psi_{42}\psi_{11}^2+\psi_{42}+2\psi_{41}\psi_{12}\psi_{11}}{\psi_{12}^2} & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $J_{52} = \frac{2\psi_{11}\psi_{43}\psi_{42}\psi_{41} - 2\psi_{11}\psi_{43}^2\psi_{51} + \psi_{42}^2\psi_{11}^2 + \psi_{42}^2 + \psi_{43}^2\psi_{41}^2 - \psi_{43}^2\psi_{61}^2}{(\psi_{11}^2+1)\psi_{43}}$.

Тензор кривизны метрики $g(X,Y) = \omega_3(X, JY)$ имеет, с точностью до симметрий, четыре ненулевых компоненты: $R^5_{1,2,1} = -\frac{(\psi_{11}^2+1)\psi_{11}}{\psi_{12}}$, $R^5_{1,2,2} = \psi_{11}^2 + 1$, $R^6_{1,2,2} = -\frac{(\psi_{11}^2+1)\psi_{11}}{\psi_{12}}$, $R^6_{1,2,1} = \frac{(\psi_{11}^2+1)^2}{\psi_{12}^2}$. Мы видим, что тензор кривизны зависит только от двух параметров ψ_{11} и ψ_{12}, что вполне соответствует теореме 3.2 и следствиям 3.3 и 1.8. После опускания индекса, получаем одну компоненту кривизны $R_{1,2,1,2} = \frac{1+\psi_{11}^2}{\psi_{12}}$. Параметры ψ_{ij} метрического тензора g и комплексной структуры J, которые на кривизну не влияют, естественно считать нулевыми.

Определение. *Пусть $(g(\psi), J(\psi))$ – многопараметрическое семейство псевдокэлеровых структур. Пседокэлерову структуру (g, J) на группе Ли G будем называть полуканонической, если метрический тензор g_{ij} зависит только от тех параметров ψ, которые влияют на кривизну R_{ijk}^l. Канонической будем называть такую псевдокэлерову структуру (g, J) на группе Ли G, у которой метрический тензор g_{ij} зависит только от тех параметров, которые влияют на кривизну R_{ijkl}.*

Тогда получаем следующую полуканоническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g(X,Y) = \omega(X, JY)$ на группе G_{14}:

$J(e_2) = -\psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,
$J(e_3) = -\psi_{11}\, e_3 + \psi_{12}\, e_4$,
$J(e_6) = \psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

Каноническая псевдокэлерова метрика:

$$g=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{11} & \psi_{12} \\ 0 & 0 & \psi_{12} & \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{11} & \frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & \psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{21}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_6$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{21}$ имеет две симплектических структуры [7]. Прямая проверка показывает, что для первой структуры $\omega_1 = e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^4 - e^3\wedge e^4 - e^3\wedge e^5$ нет согласованных комплексных структур. Рассмотрим вторую симплектическую структуру

$$\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4.$$

Имеется многопараметрическое семейство согласованных комплексных структур. С учетом результатов теоремы 3.2 и следствий 3.3 и 1.8, прямыми вычислениями получаем, что тензор кривизны ассоциированной метрики $g(X,Y) = \omega(X, JY)$ зависит от двух параметров ψ_{11} и $\psi_{12} \neq 0$ и имеет следующие ненулевые компоненты: $R_{1,2,1}^6 = 1 + \psi_{11}^2$, $R_{1,2,2}^6 = \psi_{12}\psi_{11}$, $R_{1,2,1}^5 = \psi_{12}\psi_{11}$, $R_{1,2,2}^5 = \psi_{12}^2$. Поэтому полуканоническая комплексная структуру задается следующим образом:

$J(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,
$J(e_4) = -\psi_{12}\, e_3 - \psi_{11}\, e_4$,
$J(e_6) = -\psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

При опускании индекса получается всего одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента тензора кривизны $R_{1,2,1,2} = -\psi_{12}$. Тогда, полагая $\psi_{12} = -a \neq 0$ и $\psi_{11} = 0$, получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику кривизны $R_{1,2,1,2} = a$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{21}$:

$J(e_2) = -a\, e_1,\ J(e_4) = a\, e_3,\ J(e_6) = a\, e_5$,

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ -a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{13}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_6$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{13}$ имеет [7] три симплектических структуры. Левоинвариантные комплексные структуры на этой группе найдены в явном виде в работе Магнина [10] (алгебра $M6$). Для использования результатов Магнина переобозначим векторы базиса $e_3 := -e_3$, $e_5 := -e_5$ и получаем коммутационные соотношения в списке Магнина: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = -e_6$. Симплектические структуры:

$\omega_1 = e^1 \wedge e^6 - \lambda e^2 \wedge e^5 - (\lambda - 1) e^3 \wedge e^4$,
$\omega_2 = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^5$,
$\omega_3 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 - \frac{1}{2} e^2 \wedge e^5 + \frac{1}{2} e^3 \wedge e^4$.

Первый случай. Рассмотрим форму $\omega_1 = e^1 \wedge e^6 - \lambda e^2 \wedge e^5 - (\lambda - 1) e^3 \wedge e^4$. Имеется многопараметрическое семейство согласованных комплексных структур. С учетом результатов теоремы 3.2 и следствий 3.3 и 1.8, прямыми вычислениями получаем, что тензор кривизны ассоциированной метрики $g_1(X,Y) = \omega_1(X, J_1 Y)$ зависит от двух параметров ψ_{11} и $\psi_{12} \neq 0$ и имеет следующие ненулевые компоненты: $R_{1,2,2}^6 = \frac{(3\lambda-1)\psi_{12}\psi_{11}}{\lambda-1}$, $R_{1,2,2}^5 = -\frac{(1+\lambda)(3\lambda-1)\psi_{12}^2}{\lambda(\lambda-1)}$, $R_{1,2,1}^6 = \frac{(3\lambda-1)(1+\psi_{11}^2)}{\lambda^2-1}$, $R_{1,2,1}^5 = -\frac{(3\lambda-1)\psi_{12}\psi_{11}}{\lambda(\lambda-1)}$. Поэтому полуканоническая комплексная структура задается следующим образом: $J_1(e_2) = (1 + \lambda)\psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$, $J_1(e_4) = \psi_{12}\, e_3 - \psi_{11}\, e_4$, $J_1(e_6) = \frac{(1+\lambda)\psi_{12}}{\lambda}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$. Соответствующая псевдокэлерова метрика находится по формуле $g_1 = \omega_1 \circ J_1$.

После опускания индекса получается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = -\frac{(3\lambda-1)\psi_{12}}{\lambda-1}$. Тогда, полагая $\psi_{12} = a \neq 0$ и $\psi_{11} = 0$, получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику кривизны $R_{1,2,1,2} = -\frac{(3\lambda-1)a}{\lambda-1}$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{13}$:

$J_1(e_2) = (1 + \lambda) a\, e_1,\ J(e_4) = a\, e_3$,
$J(e_6) = \frac{(1+\lambda)a}{\lambda}\, e_5$,
$g_1(X,Y) = \omega_1(X, J_1 Y)$.

Второй случай. Для симплектической формы $\omega_2 = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^5$ нет согласованных комплексных структур.

Третий случай. Симплектическая структура: $\omega_3 = e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^4 - \frac{1}{2} e^2\wedge e^5 + \frac{1}{2} e^3\wedge e^4$. Тензор кривизны зависит от двух параметров ψ_{11} и ψ_{12}:

$R^5_{1,2,2} = \frac{4\psi_{12}^2}{3}$, $R^5_{1,2,1} = \frac{4\psi_{12}\psi_{11}}{3}$, $R^6_{1,2,2} = -\frac{2\psi_{12}\psi_{11}}{3}$, $R^6_{1,2,1} = -\frac{2(1+\psi_{11}^2)}{3}$. Поэтому полуканоническая комплексная структуру задается следующим образом:

$J_3(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2,$

$J_3(e_3) = \psi_{11}\, e_3 - 3\frac{{\psi_{11}}^2+1}{2\,\psi_{12}}\, e_4 - 3\frac{{\psi_{11}}^2+1}{\psi_{12}}\, e_5,$

$J_3(e_4) = \frac{2\psi_{12}}{3}\, e_3 - \psi_{11}\, e_4 - 4\,\psi_{11}\, e_5 + \frac{{\psi_{11}}^2+1}{\psi_{12}}\, e_6,$

$J_3(e_6) = 2\,\psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6.$

Соответствующий метрический тензор получается по формуле $g_3(X,Y) = \omega_3(X, J_3Y)$. При опускании индекса получается всего одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента тензора кривизны $R_{1,2,1,2} = \frac{2\psi_{12}}{3}$. Тогда, полагая $\psi_{12} = -a \neq 0$ и $\psi_{11} = 0$, получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику кривизны $R_{1,2,1,2} = -\frac{2\,a}{3}$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{13}$ с J_3-инвариантными площадками $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_5, e_6\}$:

$J_3(e_2) = -a\, e_1,$

$J_3(e_3) = \frac{3}{2\,a}\, e_4 + \frac{3}{a}\, e_5,$

$J_3(e_4) = -\frac{2a}{3}\, e_3 - \frac{1}{a}\, e_6,$

$J_3(e_6) = -2\,a\, e_5,$

$$g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \frac{3}{4a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{a}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{15}$. Коммутационные соотношения: $[e^1, e^2] = e^4$, $[e^1, e^3] = e^6$, $[e^2, e^4] = e^5$. Группа Ли имеет [7] три симплектические структуры:

$\omega_1 = e^1 \wedge e^6 - e^1 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4,$

$\omega_2 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5,$

$\omega_3 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4.$

Это алгебра Ли $M7$, рассмотренная в работе Магнина [10]. Чтобы увидеть это, сделаем замену: $e_1 := E_2$, $e_2 := -E_1$, $e_5 := -E_6$, $e_6 := E_5$. Тогда $[E_1, E_2] = E_4$, $[E_1, E_3] = E_6$, $[E_2, E_4] = E_5$. Симплектические структуры принимают вид:

$\omega_1 = E^1 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 + E^3 \wedge E^4,$

$\omega_2 = -E^1 \wedge E^4 + E^2 \wedge E^5 - E^3 \wedge E^6,$

$\omega_3 = E^1 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 - E^3 \wedge E^4.$

Первый случай. Симплектическая структура: $\omega_1 = E^2 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 + E^1 \wedge E^6 + E^3 \wedge E^4$

Тензор кривизны зависит от двух параметров ψ_{11} и ψ_{12}. После опускания индекса остается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = -\frac{\psi_{11}^4 + \psi_{11}^3\,\psi_{12} + 2\,\psi_{11}^2 - 2\,\psi_{12}^2\,\psi_{11}^2 + \psi_{11}\,\psi_{12} + 1}{\psi_{12}\,(-2\,\psi_{11}\psi_{12} + 1 + \psi_{11}^2)}$. Поэтому каноническая комплексная структура J_1 задается следующим образом:

$J_1(E_2) = \psi_{12}\, E_1 - \psi_{11}\, E_2,$

$J_1(E_4) = \frac{1 + 2\,{\psi_{11}}^2 + {\psi_{11}}^4}{\psi_{12}\,(-2\,\psi_{11}\,\psi_{12} + 1 + {\psi_{11}}^2)}\, E_3 +$

$+ \frac{{\psi_{11}}^3 - {\psi_{11}}^2\psi_{12} + \psi_{11} + \psi_{12}}{-2\,\psi_{11}\,\psi_{12} + 1 + {\psi_{11}}^2}\, E_4,$

$J_1(E_5) = -\frac{-\psi_{11}\,\psi_{12} + 1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}\, E_5 + \frac{1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}\, E_6.$

Метрический тензор псевдокэлеровой структуры находится по формуле $g_1 = \omega_1 \circ J_1$.

Второй случай. Нет комплексных структур, согласованных с формой ω_2.

Третий случай. Симплектическая структура $\omega_3 = E^1 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 - E^3 \wedge E^4$

Тензор кривизны зависит от двух параметров ψ_{11} и ψ_{12}. После опускания верхнего индекса остается одна компонента $R_{1,2,1,2} = -\frac{3 + 4\,\psi_{11}\psi_{12} - 8\,\psi_{11}^2\psi_{12}^2 + 4\,\psi_{12}\psi_{11}^3 + 6\,\psi_{11}^2 + 3\,\psi_{11}^4}{8\,\psi_{11}\psi_{12}^2}$. Тогда получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{15}$:

$J_3(E_2) = \psi_{12}\, E_1 - \psi_{11}\, E_2,$

$J_3(E_3) = \frac{1 - {\psi_{11}}^2}{2\,\psi_{11}}\, E_3 + \frac{{\psi_{12}}^2}{2\,\psi_{11}}\, E_4,$

$J_3(E_6) = -\psi_{12}\, E_5 - \psi_{11}\, E_6.$

Ненулевые компоненты метрического тензора: $g_{15} = \frac{1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}$, $g_{16} = -\psi_{11}$, $g_{25} = \psi_{11}$, $g_{26} = -\psi_{12}$, $g_{33} = -\frac{{\psi_{12}}^2}{2\,\psi_{11}}$, $g_{34} = \frac{1 - {\psi_{11}}^2}{2\,\psi_{11}}$, $g_{44} = -\frac{1 + 2\,{\psi_{11}}^2 + {\psi_{11}}^4}{2\,{\psi_{12}}^2\psi_{11}}$.

5. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{11}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_6$, Это алгебра Ли $M8$, рассмотренная в работе Магнина [10]. Симплектическая структура:

$\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4 + \lambda e^2 \wedge e^6$

Тензор кривизны зависит от параметра λ и еще двух параметров ψ_{11} и $\psi_{12} \neq 0$. Согласованная комплексная структура имеет J-инвариантные площадки $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ и $\{e_5, e_6\}$, однако ее вид является достаточно сложным:

$J(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2,$

$J(e_3) = -\frac{2\,{\psi_{12}}^2 - 3\,\psi_{11}\,\lambda\,\psi_{12} + \lambda^2(1 + {\psi_{11}}^2)}{\lambda\,\psi_{12}}\, e_3 +$

$+ \frac{{\psi_{12}}^2 - 2\,\psi_{11}\,\lambda\,\psi_{12} + \lambda^2(1 + \psi_{11}^2)}{\lambda\,\psi_{12}}\, e_4,$

$J(e_5) = \frac{\psi_{11}\,\psi_{12} - \lambda(1 + \psi_{11}^2)}{\psi_{12}}\, e_5 + \frac{1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}\, e_6.$

Псевдокэлерова метрика находится по формуле $g = \omega \circ J$.

При опускании индекса тензора кривизны получается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = -\frac{\lambda^2(\psi_{11}^2 + 1) - 5\lambda\psi_{12}\,\psi_{11} + 4\psi_{12}^2}{\lambda\psi_{12}}$.

6. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{10}$. Коммутационные соотношения: $[e^1, e^2] = e^4$, $[e^1, e^4] = e^5$, $[e^1, e^3] = e^6$, $[e^2, e^4] = e^6$, Симплектическая структура: $\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^6$.

Тензор кривизны зависит от двух параметров ψ_{11} и $\psi_{12} \neq 0$. Тогда получаем следующую каноническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g = \omega \circ J$:

$J(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2,$

$J(e_3) = -\frac{\psi_{12} + 3\,{\psi_{11}}^2\psi_{12} + 2\,{\psi_{12}}^2\psi_{11} + \psi_{11} + {\psi_{11}}^3}{2\,{\psi_{12}}^2 + 2\,\psi_{12}\,\psi_{11} + 1 + {\psi_{11}}^2}\, e_3 -$

$- \frac{({\psi_{12}}^2 + 2\,\psi_{12}\,\psi_{11} + 1 + {\psi_{11}}^2)\psi_{12}}{2\,{\psi_{12}}^2 + 2\,\psi_{12}\,\psi_{11} + 1 + {\psi_{11}}^2}\, e_4,$

$J(e_5) = \frac{\psi_{12}\,\psi_{11} + 1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}\, e_5 + \frac{1 + \psi_{11}^2}{\psi_{12}}\, e_6.$

При опускании индекса получается одна ненулевая компонента тензора Римана $R_{1,2,1,2} =$

$= \frac{{\psi_{11}}^4 + 4\,\psi_{12}\,{\psi_{11}}^3 + 3\,{\psi_{11}}^2{\psi_{12}}^2 + 2\,{\psi_{11}}^2 + 4\,\psi_{11}\,\psi_{12}}{\psi_{12}\,(2\,{\psi_{12}}^2 + 2\,\psi_{11}\,\psi_{12} + 1 + {\psi_{11}}^2)} +$

$+\frac{-2\,\psi_{11}\,\psi_{12}{}^3+3\,\psi_{12}{}^2+1-2\,\psi_{12}{}^4}{\psi_{12}\,(2\,\psi_{12}{}^2+2\,\psi_{11}\,\psi_{12}+1+\psi_{11}{}^2)}$.

7. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{12}$. Коммутационные соотношения $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_1,e_3]=e_6$, $[e_2,e_3]=-e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$. Симплектическая структура $\omega=\lambda e^1\wedge e^5+e^2\wedge e^6+(\lambda+1)e^3\wedge e^4$ Это алгебра Ли $M10$, рассмотренная в работе Магнина [10]. Сделаем замену $e_1=-E_1$, $e_2=E_2$, $e_3=-E_4$, $e_4=-E_3$, $e_5=E_5$, $e_6=E_6$, для приведения коммутационных соотношений к виду $M10$: $[E_1,E_2]=E_3$, $[E_1,E_3]=E_5$, $[E_1,E_4]=E_6$, $[E_2,E_4]=E_5$, $[E_2,E_3]=-E_6$. Тогда симплектическая структура принимает вид

$\omega=-\lambda E^1\wedge E_5+E^2\wedge E^6+(\lambda+1)E^3\wedge E^4$.

В этом случае получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику $g=\omega\circ J$, зависящую от λ и от одного параметра $\psi_{12}\neq 0$:

$J(e_1)=-\frac{1}{\psi_{12}}\,e_2,\quad J(e_2)=\psi_{12}\,e_1,$

$J(e_3)=-\frac{\psi_{12}{}^2\lambda-1}{(\lambda-1)\psi_{12}}\,e_4,\quad J(e_4)=\frac{(\lambda-1)\psi_{12}}{\psi_{12}{}^2\lambda-1}\,e_3,$

$J(e_5)=\lambda\,\psi_{12}\,e_6,\quad J(e_6)=-\frac{1}{\lambda\,\psi_{12}}\,e_5.$

Тензор кривизны имеет следующие ненулевые компоненты: $R^6_{1,2,2}=\frac{\lambda(\psi_{12}^2(3\lambda+1)-\lambda-3)}{\lambda^2-1}$, $R^5_{1,2,1}=-\frac{3\psi_{12}^2\lambda-\lambda-3+\psi_{12}^2}{(\lambda^2-1)\psi_{12}^2}$. После опускания индекса остается одна компонента $R_{1,2,1,2}=-\frac{(3\lambda\psi_{12}^2-\lambda-3+\psi_{12}^2)\lambda}{(\lambda^2-1)\psi_{12}}$.

3.1 Алгебры Ли типа $(2,6)$

Имеется три алгебры данного типа.

8. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{24}$. Коммутационные соотношения $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_5$. Двухступенно нильпотентная алгебра Ли. Прямое произведение двух трехмерных алгебр Гейзенберга $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_3\times\mathfrak{h}_3$ Центр и первый производный идеал: $\mathcal{Z}=\{e_5,\ e_6\}=C^1(\mathfrak{g})$. Симплектическая структура: $\omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4$.

Тензор кривизны зависит от двух параметров $\psi_{11}\neq 0$ и $\psi_{12}\neq 0$. Поэтому получаем следующую полуканоническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g=\omega\circ J$:

$J(e_2)=\psi_{12}\,e_1-\psi_{11}\,e_2,$

$J(e_4)=\frac{\psi_{12}^2}{2\psi_{11}}\,e_3-\frac{\psi_{11}^2-1}{2\,\psi_{11}}\,e_4,$

$J(e_6)=-\psi_{12}\,e_5-\psi_{11}\,e_6.$

Ненулевые компоненты тензора кривизны: $R^6_{1,2,2}=-\psi_{11}^2$, $R^6_{1,2,1}=-\frac{(1+\psi_{11}^2)\psi_{11}}{\psi_{12}}$, $R^5_{1,2,2}=-\psi_{12}\psi_{11}$, $R^5_{1,2,1}=-\psi_{11}^2$. При опускании индекса получается всего одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента тензора кривизны $R_{1,2,1,2}=\psi_{11}$. Тогда, полагая $\psi_{12}=1$ и $\psi_{11}=b$, получаем следующую каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2}=b$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{24}$:

$J(e_2)=e_1-b\,e_2,$

$J(e_4)=\frac{1}{2b}\,e_3-\frac{b^2-1}{2\,b}\,e_4,$

$J(e_6)=-\,e_5-b\,e_6.$

$g(X,Y)=\omega(X,JY.$

9. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{17}$. Коммутационные соотношения: $[e^1,e^3]=e^5$, $[e^1,e^4]=e^6$, $[e^2,e^3]=e^6$, Двустепенно нильпотентная, $\mathcal{Z}=\{e_5,e_6\}=C^1(\mathfrak{g})$. Симплектическая структура:

$\omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4$

Тензор кривизны зависит от двух параметров $\psi_{12}\neq 0$ и ψ_{11}. Поэтому получаем следующую полуканоническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g=\omega\circ J$:

$J(e_2)=\psi_{12}\,e_1-\psi_{11}\,e_2,$

$J(e_4)=-\frac{\psi_{12}}{2}\,e_3-\psi_{11}\,e_4,$

$J(e_6)=-\psi_{12}\,e_5-\psi_{11}\,e_6.$

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^5_{1,2,1}=\psi_{11}\psi_{12}$, $R^6_{1,2,1}=1+\psi_{11}^2$, $R^5_{1,2,2}=\psi_{12}^2$, $R^6_{1,2,2}=\psi_{11}\psi_{12}$. При опускании индекса получается всего одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента тензора кривизны $R_{1,2,1,2}=-\psi_{12}$. Тогда полагая $\psi_{12}=a$ и $\psi_{11}=0$, получаем следующую каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2}=-a$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{24}$:

$$g=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1/a&0\\0&0&0&0&0&-a\\0&0&2/a&0&0&0\\0&0&0&a/2&0&0\\1/a&0&0&0&0&0\\0&-a&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

10. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{16}$. Комплексная алгебра Гейзенберга. Коммутационные соотношения: $[e_1,e_2]=e_5$, $[e_1,e_3]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_3,e_4]=-e_5$. Имеет [7] две симплектические структуры:

$\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^3-e^4\wedge e^5,$

$\omega_2=e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^3+e^4\wedge e^5.$

Это алгебра $M5$, рассмотренная в работе Магнина [10], поэтому сделаем замену: $e_1=E_1$, $e_2=E_3$, $e_3=E_4$, $e_4=E_2$, $e_5=E_5$, $e_6=E_6$. Новые коммутационные соотношения: $[E^1,E^3]=E^5$, $[E^1,E^4]=E^6$, $[E^2,E^3]=-E^6$, $[E^2,E^4]=E^5$. Симплектические структуры принимают вид:

$\omega_1=E^1\wedge E^6+E^3\wedge E^4-E^2\wedge E^5,$

$\omega_2=E^1\wedge E^6-E^3\wedge E^4+E^2\wedge E^5.$

Пусть $Z_1=\frac{1}{2}(E_1+iE_2)$, $Z_2=\frac{1}{2}(E_3-iE_4)$, $Z_3=\frac{1}{2}(E_5-iE_6)$, тогда коммутационные соотношения выражаются одной формулой $[Z_1,Z_2]=Z_3$. Оператор комплексной структуры J_0 комплексной алгебры Ли $M5$ действует следующим образом: $J_0(E_1)=-E_2$, $J_0(E_3)=E_4$, $J_0(E_5)=E_6$. Комплексная структура J_0 не согласована с формой $\omega_1=E^1\wedge E^6-E^2\wedge E^5+E^3\wedge E^4$, но согласована с формой $\omega_2=E^1\wedge E^6+E^2\wedge E^5-E^3\wedge E^4$. При этом, псевдокэлерова метрика имеет матрицу:

$$g_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

и ненулевые компоненты тензора кривизны: $R^6_{1,2,1}=1$, $R^5_{1,2,2}=1$, $R_{1,2,1,2}=-1$.

Первый случай. Симплектическая структура: $\omega_1 = E^1 \wedge E^6 - E^2 \wedge E^5 + E^3 \wedge E^4$. Тензор кривизны зависит от двух параметров: $\psi_{12} \neq 0$ и ψ_{11}. Поэтому получаем следующую каноническую комплексную структуру J_1 и псевдокэлерову метрику $g_1 = \omega \circ J_1$:

$J_1(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,

$J_1(e_3) = -\frac{\psi_{11}\,(1+\psi_{11}{}^2-\psi_{12}{}^2)}{\psi_{12}{}^2+1+\psi_{11}{}^2}\, e_3 - \frac{2(1+\psi_{11}{}^2)\psi_{12}}{\psi_{12}{}^2+1+\psi_{11}{}^2}\, e_4$,

$J_1(e_6) = \psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^5_{1,2,1} = \frac{\psi_{11}(1+\psi_{11}^2+\psi_{12}^2)}{\psi_{12}}$, $R^5_{1,2,2} = 1 + \psi_{11}^2 + \psi_{12}^2$, $R^6_{1,2,1} = -\frac{(1+\psi_{11}^2)(1+\psi_{11}^2+\psi_{12}^2)}{\psi_{12}^2}$, $R^6_{1,2,2} = -\frac{\psi_{11}(1+\psi_{11}^2+\psi_{12}^2)}{\psi_{12}}$.

После опускания индекса остается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = \frac{1+\psi_{11}^2+\psi_{12}^2}{\psi_{12}}$.

Второй случай. Симплектическая структура: $\omega_2 = E^1 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 - E^3 \wedge E^4$. Одно из условий согласованности выражается равенством $\psi_{12}^2 = 1$. Далее пусть $\psi_{12} = 1$. Тогда полуканоническая комплексная структура действует следующим образом:

$J_2(e_2) = e_1$,

$J_2(e_4) = \psi_{34}\, e_3 - \psi_{33}\, e_4$,

$J_2(e_6) = -e_5$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^6_{1,2,1} = -\mathrm{sign}(\psi_{12})\psi_{34}$, $R^5_{1,2,2} = -\mathrm{sign}(\psi_{12})\psi_{34}$. После опускания индекса остается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = \mathrm{sign}(\psi_{12})\psi_{34}$. Полагая ψ_{33} и $\psi_{34} = a$, получаем (при $\psi_{12} = 1$) следующую каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2} = a$ на алгебре Ли $(\mathfrak{h}_{16}, \omega_2)$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученная комплексная структура является биинвариантной (комплексная группа Ли) только в том случае, когда $\psi_{33} = 0$ и $\psi_{34} = -1$, т. е. когда $J_2 = J_0$.

3.1. Алгебры Ли типа $(4, 6)$

В этом классе всего одна алгебра.

11. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{25}$. Алгебра Ли с одним коммутационным соотношением $[e_1, e_2] = e_3$. Алгебра Ли такого типа является прямым произведением трехмерной нильпотентной алгебры Ли Гейзенберга $\mathfrak{h}_3$ и $\mathbb{R}^3$. Симплектическая структура: $\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6$.

В этом случае имеется 8-параметрическое семейство согласованных комплексных структур и псевдокэлеровых метрик. Все метрики являются плоскими. Поэтому укажем только наиболее простые выражения без параметров:

$J(e_1) = e_2, \quad J(e_3) = e_4, \quad J(e_5) = e_6$.

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.1 Алгебры Ли типа $(3, 6)$

Имеется две алгебры Ли типа (3,6), допускающие псевдокэлерову структуру.

12. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{18}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_6$. Тогда $\mathcal{Z} = \mathfrak{g}_1 = \{e_4, e_5, e_6\}$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$. Согласно результатам [7], данная алгебра имеет три симплектических структуры:

$\omega_1(\lambda) = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^5 + (\lambda - 1)\, e^3 \wedge e^4$,

$\lambda \neq 0, 1$,

$\omega_2(\lambda) = e^1 \wedge e^5 + \lambda e^1 \wedge e^6 - \lambda e^2 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 - 2\lambda e^3 \wedge e^4$,

$\lambda \neq 0$,

$\omega_3 = -e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + 2e^3 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5$.

Это алгебра Ли $M3$ в классификации Магнина [10]. Поэтому для нахождения комплексных структур, согласованных с симплектическими формами воспользуемся результатами работы [10], где найдены в явном виде комплексные структуры на данной группе Ли. Укажем только такие псевдокэлеровы структуры, от параметров которых зависит тензор кривизны.

1. Первый случай. Симплектическая структура: $\omega_1 = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^5 + (\lambda - 1)e^3 \wedge e^4$. В этом случае согласованные комплексные структуры существуют только при $\lambda = -1$, т. е. для $\omega_1 = e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^5 - 2\, e^3 \wedge e^4$. Получаем следующую полуканоническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g = \omega \circ J$:

$J_1(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,

$J_1(e_4) = \psi_{34}\, e_3 - \psi_{33}\, e_4$,

$J_1(e_6) = \psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^6_{1,2,1} = -\frac{2\psi_{34}(1+\psi_{11}^2)}{\psi_{12}}$, $R^6_{1,2,2} = -2\psi_{11}\psi_{34}$, $R^5_{1,2,2} = 2\psi_{12}\psi_{34}$, $R^5_{1,2,1} = 2\psi_{11}\psi_{34}$. После опускания верхнего индекса получаем одну ненулевую компоненту, $R_{1,2,1,2} = 2\psi_{34}$. Полагая $\psi_{34} = a$, $\psi_{12} = 1$, $\psi_{11} = 0$ и $\psi_{33} = 0$, получаем каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2} = 2\, a$ на алгебре Ли $(\mathfrak{h}_{18}, \omega_1)$:

$J_1(e_2) = e_1, \quad J_1(e_4) = a\, e_3, \quad J_1(e_6) = e_5$.

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2\,a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Второй случай. Симплектическая структура: $\omega_2 = e^1 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 + \lambda e^1 \wedge e^6 - \lambda e^2 \wedge e^5 - 2\lambda e^3 \wedge e^4$. Из условий интегрируемости и согласованности следует, в частности, что $\psi_{12}^2 = 1$. Берем случай $\psi_{12}=1$. Тогда семейство согласованных комплексных структур принимает вид:

$J_2(e_2)=e_1$,

$J_2(e_4)=\psi_{34}\,e_3-\psi_{33}\,e_4$,

$J_2(e_6)=e_5$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^6_{1,2,2}=-\frac{2\lambda\psi_{34}}{\lambda^2+1}$, $R^6_{1,2,1}=-\frac{2\lambda^2\psi_{34}}{\lambda^2+1}$, $R^5_{1,2,1}=-\frac{2\lambda\psi_{34}}{\lambda^2+1}$, $R^5_{1,2,2}=\frac{2\lambda^2\psi_{34}}{\lambda^2+1}$. После опускания индекса получаем одну ненулевую компоненту, $R_{1,2,1,2}=2\lambda\psi_{34}$. Полагая $\psi_{34}=a$ и $\psi_{33}=0$, получаем каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2}=2a\lambda$ на алгебре Ли $(\mathfrak{h}_{18},\omega_2)$:

$J_2(e_2)=e_1,\quad J_2(e_4)=a\,e_3,\quad J_2(e_6)=e_5.$

$$g_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-\lambda&1\\0&0&0&0&-1&-\lambda\\0&0&\frac{2\lambda}{a}&0&0&0\\0&0&0&2\lambda a&0&0\\-\lambda&-1&0&0&0&0\\1&-\lambda&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

3. Третий случай.

$\omega_3=-e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+2e^3\wedge e^4+e^3\wedge e^5.$

В этом случае согласованная комплексная структура принимает вид:

$J_3(e_1)=\psi_{46}^{-1}e_3$,

$J_3(e_2)=-3\,\psi_{46}\,e_1-\psi_{25}^{-1}e_4+\psi_{25}^{-1}e_5$,

$J_3(e_3)=-\psi_{46}\,e_1$,

$J_3(e_4)=3\,\psi_{25}\,e_2-9\,\psi_{25}\,e_3+2\,\psi_{46}^{-1}e_6$,

$J_3(e_5)=\psi_{25}\,e_2-3\,\psi_{25}\,e_3+\psi_{46}^{-1}e_6$,

$J_3(e_6)=\psi_{46}\,e_4-3\,\psi_{46}\,e_5$.

Первый J-инвариантный идеал $\mathfrak{a}_1(J\cdot)$ порожден векторами e_6 и $\psi_{46}e_4-3\psi_{46}e_5$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^6_{1,2,1}=-\frac{6\psi_{25}}{\psi_{46}}$, $R^5_{1,2,2}=54\psi_{46}\psi_{25}$,

$R^5_{1,2,3}=18\psi_{46}\psi_{25}$, $R^4_{1,2,3}=-6\psi_{46}\psi_{25}$,

$R^6_{1,3,1}=-\frac{2\psi_{25}}{\psi_{46}}$, $R^5_{1,3,2}=18\psi_{46}\psi_{25}$,

$R^4_{1,2,2}=-18\psi_{46}\psi_{25}$, $R^4_{1,3,2}=-6\psi_{46}\psi_{25}$,

$R^5_{1,3,3}=6\psi_{46}\psi_{25}$, $R^4_{1,3,3}=-2\psi_{46}\psi_{25}$.

После опускания индекса получаем три ненулевых компоненты кривизны: $R_{1,2,1,3}=6\psi_{25}$, $R_{1,3,1,3}=2\psi_{25}$, $R_{1,2,1,2}=18\psi_{25}$.

Полагая $\psi_{25}=a$ и $\psi_{46}=1$, получаем каноническую псевдокэлерову метрику на алгебре Ли $(\mathfrak{h}_{18},\omega_3)$:

$$g_3=\begin{bmatrix}0&0&0&-2&-1&0\\0&2a^{-1}&0&0&0&-3\\0&0&0&0&0&-1\\-2&0&0&18a&6a&0\\-1&0&0&6a&2a&0\\0&-3&-1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

13. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{23}$. Коммутационные соотношения: $[e_1,e_2]=e_5$, $[e_1,e_3]=e_6$. Имеется [7] три различных симплектических структуры:

$\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4$,

$\omega_2=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^5$ и

$\omega_3=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^6-e^3\wedge e^5$.

Для первых двух симплектических структур не существует согласованных комплексных структур. Для третьей симплектической структуры ω_3 существует семейство согласованных комплексных структур, зависящих от нескольких параметров. Будет удобно перенумеровать базисные векторы следующим образом: $e_2:=e_1$, $e_3:=-e_2$, $e_1:=e_3$, тогда $[e_1,e_3]=-e_5$, $[e_2,e_3]=e_6$ и

$\omega_3=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4$.

Легко видеть, что данная алгебра Ли получается из $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}\{e_1,e_2,e_5,e_6\}$ полупрямым произведением с $\mathbb{R}e_3$ и затем прямым произведением с $\mathbb{R}e_4$, $\mathfrak{g}_{23}=\mathbb{R}^4\rtimes\mathbb{R}e_3\times\mathbb{R}e_4$.

Семейство комплексных структур, параметры которого влияют на кривизну, действует на инвариантных площадках $\{e_1,e_2\}$, $\{e_3,e_4\}$ и $\{e_5,e_6\}$ следующим образом:

$J\cdot(e_2)=\psi_{12}\,e_1-\psi_{11}\,e_2$,

$J\cdot(e_4)=\psi_{34}\,e_3-\psi_{33}\,e_4$,

$J\cdot(e_6)=-\psi_{12}\,e_5-\psi_{11}\,e_6$.

Тензор кривизны зависит от четырех параметров и имеет следующие ненулевые компоненты: $R^6_{1,2,1}=\frac{\psi_{34}(1+\psi_{11}^2)}{\psi_{12}}$, $R^5_{1,2,1}=\psi_{11}\psi_{34}$, $R^5_{1,2,2}=\psi_{12}\psi_{34}$. После опускания индекса остается одна компонента $R_{1,2,1,2}=-\psi_{34}$.

Полагая $\psi_{34}=-a$, $\psi_{12}=1$, $\psi_{11}=0$ и $\psi_{33}=0$, получаем каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2}=a$:

$J\cdot(e_2)=e_1,\quad J\cdot(e_4)=-a\,e_3,\quad J\cdot(e_6)=-e_5.$

$$g=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&a^{-1}&0&0&0\\0&0&0&a&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Литература

[1] Алексеевский, Д. В. *Строение однородных римановых пространств с нулевой кривизной Риччи* / Д. В. Алексеевский, Б. Н. Кимельфельд // Функц. анализ и его прил. – 1975. – Т. 9:2. – С. 5 – 11

[2] Andrada, A. *Product structures on four dimensional solvable Lie algebras* / A. Andrada, M. L. Barberis, I. G. Dotti, G. P. Ovando // Homology Homotopy Appl. – 2005. – Vol. 7. – P. 9 — – 37. (arXiv, math.RA/0402234).

[3] Benson, C. *Kähler and symplectic structures on nilmanifold* / C. Benson, C. S. Gordon // Topology. – 1988. – Vol. 27. – P. 513 – 518.

[4] Chu, B.-Y. *Symplectic homogeneous spaces* / B.-Y. Chu // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 197. – P. 145 – 159,

[5] Cordero, L. A., Fernández M., Ugarte L. *Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras* / L. A. Cordero, M. Fernández, L. Ugarte // J. of Geom. and Phys. – 2004. – Vol. 50. – P. 115 – 137.

[6] Fino, A. *Families of strong KT structures in six dimensions* / A. Fino, M. Parton, S. Salamon

// [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:math/0209259v1 [math.DG], свободный.

[7] Goze, M. *Symplectic or contact structures on Lie groups* / M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina // Differential Geom. Appl. – 2004. – Vol. 21, no. 1. – P. 41 – 54.

[8] Корнев, Е. С. *Почти комплексные структуры и метрики на группах Ли размерности 4* / Е. С. Корнев. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010. – 156 стр.

[9] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии* / Ш. Кобаяси, К. Намидзу – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.

[10] Magnin, L. *Complex structures on indecomposable 6-dimensional nilpotent real Lie algebras* / L. Magnin // Int. J. of Algebra and Computation. – 2007. – Vol. 17, no. 1. – P. 77 – 113.

[11] Ovando, G. *Complex, symplectic and Kaehler structures on four dimensional Lie groups* / G. Ovando // Rev. U.M.A. – 2004. – Vol. 45(2). – P. 55 – 68. (arXiv:math/0309146v1 [math.DG])

[12] Ovando, G. *Invariant pseudo Kaehler metrics in dimension four* / G. Ovando // J. of Lie Theory. – 2006. – Vol. 16(2). – P. 371 – 391. (arXiv:math/0410232v1 [math.DG]).

[13] Salamon, S. M. *Complex structure on nilpotent Lie algebras* /S. M. Salamon // J. Pure Appl. Algebra. – 2001. – Vol. 157. – P. 311 – 333 (arXiv:math/9808025v2 [math.DG]).

[14] Thurston, W. P. *Some simple examples of symplectic manifolds* / W. P. Thurston // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 55, no. 2. – P. 467 – 468.

[15] Tralle, A. *Symplectic manifolds with no Kähler Structure* / A. Tralle, J. Oprea // Lect. Notes. in Math. – Vol. 1661. – Berlin Heidelberg: Springer, 1997.

УДК 514.76.2

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ РИМАНА-КАРТАНА

С. Е. Степанов, И. А. Гордеева

GEOMETRY OF RIEMANN-CARTAN MANIFOLDS

S. E. Stepanov, I. A. Gordeeva

Пространство Римана-Картана – это триплет $(M, g, \overline{\nabla})$, *где* (M, g) *– риманово n-мерное* $(n \geq 2)$ *многообразие с линейной связностью* $\overline{\nabla}$ *с ненулевым тензором кручения S, такой, что* $\overline{\nabla}g = 0$. *Рассматриваются свойства псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях* $(M, g, \overline{\nabla})$ *различных классов, а также теоремы исчезновения данных векторных полей.*

A Riemann-Cartan manifold is a triple $(M, g, \overline{\nabla})$, *where* (M, g) *is a Riemannian n-dimensional* $(n \geq 2)$ *manifold with linear connection* $\overline{\nabla}$ *having nonzero torsion S such that* $\overline{\nabla}g = 0$. *We consider properties of pseudo-Killing and pseudo-garmonic vector fields on some classes of these manifolds and vanishes theorems as corollaries of these properties*

Ключевые слова: многообразие Римана-Картана, связность с кручением, многообразие Вейтценбока, псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля.

Keywords: Riemann-Cartan manifold, linear connection, torsion, Weitzenböck manifold, pseudo-Killing and pseudo-garmonic vector fields.

1. Введение

Пространства Римана-Картана относятся к метрически-аффинным пространствам. Начало теории метрически-аффинных пространств было положено Э. Картаном в 1922 году (см. [8]), который предложил вместо связности Леви-Чивита ∇ в GRT (сокращенное от General Relativity Theory) рассматривать несимметричную линейную связность $\overline{\nabla}$, обладающую свойством метричности $\overline{\nabla}g = 0$. В результате пространство-время получало в дополнение к кривизне еще и ненулевое кручение S. Впоследствии в 1924 и 1925 годах им было опубликовано еще две работы (см. [9] и [10]) в развитие своей теории, которая получила в дальнейшем название Einstein-Cartan Theory of Gravity или сокращенно ECT (см., напр., [4]; [41]). Идея Э. Картана о несимметрической метрической связности почти сразу нашла отражение в известных монографиях по дифференциальной геометрии первой половины прошлого века (см. [12]; [13]; [61]; [62] и др.).

Вплоть до начала 60-х годов предложение Э. Картана о применении несимметрической метрической связности в GRT не находила поддержки у физиков-теоретиков. Толчком к изучению ECT послужили работы Т. Кибла (см. [23]) и Д. Сциямы (см. [36]), которые независимо друг от друга установили связь между кручением S связности $\overline{\nabla}$ и спин тензором материи s (spin tensor of matter). Впоследствии были найдены и другие физические приложения ECT (см., напр., [30] и [35] и др.). Так, например, установлено (см., [27]), что кручение S зависит от квантовых свойств материи, и поскольку кручение является частью метрической связности $\overline{\nabla}$, то и сама связность $\overline{\nabla}$, следовательно, зависит от квантовых свойств материи.

Впоследствии теория Эйнштейна-Картана была обобщена (см. [19]) за счет снятия требования метричности для линейной связности $\overline{\nabla}$. Новая теория получила название Metric-Affine Gauge Theory of Gravity, или сокращенно MAG (см. [21]; [41]).

Число работ, опубликованных в рамках ECT и MAG исчисляется уже сотнями, причем опубликованные результаты имеют в большей степени прикладной физический характер (см. обзоры [18]; [21]; [22]; [32]). Все исходные формулы новой теории были позаимствованы физиками из работ Э. Картана вместе с его методом, который сейчас так и называется "метод внешних форм Картана"(см. [65]). Также нетрудно проследить заимствования и из монографий по дифференциальной геометрии, например, из классических монографий И. Схоутена и Д. Стройка (см. [61]; [62]; [63]), изложение в которых ведется на тензорном языке. В итоге современные теории ECT и MAG излагаются на довольно причудливом языке, который соединяет в себе методы внешних форм и тензорного анализа одновременно.

В этом контексте характерна работа Мак Креа (см. [26]), где были выведены неприводимые относительно действия псевдоортогональной группы $O(q)$ разложения тензоров неметричности $Q = -\overline{\nabla}\, g$, кручения S и кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$, основные соотношения на которые были приведены еще в монографии И. Схоутена и Д. Стройка (см. [61]). Более того, идею своей статьи Мак Креа также позаимствовал из дифференциальной геометрии, где уже давно и хорошо известны неприводимые разложения тензоров кривизны R риманова и келерова многообразий, что нашло отражение уже и в монографиях (см. [20]; [24]; [49]и др.).

Другой результат Мак Креа о неприводимом разложении тензора кручения S является простым следствием более общего результата (см. [49], доклад XVI) о поточечно $O(q)$-неприводимом разложении соответствующего тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^2 M$, гладким сечением которого и является S.

Воспользовавшись результатом Мак Креа, целый коллектив авторов (см. [7]), так же, как это делалось не раз в римановой геометрии, но по другим поводам (см. [48] стр. 585-620; [16]; [17]; [42] и др.), за счет последовательного попарного обращения в нуль неприводимых компонент разложения тензора кручения S выделил 4 класса пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ и провел систематизацию результатов, полученных в рамках ECT для четырехмерного пространства $(M, g, \overline{\nabla})$. При этом авторами был учтен тот факт, что при задании локальной ориентации многообразия оператор Ходжа $* : \Lambda^p M \to \Lambda^{n-p} M$, который на многообразии в размерности n переводит внешние p-формы во внешние $(n-p)$-формы, действует в размерности 4 на внешних 2-формах, определяя естественное разложение $\Lambda^2 M = \Lambda^2_- M \oplus \Lambda^2_+ M$ для представления группы $SO(q)$, где $\Lambda^2_\pm M$ - пространства собственных 2-форм оператора Ходжа, соответствующие собственным значениям $+1$ или -1. В итоге вместо трех неприводимых компонент разложения, которые имеются у тензора S в размерностях n не равных 4, в размерности $n = 4$ их уже четыре.

Заметим здесь, что если последовательно применять отработанную в геометрии методику классификации (см. [48] стр. 585-620; [16]; [17]; [42]; и др.), то вместо выделенных трех классов, в реальности получается 14 классов пространств $(M, g, \overline{\nabla})$.

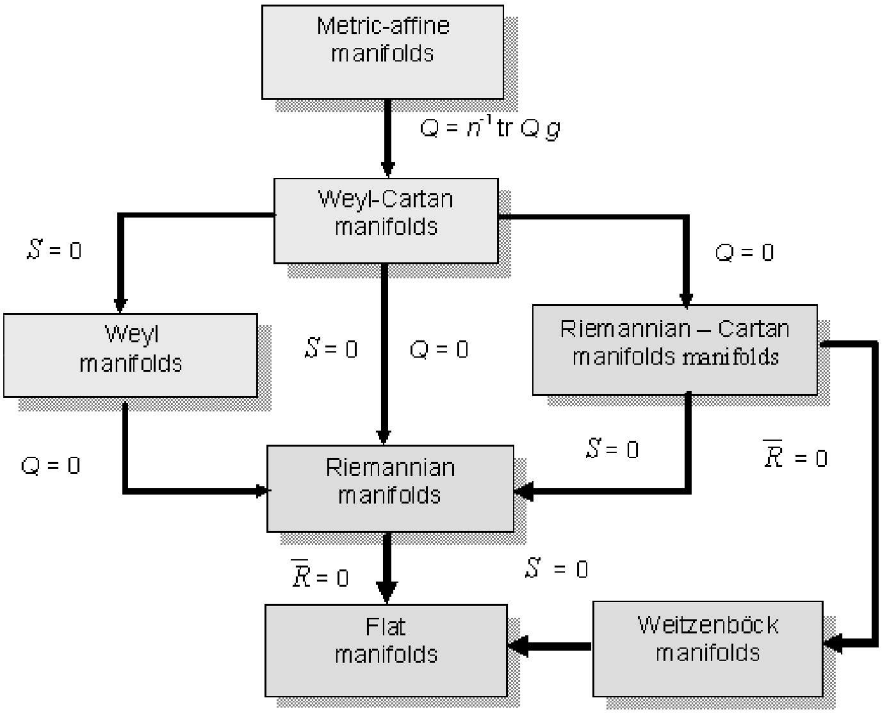
На контрасте со все увеличивающимся потоком работ физиков, геометры к настоящему времени почти потеряли интерес к теории, основы которой заложил еще в двадцатых годах прошлого века известный геометр Э. Картан. Наиболее яркими и, к сожалению, последними результатами геометрии пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ являются результаты Л. Ванхекке и Ф. Тричерри по геометрии многообразий с однородной структурой (см. [42]). В принятой современной физикой терминологии (см. [14]; [20]) эта теория относится к Riemann-Cartan Theory, сокращенно RCT. Геометрия Римана-Картана – это геометрия метрически-аффинного пространства $(M, g, \overline{\nabla})$ с (псевдо)римановой метрикой g и линейной связностью $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S, такой, что $Q = 0$. Но, в отличие от общей теории метрически-аффинных пространств, Л. Ванхекке и Ф. Тричерри (см. [42]) накладывали на $(M, g, \overline{\nabla})$ дополнительные условия в виде $\overline{\nabla} R = 0$ и $\overline{\nabla} T = 0$, которые, согласно теореме Амброуза-Зингера (см. [2]), вместе с условием $\overline{\nabla} g = 0$ дают критерий однородности риманова многообразия (M, g). Доказав теорему о неприводимом относительно действия ортогональной группы разложении тензора деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$, они, так же, как и в работах [16]; [17]; [42] и др.), перешли к классификации многообразий $(M, g, \overline{\nabla})$ с однородной структурой (см. [43]). В этой и последующих работах ими была изучена геометрия пространств из выделенных классов. Итоги исследований авторы подвели в монографии [42]. Отметим, что Л. Ванхекке и Ф. Тричерри как особый случай рассмотрели классификацию в размерности $n = 4$ (см. [44]).

Следует заметить, что результат Л. Ванхекке и Ф. Тричерри о неприводимом разложении тензора деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ является простым следствием более общего результата (см. [49], доклад XVI) о поточечно $O(q)$-неприводимом разложении соответствующего тензорного расслоения

$\Lambda^2 M \otimes T^* M$, гладким сечением которого и является тензор T.

Как это показано автором (см. [54]), классификация Л. Ванхекке и Ф. Тричерри равносильна классификации, полученной на основе неприводимого разложения тензора кручения S, притом, что последняя не предполагает обращения в нуль тензора неметричности Q, а потому является более общей и, следовательно, включает классификацию Л. Ванхекке и Ф. Тричерри.

Классификация различных типов изучаемых сейчас метрически-аффинных пространств в рамках MAG представлена составленной нами следующей диаграммой:



С большой степенью допущения к RCT можно отнести и теорию статистических многообразий (см. [3], с. 163 – 216), которые принято обозначать так же, как и метрически-аффинные пространства триплетами $(M, g, \overline{\nabla})$, где g – положительно определенная метрика, $S = 0$ и $Sym\ Q = Q$. Теория статистических многообразий нашла свое отражение в десятках статей и серии монографий (см. об этом в [11]).

Из всех видов аффинно-метрических пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ в геометрии последовательно в течение длительного времени изучались только четверть-симметрические метрические пространства и их частный вид полусимметрические метрические пространства (см. [5]; [28]; [29]; [37]; [39]; [46] и др.). Четверть-симметрические метрические пространства существуют в рамках RCT и ECT и выделяются дополнительным условием $T(X,Y) := U(X)p(Y) - V(Y)p(X) - g(U(X),Y)Z$, где $g(U(X),Y) = (Sym\ F)(X,Y)$, $g(V(X),Y) = (Alt\ F)(X,Y)$ для некоторого ковариантного 2-тензора F и $p(X) := g(Z,X)$. Полусимметрические метрические пространства определяются, в свою очередь, условием $T(X,Y) = U(Y)X - U(X)Y$ для любых векторных полей X, Y и Z на M. Они были введены в рассмотрение К. Яно (см. [46]) и продолжают вызывать интерес исследователей вплоть до последнего времени (см., например, [45]; [47]).

Геометрия "в целом"метрически-аффинных пространств застыла на результатах К. Яно, С. Бохнера и С. Гольдберга (см. [6]; [15]; [66]) середины прошлого века. В их работах в рамках RCT доказывались "теоремы исчезновения"(vanishing theorems) для псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров на компактных многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ с положительно определенным метрическим тензором g, выделяемых следующим условием $trace\ S = 0$ на тензор кручения S связности $\overline{\nabla}$. Даже несмотря на последующие попытки обобщения их результатов за счет введения в рассмотрение компактных метрически-аффинных пространств с границей (см. [25]; [33]), это по-прежнему было доказательство тех же теорем исчезновения для тех же векторных полей и тензоров.

При этом сформулированные в "теоремах исчезновения" (vanishing theorems) условия препятствия существованию псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров поражают своей громоздкостью, в отличие от аналогичных теорем для киллинговых и гармонических векторных полей и тензоров на римановых многообразиях (см. [66]). Упрощения условий препятствия удавалось достичь только для случая многообразий Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ с антисимметричным тензором кручения S связности $\overline{\nabla}$.

Нам удалось наметить пути модернизации этой техники, при этом первые полученные результаты, анонсированные на Международной конференции "Геометрия в Одессе - 2008"и на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в Суздале в 2008 году, имеют геометрически содержательный и компактный вид (см. [50] и [51]). В дальнейшем нами была продолжена работа по изучению свойств псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана различных классов. Полученные нами результаты изложены в работах [52] и [53].

2. Многообразия Римана-Картана

2.1. Определение. Под *многообразием Римана-Картана* будем понимать триплет $(M, g, \overline{\nabla})$, где пара (M, g) – (псевдо)риманово n-мерное ($n \geq 2$) многообразие и $\overline{\nabla}$ – линейная связность, обладающая ненулевым кручением S, такая, что $\overline{\nabla} g = 0$.

Поскольку на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ помимо связности $\overline{\nabla}$ существует связность Леви-Чивита ∇, однозначно присоединяемая к метрике g, то на $(M, g, \overline{\nabla})$ однозначно определяется тензорное поле $T = \overline{\nabla} - \nabla$, которое, согласно предположению

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) =$$

$$= -g(T(X, Y), Z) - g(T(X, Z), Y) = 0, \qquad (2.1)$$

является гладким сечением тензорного расслоения $TM \otimes \Lambda^2 M$. Из формулы непосредственно выводим:

$$g(T(Y, Z), X) =$$

$$= g(S(X, Y), Z) + g(S(X, Z), Y) + g(S(Y, Z), X) \qquad (2.2)$$

для тензора кручения

$$S(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) - T(Y, X)). \qquad (2.3)$$

Здесь и в дальнейшем X, Y, Z – произвольные гладкие векторные поля на M. При этом из (2.2) следует:

$$2\, trace\; S = trace\; T, \qquad (2.4)$$

где $(trace\; S)X := g(S(e_i, X), e_i)$ и $(trace\; T)X := = T(e_i, X, e_i)$ для ортонормированного базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ касательного пространства $T_x M$ в произвольной точке $x \in M$.

В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ произвольной карты (U, φ) многообразия M тензор кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$ имеет следующие компоненты (см. [60], стр. 130):

$$\overline{R}_{ijk}{}^l =$$

$$= R_{ijk}{}^l + \nabla_i T_{jk}{}^l - \nabla_j T_{ik}{}^l + T_{im}{}^l T_{jk}{}^m - T_{jm}{}^l T_{ik}{}^m, \qquad (2.5)$$

где $R_{ijk}{}^l$ и $T_{jk}{}^l$ – локальные компоненты тензоров кривизны связности Леви-Чивита ∇ и деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ и $i, j, k, l, m = 1, \ldots, n$.

Условие метричности $\overline{\nabla} g = 0$ связности $\overline{\nabla}$ приводит (см. [66], стр. 79 русского перевода) к следующим свойствам симметрии:

$$\overline{R}_{ijkl} = -\overline{R}_{ijlk}; \quad \overline{R}_{ijkl} = -\overline{R}_{jikl} \qquad (2.6)$$

для компонент $\overline{R}_{ijkl} = g_{lm} \overline{R}_{ijk}{}^m$ тензора $\overline{R}^\flat$, ассоциированного с тензором кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$. При этом тождествам Бианки, коим подчиняется тензор римановой кривизны, тензор $\overline{R}^\flat$ не удовлетворяет. Таким образом, справедлива

Лемма 2.1. *Тензор $\overline{R}^\flat$ связности $\overline{\nabla}$ многообразия Римана-Картана является гладким сечением тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$.*

Тензор Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ имеет следующие компоненты (см. [60], стр. 151):

$$\overline{Ric}_{ij} :=$$

$$= Ric_{ij} + \nabla_k T_{ij}{}^k - \nabla_i T_{kj}{}^k + T_{kl}{}^k T_{ij}{}^l - T_{ik}{}^l T_{lj}{}^k, \qquad (2.7)$$

где Ric_{ij} – локальные компоненты тензора Риччи связности Леви-Чивита ∇. Очевидно, что тензор Риччи $\overline{Ric}$ не является симметричным.

Приведем две различные классификации многообразий Римана-Картана.

2.2. Первый способ классификации многообразий Римана-Картана. Тензор кручения S связности $\overline{\nabla}$ является гладким сечением тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes TM$. В свою очередь, для тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes T^* M$, согласно теореме Ж.-П. Бургиньена, имеет место поточечно $O(n, \mathbf{R})$-неприводимое разложение

$$\Lambda^2 M \otimes T^* M \cong \wp_1(M) \oplus \wp_2(M) \oplus \wp_3(M),$$

где $\wp_1(M) = \Lambda^3 M$ и $\wp_2(M) = (C^\infty M \cdot g) \wedge T^* M$. При этом ортогональные проекции на компоненты этого разложения определяются равенствами (см., напр., [38]):

$${}^{(1)}S^\flat(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\wp_1(M)} S)(X, Y, Z) =$$

$$= 3^{-1}(S^\flat(X, Y, Z) + S^\flat(Y, Z, X) + S^\flat(Z, X, Y));$$

$${}^{(2)}S^\flat(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\wp_2(M)} S)(X, Y, Z) =$$

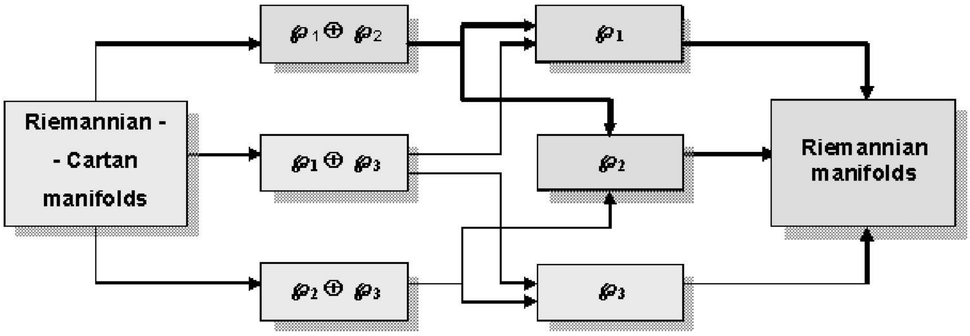
$$= g(X, Z)\theta(Y) - g(Y, Z)\theta(X);$$

$${}^{(3)}S^\flat(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\wp_3(M)} S)(X, Y, Z) =$$

$$= S^\flat(X, Y, Z) -{}^{(1)} S(X, Y, Z) -{}^{(2)} S(X, Y, Z),$$

где $S^\flat(X, Y, Z) := g(S(X, Y), Z)$ и $\theta := (n - 1)^{-1} trace\; S$.

Будем говорить, что многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, равно как и его присоединенная связность $\overline{\nabla}$, принадлежат классу $\wp_\alpha$ или $\wp_\alpha \oplus \wp_\beta$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $\alpha < \beta$, если в каждой точке $x \in M$ тензор $S^\flat$ является сечением соответствующего тензорного расслоения $\wp_\alpha(M)$ или $\wp_\alpha(M) \oplus \wp_\beta(M)$. Составим классификационную диаграмму включений:



Будем полагать $\overline{\nabla} \in \wp_1$, если $S_x \in \Lambda^3(T_x M)$ для всех $x \in M$. Такие связности рассматривал К. Яно (см. [66], стр. 78-92) с целью расширения области применения "техники Бохнера"и им же было доказано, что связности $\overline{\nabla} \in \wp_1$ естественным образом возникают в пространстве полупростой группы Ли (см. там же).

Будем полагать $\overline{\nabla} \in \wp_2$, если $S_x \in (\mathbf{R}g_x) \wedge T^*_x M$ для всех $x \in M$, или подробнее ${}^{(2)}S^\flat(X, Y, Z) = = g(X, Z)\theta(Y) - g(Y, Z)\theta(X)$, где $S^\flat(X, Y, Z) := = g(S(X, Y), Z)$ и $\theta := (n-1)^{-1} trace\ S$ для любых $X, Y, Z \in TM$. Этот класс состоит из *полусимметрических метрических связностей* (см. [46]).

Следующие классы несимметрических метрических связностей не были исследованы:

1) $\overline{\nabla} \in \wp_3$, что означает ${}^{(1)}S = 0$ и ${}^{(2)}S = 0$ или

$$S^\flat(Z, X, Y) + S^\flat(X, Y, Z) + S^\flat(Y, Z, X) = 0 \text{ и}$$

$$(trace\ S)X := g(S(e_i, X), e_i) = 0;$$

2) $\overline{\nabla} \in \wp_2 \oplus \wp_3$, что означает ${}^{(1)}S = 0$ или

$$S^\flat(Z, X, Y) + S^\flat(X, Y, Z) + S^\flat(Y, Z, X) = 0;$$

3) $\overline{\nabla} \in \wp_1 \oplus \wp_2$, что означает ${}^{(3)}S = 0$ или $S^\flat(X, Y, Z) = (AltS^\flat)(X, Y, Z) + + \frac{2}{n-1}((trace\ S)(Y)g(X, Z) - (trace\ S)(X)g(Y, Z))$, что равносильно следующим соотношениям

$$S^\flat(X, Y, Z) + S^\flat(X, Z, Y) =$$

$$= (n-1)^{-1}(g(X, Z)(trace\ S)(Y) -$$

$$-2g(Y, Z)(trace\ S)(X) - g(X, Y)(trace\ S)(Z));$$

4) $\overline{\nabla} \in \wp_1 \oplus \wp_3$, что означает ${}^{(2)}S = 0$ или

$$(trace\ S)X := g(S^\flat(e_i, X), e_i) = 0.$$

2.3. Второй способ классификации многообразий Римана-Картана. Тензор деформации $T^\flat$ является гладким сечением тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^2 M$ согласно теореме Ж. П. Бургиньена. Для тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^2 M$, согласно теореме Ж. П. Бургиньена, имеет место поточечно $O(n, \mathbf{R})$-неприводимое разложение

$$T^*M \otimes \Lambda^2 M \cong \Im_1(M) \oplus \Im_2(M) \oplus \Im_3(M),$$

где $\Im_1(M) = \Lambda^3 M$ и $\Im_2(M) = T^*M \wedge (C^\infty M \cdot g)$. При этом ортогональные проекции на компоненты этого разложения определяются равенствами (см., напр., [38]):

$${}^{(1)}T^\flat(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\Im_1(M)} T)(X, Y, Z) =$$

$$= 3^{-1}(T^\flat(X, Y, Z) + T^\flat(Y, Z, X) + T^\flat(Z, X, Y));$$

$${}^{(2)}T^\flat(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\Im_2(M)} T)(X, Y, Z) =$$

$$= g(X, Y)\omega(Z) - g(X, Z)\omega(Y);$$

$${}^{(3)}T^\flat(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\Im_3(M)} T)(X, Y, Z) =$$

$$= T^\flat(X, Y, Z) - {}^{(1)}T(X, Y, Z) - {}^{(2)}T(X, Y, Z),$$

где $T^\flat(X, Y, Z) := g(T(X, Y), Z)$ и $\omega := (n-1)^{-1} trace\ T$.

Будем говорить, что многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, равно как и его присоединенная связность $\overline{\nabla}$, принадлежат классу $\Im_\alpha$ или $\Im_\alpha \oplus \Im_\beta$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $\alpha < \beta$, если в каждой точке $x \in M$ тензор $T^\flat$ является сечением соответствующего тензорного расслоения $\Im_\alpha(M)$ или $\Im_\alpha(M) \oplus \Im_\beta(M)$.

Пространства $\Lambda^2 M \otimes T^*M$ и $T^*M \otimes \Lambda^2 M$, как и их неприводимые компоненты, изоморфны. Более того, связности $\overline{\nabla}$ классов $\wp_\alpha(M)$ и $\Im_\alpha(M)$, $\wp_\alpha(M) \oplus \wp_\beta(M)$ и $\Im_\alpha(M) \oplus \Im_\beta(M)$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $\alpha < \beta$ совпадают (см. [54]), а потому две эти классификации равносильны.

3. Примеры многообразий Римана-Картана

3.1. Однородные римановы многообразия. Рассмотрим *однородное риманово многообразие* (M, g), т. е. связное риманово многообразие (M, g), чья группа изометрий, т. е. преобразований, сохраняющих метрический тензор g, транзитивна.

Известно (см. [58], стр. 170), что каждое однородное риманово многообразие является полным. С другой стороны, согласно теореме Амброуза-Зингера (см. [2]), связное полное риманово многообразие (M, g) будет однородным тогда и только тогда, когда на нем можно задать тензорное поле T, как гладкое сечение тензорного расслоения $TM \otimes \Lambda^2 M$, такое, что $\overline{\nabla} R = 0$ и $\overline{\nabla} T = 0$ для связности $\overline{\nabla} = \nabla + T$. Из равенства (2.1) следует, что в этом случае $\overline{\nabla} g = 0$, а потому однородное риманово многообразие является примером многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$. Общую теорию однородных римановых многообразий и многочисленные примеры можно найти, например, в монографиях [48]; [59] и др.

3.2. Почти эрмитовы многообразия. В качестве второго примера рассмотрим *почти эрмитовое многообразие* ([59], стр. 139), которое определяется как триплет (M, g, J), где пара (M, g) – риманово $2m$-мерное многообразие с почти комплексной структурой J, которая является гладким сечением тензорного расслоения $TM \otimes T^*M$, совместимой с метрикой g, т. е. $J^2 = \mathrm{Id}_M$ и $g(J, J) = g$. Непосредственно проверяется, что $\overline{\nabla} g = 0$ для связности $\overline{\nabla} = \nabla + \nabla J$. Известна классификация почти эрмитовых многообразий (см. [17]), которая основана на поточечно $U(m)$-неприводимом разложении тензорного поля $\nabla \Omega$, где $\Omega(X, Y) := = g(X, JY)$ – *фундаментальная 2-форма* почти эрмитова многообразия (M, g, J) (см. [59], стр. 139). Перечислим некоторые из классов почти эрмитовых многообразий вместе с тождествами, их характеризующими.

Почти семи-келеровы многообразия выделяются условием $trace\ \nabla J = 0$ и представляют пример многообразий Римана-Картана класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ или соответственно $\wp_1 \oplus \wp_3$.

Почти-келеровы многообразия выделяются условием $d\Omega = 0$ и представляют пример многообразий Римана-Картана класса $\Im_2 \oplus \Im_3$ или соответственно $\wp_2 \oplus \wp_3$.

Приближенно келеровы многообразия выделяются условием $d\Omega = 3\nabla\Omega$ и представляют пример многообразий Римана-Картана класса $\Im_1$ или соответственно $\wp_1$.

3.3. Пример Э. Картана. Рассмотрим пример Э. Картана (см. [9]) многообразия с несимметрической метрической связностью. Пусть S^2 – сфера радиуса R без полюсов евклидова пространства E^3, ξ^1 – долгота и ξ^2 – широта точки сферы, тогда первая квадратичная форма сферы имеет вид: $ds^2 = R^2((cos^2\xi^2) d\xi^1 \otimes d\xi^1 + d\xi^2 \otimes d\xi^2)$, а метрический тензор g имеет компоненты: $g_{11} = R^2 cos^2\xi^2$, $g_{22} = R^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$. Тогда векторы $X_1 = \{(Rcos\xi^2)^{-1}; 0\}$ и $X_2 = \{0, R^{-1}\}$ будут единичными векторами в направлении "востока"и "севера". Полагаем, что в некоторой связности $\overline{\nabla}$ векторы X_1 и X_2 переносятся параллельно вдоль любого направления на сфере, т. е. $\overline{\nabla}_k X_1^j = = \partial_k X_1^j + \frac{1}{Rcos\xi^2} \overline{\Gamma}_{k1}^j = 0$ и $\overline{\nabla}_k X_2^j = \partial_k X_2^j + \frac{1}{R} \overline{\Gamma}_{k2}^j = 0$.

При $-\frac{\pi}{2} < \xi^2 < \frac{\pi}{2}$ отсюда последует: $\overline{\Gamma}_{21}^1 = -tg\xi^2$, а остальные символы Кристоффеля связности $\overline{\nabla}$ равны нулю, т. е. $\overline{\Gamma}_{kj}^i = 0$. При $n = 2$ тензор кривизны $\overline{R}$ обладает лишь одной существенной компонентой $\overline{R}_{1212}$. Остальные компоненты $\overline{R}_{ijkl}$ либо равны нулю, либо совпадают с ней с точностью до знака. А так как $\overline{\Gamma}_{21}^1$ единственная компонента из всех $\overline{\Gamma}$, отличная от нуля, и производная от нее по ξ^1 равна нулю, то $R_{1212} = 0$. Тогда все коэффициенты $\overline{R}_{kjl}^i = 0$ тензора кривизны $\overline{R}$, а единственным отличным от нуля компонентом тензора кручения S будет $S_{21}^1 = -S_{12}^1 = \frac{1}{2} tg\xi^2$.

Непосредственно проверяется выполнение условий $\overline{\nabla} g = 0$. Воспользуемся известным соотношением (см. [58], стр. 141)

$$\overline{\nabla}_i g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \overline{\Gamma}_{ij}^p g_{pk} - \overline{\Gamma}_{ik}^p g_{jp}$$

и подставим в него компоненты метрического тензора g.

$$\overline{\nabla}_1 g_{11} = \partial_1 g_{11} - \overline{\Gamma}_{11}^p g_{p1} - \overline{\Gamma}_{11}^p g_{1p} = \partial_1 (R^2 cos^2\xi^2) = 0,$$

$$\overline{\nabla}_2 g_{11} = \partial_2 g_{11} - 2\overline{\Gamma}_{21}^p g_{1p} =$$

$$= \partial_2 (R^2 cos^2\xi^2) + 2tg\xi^2 R^2 cos^2\xi^2 = 0,$$

$$\overline{\nabla}_1 g_{22} = \partial_1 g_{22} + 2\overline{\Gamma}_{12}^p g_{2p} = \partial_1 (R^2) = 0,$$

$$\overline{\nabla}_2 g_{22} = \partial_2 g_{22} + 2\overline{\Gamma}_{22}^p g_{2p} = \partial_2 (R^2) = 0,$$

$$\overline{\nabla}_1 g_{12} = \overline{\nabla}_1 g_{21} = \overline{\nabla}_2 g_{12} = \overline{\nabla}_2 g_{21} = 0.$$

Таким образом, $(S^2, g, \overline{\nabla})$ являет пример многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$. В дополнение, если $\overline{R} = 0$, тогда $\overline{\nabla}$ носит название *связности Вейтценбёка* или *абсолютного параллелизма.* Многомерные обобщения пространства $(S^2, g, \overline{\nabla})$ носят название пространств Вейтценбёка (см. [31]).

Пространство Вейтценбёка или пространство абсолютного параллелизма (см. [1], [14], [31]) – это пространство, которое допускает параллельное перенесение n произвольных векторных полей ξ^i с локальными компонентами $\xi_{(1)}^i, \xi_{(2)}^i, \ldots, \xi_{(n)}^i$ по любой кривой, то есть $\overline{\nabla}_k \xi_{(1)}^i = \overline{\nabla}_k \xi_{(2)}^i = \cdots = = \overline{\nabla}_k \xi_{(n)}^i = 0$. Дифференцируя и альтернируя последнее, получим условия интегрируемости, которые являются тождествами Риччи (см. [60], стр. 136)

$$2\overline{\nabla}_{[j} \overline{\nabla}_{k]} \xi^i = \overline{R}_{jkp}^i \xi^p - 2S_{jk}^p \overline{\nabla}_p \xi^i,$$

которые дают

$$\overline{R}_{jkp}^i \xi^p = 0.$$

Это условие должно удовлетворяться тождественно по отношению к выбору вектора ξ^p. Отсюда следует, что тензор кривизны равен нулю. И, обратно, если $\overline{R} = 0$, то существует n линейно независимых векторов ξ^i, являющихся решениями уравнения $\overline{\nabla}_k \xi^i_{(j)} = 0$. Таким образом, если матрица $\xi^i_{(j)}$ невырождена, то пространство не имеет кривизны. Если одновременно кручение также равно нулю, то пространство является плоским.

4. Скалярная и полная скалярная кривизны многообразия Римана-Картана. Теорема Грина

4.1. Теорема Грина. Пусть M – ориентированное n-мерное дифференцируемое многообразие. n-форма ω на M называется *элементом объема*, если $\omega(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n) > 0$ для каждой ориентированной локальной системы координат $x^1, \ldots, x^n$. Для каждого векторного поля X на M с фиксированным элементом объема ω *дивергенция поля* X, обозначаемая $\mathrm{div}X$, есть функция на M, определяемая так:

$$(\mathrm{div}X)\omega = L_X\omega,$$

где L_X – дифференцирование Ли в направлении X. Тогда справедлива теорема Грина

Теорема 4.1. *Пусть M – ориентированное компактное многообразие с фиксированным элементом объема $\omega = dv$. Для любого векторного поля X на M имеем*

$$\int_M \mathrm{div}X dv = 0.$$

На (псевдо)римановом многообразии (M, g) дивергенция произвольного гладкого векторного поля X находится по формуле $div\ X = trace\ \nabla X$. При этом, если многообразие (M, g) компактное и ориентированное, то классическая теорема Грина $\int_M (div\ X)dv = 0$ примет в этом случае вид

$$\int_M trace(\nabla X)\ dv = 0 \qquad (4.1)$$

для элемента объема $dv = \sqrt{|\det \mathrm{g}|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, найденного в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ произвольной карты (U, φ) многообразия (M, g) (см. [58], стр. 259-260). Если на многообразии M наряду со связностью Леви-Чивита ∇ задана линейная связность $\overline{\nabla}$, вообще говоря, с кручением, то $\overline{\nabla} = \nabla + T$ и $trace\ \overline{\nabla}X = trace\ \nabla X + (trace\ T)X$. Откуда на основании формулы (4.1) выводим:

$$\int_M (trace\ \overline{\nabla}X - (trace\ S)X)dv = 0. \qquad (4.2)$$

Равенство (4.2) является теоремой Грина для компактного ориентированного многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$.

4.2. Скалярная и полная скалярная кривизна многообразий Римана-Картана. Рассмотрим далее многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ с положительно определенным метрическим тензором g. Взяв за основу тензор кривизны $\overline{R}$ несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ и, воспользовавшись тем фактом, что $R^\flat \in C^\infty(\Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M)$, построим скалярный инвариант $\overline{s} = \sum_{i,j=1}^{n} g(\overline{R}(e_i, e_j)e_j, e_i)$, который по аналогии со скалярной кривизной s риманова многообразия (M, g) (см. [48], стр. 65) назовем *скалярной кривизной многообразия Римана-Картана* $(M, g, \overline{\nabla})$. Хорошо известно, что несимметрический тензор $\overline{Ric} = trace\overline{R}$ является тензором Риччи линейной несимметрической связности $\overline{\nabla}$. Следовательно, мы можем записать следующее тождество $\overline{s} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Ric}(e_i, e_i)$. В частности, для связности Вейтценбока $\overline{\nabla}$ мы имеем тождество $\overline{s} = 0$.

Зависимость между скалярными кривизнами s и $\overline{s}$ описывается в следующей лемме.

Лемма 4.1. *Скалярные кривизны $\overline{s}$ и s многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ и риманова многообразия (M, g) связаны равенством*

$$\overline{s} = s - \|{}^{(1)}T\|^2 - \frac{n-2}{2}\|{}^{(2)}T\|^2 + \frac{1}{2}\|{}^{(3)}T\|^2 - 2div(trace\ T^\flat) \qquad (4.3)$$

с неприводимыми компонентами ${}^{(1)}T$, ${}^{(2)}T$ и ${}^{(3)}T$ тензора T.

Кроме того, можно показать, что справедлива следующая

Лемма 4.2. *Скалярные кривизны $\overline{s}$ и s многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ и риманова многообразия (M, g) связаны равенством*

$$\overline{s} = s - \|{}^{(1)}S\|^2 - 2(n-2)\|{}^{(2)}S\|^2 + 2\|{}^{(3)}S\|^2 - 4div(trace\ S^\flat) \qquad (4.4)$$

с неприводимыми компонентами ${}^{(1)}S$, ${}^{(2)}S$ и ${}^{(3)}S$ тензора S.

Известно (см. [48], стр. 161), что полной скалярной кривизной компактного риманова многообразия (M, g) называется число $s(M) := \int_M s\ dv$. По аналогии сформулируем определение полной скалярной кривизны многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$.

Определение. *На компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ число $\overline{s}(M) = \int_M \overline{s}\ dv$ обозначает его полную скалярную кривизну.*

Зависимость между полными скалярными кривизнами $s(M)$ и $\overline{s}(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ описывается следующей теоремой, которая является следствием лемм 4.1., 4.2. и теоремы Грина для многообразий Римана-Картана.

Теорема 4.2. *Полные скалярные кривизны $s(M)$ и $\overline{s}(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ связаны равенством*

$$\overline{s}(M) = s(M) -$$

$$-\int_M (\|^{(1)}T\|^2 + \frac{n-2}{2}\|^{(2)}T\|^2 - \frac{1}{2}\|^{(3)}T\|^2)dv. \quad (4.5)$$

Для компонентов тензора кручения данное уравнение связи имеет вид:

$$\overline{s}(M) = s(M) -$$

$$-\int_M (\|^{(1)}S\|^2 + 2(n-2)\|^{(2)}S\|^2 - 2\|^{(3)}S\|^2)dv. \quad (4.6)$$

5. Характеристики многообразий Римана-Картана выделенных классов и теоремы исчезновения

5.1. Класс $\Im_1$. Рассмотрим многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1$, которое характеризуется условием $^{(2)}T = 0$ и $^{(3)}T = 0$ или ему равносильным

$$S(X, Y, Z) =$$

$$= 3^{-1}(S^{\flat}(X, Y, Z) + S^{\flat}(Y, Z, X) + S^{\flat}(Z, X, Y)).$$

Напомним, что пара связностей $\overline{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla} = \overline{\nabla} + 2S$ называется (см. [60], стр. 129) *взаимной*. Полагаем $S_{jk}^{\ \ i} = 2^{-1}(\overline{\Gamma}^i_{jk} - \overline{\Gamma}^i_{kj})$ для коэффициентов $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ связности $\overline{\nabla}$, найденных в локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ на M, тогда коэффициентами взаимных связностей будут $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ и $\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} - 2S_{jk}^{\ \ i}$. Из них можно построить коэффициенты $2^{-1}(\overline{\Gamma}^i_{jk} + \overline{\Gamma}^i_{kj})$ *средней связности* $\breve{\nabla}$ взаимной пары (см. там же).

Тогда справедлива

Теорема 5.1. *Для несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$, заданной на римановом многообразии (M, g) со связностью Леви-Чивита ∇, следующие четыре условия равносильны:*

1. $\overline{\nabla} \in \Im_1$;

2. $T_x^{\flat} \in \Lambda^3(T_x^* M)$ для тензора деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$;

3. средняя связность $\breve{\nabla}$ взаимной пары связностей $\overline{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla} = \overline{\nabla} + 2S$ является метрической;

4. геодезические линии связностей $\overline{\nabla}$ и ∇ совпадают.

Для многообразий данного класса справедлива

Теорема 5.2. *Скалярные кривизны $\overline{s}$ и s многообразий Римана (M, g) и Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1$ связаны неравенством $\overline{s} \geq s$, причем равенство возможно только в случае совпадения связности $\overline{\nabla}$ со связностью Леви-Чивита метрики g.*

Следствие. *На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) с неотрицательно (соответственно положительно) определенным тензором Риччи Ric не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\Im_1$ с положительно (соответственно неотрицательно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X, X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

5.2. Класс $\Im_2$. Рассмотрим многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$ или, что равносильно, класса $\wp_2$, которое характеризуется условиями $^{(1)}S = 0$ и $^{(3)}S = 0$. Для него справедлива следующая

Лемма 5.1. *Связность $\overline{\nabla}$ принадлежит классу $\wp_2$ тогда и только тогда, когда ее тензор кручения удовлетворяет алгебраическому уравнению вида*

$$S(X, Y, Z) - S(X, Z, Y) +$$

$$+ g(X, Y)C(Z) - g(X, Z)C(Y) = 0 \quad (5.1)$$

для некоторой гладкой 1-формы C и произвольных гладких векторных полей X, Y и Z на M.

Отметим здесь же, что метрическая связность $\overline{\nabla}$ класса $\wp_2$ в литературе (см. [5]; [28]; [46] и др.) называется еще *полусимметрической*.

Рассмотрим многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$, которое характеризуется условием $^{(1)}T = 0$ и $^{(3)}T = 0$. В этом случае справедлива

Теорема 5.3. *Полные скалярные кривизны $\overline{s}(M)$ и $s(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$ связаны неравенством $\overline{s}(M) \geq s(M)$, причем равенство возможно только в случае совпадения связности $\overline{\nabla}$ со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g.*

Зная определение скалярных кривизн $\overline{s}$ и s и учитывая положительную определенность метрики g, можем сформулировать

Следствие. *На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) с неотрицательно (соответственно положительно) определенным тензором Риччи Ric не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\Im_2$ с положительно (соответственно неотрицательно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X, X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

5.3. Класс $\Im_3$. Рассмотрим теперь многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_3$, которое характеризуется условиями $^{(1)}T =^{(2)} T = 0$. Последним можно придать вид следующих равенств:

$$trace\ T = 0;$$

$$T(X,Y,Z) + T(Y,Z,X) + T(Z,X,Y) = 0.$$

В этом случае будет справедливой

Теорема 5.4. *Скалярные кривизны s и $\overline{s}$ многообразий Римана (M,g) и Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_3$ связаны неравенством $\overline{s} \geq s$. Равенство возможно только, если присоединенная связность $\overline{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g.*

Здесь также будет справедливым

Следствие. *На римановом многообразии (M,g) с неотрицательно (соответственно положительно)скалярной кривизной s не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\Im_3$ с отрицательно (соответственно неположительно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X,X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

Замечание. С. Гольдберг, К. Яно и С. Бохнер, а также Ю. Кубо, Н. Рани и Н. Пракаш (см. [6]; [15]; [25]; [66] и [33]) доказывали свои "теоремы исчезновения"на компактных ориентированных многообразиях Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$, при условии, что $div\ X = trace\ \overline{\nabla}X$ для произвольного гладкого векторного поля X. С учетом предложенных во втором параграфе классификаций можно констатировать, что это были многообразия класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ или, соответственно, класса $\wp_1 \oplus \wp_3$. Это вызвано тем, что только для многообразий этих классов можно записать теорему Грина в форме $\int_M trace\ \overline{\nabla}X\ dv = 0$. Именно последняя лежит в основе "техники Бохнера"для многообразий Римана-Картана (см. [66]).

5.4. Класс $\Im_1 \oplus \Im_2$. Рассмотрим многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что равносильно, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$, которое характеризуется условием ${}^{(3)}S = 0$. Для него нами доказана следующая

Лемма 5.2. *Связность $\overline{\nabla}$ принадлежит классу $\wp_1 \oplus \wp_2$ тогда и только тогда, когда ее тензор кручения удовлетворяет алгебраическому уравнению вида*

$$S(X,Y,Z) + S(X,Z,Y) =$$
$$= g(X,Z)B(Y) + g(X,Y)B(Z) + g(Y,Z)A(X) \tag{5.2}$$

для некоторых гладких 1-форм A и B и произвольных гладких векторных полей X, Y и Z на M.

Для многообразий данного класса справедливы

Теорема 5.5. *Многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ имеет общие изотропные геодезические с псевдоримановым многообразием (M,g).*

Лемма 5.3. *Полные скалярные кривизны $\overline{s}(M)$ и $s(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M,g) и Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ связаны неравенством $\overline{s}(M) \leq s(M)$. Для* $\dim M \geq 3$ *равенство возможно, когда связность $\overline{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g, а для случая* $\dim M = 2$, *когда связность $\overline{\nabla}$ будет полусимметрической.*

Очевидно, что для многообразия Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ со связностью Вейщенбёка класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ верно неравенство $s(M) \geq 0$. Следовательно, мы можем сформулировать

Следствие. *Не существует связностей Вейтценбёка $\overline{\nabla}$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ на римановом многообразии с $s(M) \leq 0$.*

Зная определение скалярных кривизн $\overline{s}$ и s и учитывая положительную определенность метрики g, можем сформулировать

Следствие.*На компактном ориентированном римановом многообразии (M,g) с неположительно (соответственно отрицательно) определенной скалярной кривизной s не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ с положительно (соответственно неотрицательно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X,X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

6. Псевдокиллинговы векторные поля на многообразии Римана-Картана

6.1. Определение. (см. [57], стр. 60–61) *Уравнения $L_\xi g = 0$ или им равносильные*

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = 0 \tag{6.1}$$

характеризуют ξ как киллинговое векторное поле или, по другой терминологии, инфинитезимальную изометрию.

Для связности $\overline{\nabla}$ по аналогии с киллинговым векторным полем определим псевдокиллинговое векторное поле

Определение. (см. [6]; [15] и [66], стр. 86) *Уравнения*

$$g(\overline{\nabla}_X \xi, Y) + g(X, \overline{\nabla}_Y \xi) = 0 \tag{6.2}$$

служат определяющими для псевдокиллингова векторного поля ξ пространства $(M,g,\overline{\nabla})$.

Уравнения (6.2) можно записать в равносильной им форме:

$$(L_\xi g)(X,Y) = T(X,Y,\xi) + T(Y,X,\xi). \tag{6.3}$$

Замечание. На многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1$, которое характеризуется условием $T =^{(1)} T$ или равносильным ему условием $S =^{(1)} S$, где антисимметричны тензоры деформации T^b и кручения S^b, и на котором сосредоточили свое внимание К. Яно и

С. Бохнер, псевдокиллинговое векторное поле ξ является киллинговым, поскольку в этом случае $(L_\xi g)(X,Y) = 0$, как это последует из (6.3).

В отличие от цитируемых выше работ [6], [15], [25], [33], [66], рассмотрим псевдокиллинговое векторное поле ξ на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$. В этом случае

$$T(X,Y,\xi) + T(Y,X,\xi) =$$

$$= 2g(X,Y)\omega(\xi) - g(Y,\xi)\omega(X) - g(X,\xi)\omega(Y) \quad (6.4)$$

и уравнение (6.3) предстанет в следующем виде:

$$(L_\xi g)(X,Y) =$$

$$= 2g(X,Y)\omega(\xi) - \theta(Y)\omega(X) - \theta(X)\omega(Y), \quad (6.5)$$

где $\theta(X) = g(\xi, X)$ и $\omega = (n-1)^{-1} trace\ T$ для произвольного гладкого векторного поля X на M.

Полагаем векторное поле ξ неизотропным, то есть $g(\xi,\xi) \neq 0$, и введем в рассмотрение ортогональное векторному полю ξ гиперраспределение $\xi^\perp : x \in M \to X_x \in \ker\ \theta_x \subset T_x M$ для всех x из области определения поля ξ на многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$. Из (6.5) тогда последует, что $(L_\xi g)(X,Y) = 2g(X,Y)\omega(\xi)$ для произвольных гладких векторных полей X и Y распределения $\xi^\perp$. Это равенство характеризует ξ как *инфинитезимальное $(n-1)$-конформное преобразование* (см. [40]) или, по другой терминологии, как *инфинитезимальное обобщенно-конформное преобразование* (см. [56]). Как это доказано в [40], верно и обратное. А именно: каждое инфинитезимальное $(n-1)$-конформное преобразование ξ многообразия (M, g) задается уравнением вида (6.5). Доказана

Теорема 6.1. *Псевдокиллинговое (неизотропное) векторное поле на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что тоже самое, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ является инфинитезимальным $(n-1)$-конформным преобразованием.*

С каждым гиперраспределением $\xi^\perp$ ассоциируются *тензор интегрируемости* $F^\perp$ и *вторая фундаментальная форма* $Q^\perp$, которые определяются из равенств (см. [34], стр. 148)

$$g(F^\perp(X,Y),\xi) := g([X,Y],\xi); \quad (6.6)$$

$$g(Q^\perp(X,Y),\xi) := g(2^{-1}(\nabla_X Y + \nabla_Y X),\xi) \quad (6.7)$$

для любых гладких векторных полей X и Y распределения $\xi^\perp$. На многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что то же самое, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ равенство (6.7) принимает следующий вид

$$g(Q^\perp(X,Y),\xi) =$$

$$= g(2^{-1}(\overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_Y X),\xi) + T(X,Y,\xi) + T(Y,X,\xi)$$

для любых гладких векторных полей X и Y распределения $\xi^\perp$ и псевдокиллингова векторного поля ξ. На основании (6.4) заключаем отсюда,что

$$g(Q^\perp(X,Y),\xi) = 2g(X,Y)\omega(\xi).$$

Это означает, что $\xi^\perp$ – *омбилическое распределение* (см. [34], стр. 151). Доказана

Теорема 6.2. *На многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что то же самое, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ гиперраспределение $\xi^\perp$, ортогональное (неизотропному) псевдокиллинговому векторному полю ξ, является омбилическим.*

Тензор интегрируемости $F^\perp$, вообще говоря, не обращается в нуль на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$. Но возможен частный случай, который описывает

Теорема 6.3. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное ориентированное n-мерное $(n \geq 3)$ многообразие Римана-Картана с положительно определенным метрическим тензором g принадлежит классу $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что то же самое, классу $\wp_1 \oplus \wp_2$. Если для псевдокиллингова векторного поля ξ выполняется условие $Ric(\xi,\xi) \leq 0$, то гипераспределение $\xi^\perp$ является интегрируемым с максимальными вполне геодезическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ некоторой карты (U, φ) имеет вид:*

$$ds^2 =$$

$$= g_{ab}(x^1, ..., x^{n-1}) dx^a \otimes dx^b + g_{nn}(x^1, ..., x^n) dx^n \otimes dx^n, \quad (6.8)$$

для $a, b = 1, \ldots, n-1$.

Далее рассмотрим псевдокиллингово векторное поле ξ на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$, для которого, как было показано, присоединенная связность $\overline{\nabla}$ – полусимметрическая. Справедлива

Теорема 6.4. *Если для заданного на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$ псевдокиллингова векторного поля ξ и тензора Риччи $\overline{Ric}$ присоединенной связности $\overline{\nabla}$ выполняется условие $\overline{Ric}(\xi,\xi) \leq 0$, то ξ является торсобразующим векторным полем, гиперраспределение $\xi^\perp$ - интегрируемым с максимальными омбилическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ некоторой карты (U, φ) имеет вид:*

$$ds^2 = \sigma(x^1, \ldots, x^n) g_{ab}(x^1, \ldots, x^{n-1}) dx^a \otimes dx^b +$$

$$+ g_{nn}(x^1, \ldots, x^n) dx^n \otimes dx^n, \quad (6.9)$$

для $a, b = 1, \ldots, n-1$.

6.2. Теоремы исчезновения для псевдокиллинговых векторных полей. Пусть как и прежде многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ имеет положительно определенный метрический тензор g. Теорема исчезновения для псевдокиллингова векторного поля на многообразии

Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что то же самое, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ имеет следующий вид.

Теорема 6.5. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное ориентированное n-мерное ($n \geq 3$) многообразие Римана-Картана с положительно определенным метрическим тензором g принадлежит классу $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что тоже самое, классу $\wp_1 \oplus \wp_2$. Если при этом тензор Риччи Ric связности Леви-Чивита ∇ метрики g отрицательно определен, то на $(M, g, \overline{\nabla})$ не существует ненулевых псевдокиллинговых векторных полей.*

Теорема исчезновения указывает на отрицательную определенность тензора Риччи Ric связности Леви-Чивита ∇ метрики g как на условие препятствия для существования псевдокиллингова векторного поля на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, при этом объекты связности $\overline{\nabla}$ в этом не участвуют. Исправить эту ситуацию поможет следующая

Теорема 6.6. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное n-мерное ($n \geq 2$) многообразие Римана-Картана с положительно определенным метрическим тензором g принадлежит классу $\Im_2$ или, что то же самое, классу $\wp_2$. Тогда каждое псевдокиллинговое векторное поле ξ на $(M, g, \overline{\nabla})$ имеет равную нулю ковариантную производную относительно несимметричной метрической связности $\overline{\nabla}$, если $\overline{Ric}(\xi, \xi) \leq 0$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ этой связности. Если же квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ отрицательно определена, то на $(M, g, \overline{\nabla})$ не существует ненулевых псевдокиллинговых векторных полей.*

7. Псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана-Картана

7.1. Геометрия псевдогармонических векторных полей. Векторное поле ξ на римановом многообразии (M, g) называется *гармоническим*, если (см. [66], стр. 34)

$$\begin{gathered} g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi) = 0, \\ div\ \xi = trace_g(\nabla\ \xi) = 0. \end{gathered} \tag{7.1}$$

По аналогии с приведенным определением было дано ([15]; [25]; [33]; см. [66], стр. 84)

Определение. *Псевдогармоническим векторным полем называется такое ξ на многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$, которое подчиняется системе дифференциальных уравнений:*

$$\begin{gathered} g(\overline{\nabla}_X \xi, Y) - g(X, \overline{\nabla}_Y \xi) = 0, \\ trace_g(\overline{\nabla}\xi) = 0. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Изучим геометрию псевдогармонического векторного поля на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ классов $\Im_1 \oplus \Im_2$ и $\Im_2$. Справедлива

Лемма 7.1. *Пусть на компактном многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$ тензор кручения S присоединенной связности $\overline{\nabla}$ удовлетворяет уравнению*

$$g(S(X, Y), Z) + g(S(X, Z), Y) =$$

$$= g(X, Y)\tau(Z) + g(X, Z)\tau(Y) + g(Y, Z)\nu(X) \tag{7.3}$$

для произвольных гладких 1-форм τ и ν. Если для заданного на $(M, g, \overline{\nabla})$ псевдогармонического векторного поля ξ и тензора Риччи $\overline{Ric}$ присоединенной связности $\overline{\nabla}$ выполняется условие $\overline{Ric}(X, X) \geq 0$, то с необходимостью $\overline{\nabla}\xi = 0$. Если же квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ является положительно определенной, то на многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$ не существует ненулевых псевдогармонических векторных полей.

На основании леммы можно доказать, что справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть ξ – псевдогармоническое векторное поле на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ такое, что $\overline{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ присоединенной связности $\overline{\nabla}$. Тогда гиперраспределение $\xi^\perp$, ортогональное ξ, является омбилическим.*

Рассмотрим теперь псевдогармоническое векторное поле ξ на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$. Здесь будет справедлива

Теорема 7.2. *Если на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$ для псевдогармонического векторного поля ξ выполняется условие $\overline{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$, то ξ является торсообразующим векторным полем, гиперраспределение $\xi^\perp$ - интегрируемым с максимальными омбилическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1, ..., x^n$ некоторой карты (U, φ) приводится к виду:*

$$ds^2 = \sigma(x^1, ..., x^n) g_{ab}(x^1, ..., x^{n-1}) dx^a \otimes dx^b +$$

$$+ g_{nn}(x^1, ..., x^n) dx^n \otimes dx^n,$$

для $a, b = 1, ..., n-1$.

7.2. Теорема исчезновения

Теорема 7.3. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное многообразие Римана-Картана класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что то же самое, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$. Тогда каждое псевдогармоническое векторное поле ξ на $(M, g, \overline{\nabla})$ имеет равную нулю ковариантную производную относительно несимметричной метрической связности $\overline{\nabla}$, если $\overline{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ этой связности. Если же квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ является положительно определенной, то на многообразии не существует ненулевых псевдогармонических векторных полей.*

Литература

[1] Aldrovandi, R. *Selected topics in teleparallel gravity* / R. Aldrovandi, J. G. Pereira, and K. H. Vu // Brazilian Journal of Physics. – Vol. 34, № 4A. – 2004.

[2] Ambrose, W. *On homogeneous Riemannian manifolds* / W. Ambrose, I. M. Singer // Duke Math. J. – 1958. – Vol. 25. – P. 647 – 669.

[3] Amari, S.-I. *Differential geometry in statistical inference* / S.-I. Amari, O. E. Barndorff-Nielsen, R. E. Kass, S. L. Lauritzen, C. Rao. – Hayward.: Institute of Mathematical Statistics, 1987.

[4] Arkuszewski, W. *On the linearized Einstein-Cartan theory* / W. Arkuszewski, W. Korczynski, V. Ponomariev // Ann. Ínst. Henri Poincare. – 1974. – Vol. 21. – P. 89 – 95.

[5] Barua, B. *Some properties of semi-symmetric connection in Riemannian manifold* / B. Barua, A. K. Ray // Ind. J. Pure Appl. Math. – 1985. – Vol. 16, no. 7. – P. 726 – 740.

[6] Bochner, S. *Tensor-fields in non-symmetric connections* / S. Bochner, K. Yano // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1952. – Vol. 56, no. 3 – P. 504 – 519.

[7] Capozziello, S. *Geometric classification of the torsion tensor in space-time.* / S. Capozziello, G. Lambiase, C. Stornaiolo // Annalen Phys. – 2001. – Vol. 10. – P. 713 – 727.

[8] Cartan, E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part I* / E. Cartan // Ann. Éc. Norm. – 1923. – Vol. 40. – P. 325 – 412.

[9] Cartan, E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part I.* / E. Cartan // Ann. Éc. Norm. – 1924. – Vol. 41. – P. 1 – 25.

[10] Cartan, E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part II.* / E. Cartan // Ann. Éc. Norm. – 1925. – Vol. 42. – P. 17–88.

[11] Deszcz, R. *Differential geometry in statistics and econometrics* / R. Deszcz, K. Sawicz // Electronic Modeling. – 2005. – Vol. 27, no. 2. – P. 139 – 143.

[12] Eisenhart, L. P. *Continuous groups of transformations* / L. P. Eisenhart. – Prinseton: Prinseton Univ. Press, 1933. – 359 p.

[13] Eisenhart, L. P. *Non Riemannian geometry* / L. P. Eisenhart – New York: Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1927. – 184 p.

[14] Garecki, J. *Teleparallel equivalent of general relativity: a critical review Janusz Garecki.*/ J. Garecki // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:1010.2654v2 [gr-qc] 25 Oct 2010.

[15] Goldberg, S. I. *On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vector in metric manifolds with torsion* / S. I. Goldberg // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1956. – Vol. 64, no. 2. – P. 364 – 373.

[16] Gray, A. *Einstein-like manifolds which are not Einstein.* / A. Gray // Geometriae deicata. – 1978. – Vol. 7. – P. 259 – 280.

[17] Gray, A. *The sixteen class of almost Hermitean manifolds* / A. Gray, L. Hervella // Ann. Math. Pura Appl. – 1980. – Vol. 123. – P. 35 – 58.

[18] Hamond, R. T. *Torsion gravity* / R. T. Hamond // Rep. Prog. Phys. – 2002. – Vol. 65. – P. 599 – 649.

[19] Hehl, F. W. *On a New Metric-Affine Theory of Gravitation* / F. W. Hehl, P. Heyde // Physics Letters B. – 1976. – Vol. 63, no. 4. – P. 446 – 448.

[20] Hehl, F. W. *Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, word spinors, and breaking of dilation invariance* / F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, Y. Ne'eman // Physics Reports. – 1995. – Vol. 258. – P. 1 – 171.

[21] Hehl, F.W. *General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects* / F.W. Hehl, P. Heyde, G.D. Kerlick, J.M. Nester // Rev. Mod. Phys. – 1976. – Vol. 48, № 3. – P. 393 – 416.

[22] Hehl, F. W. *Elie Cartan's torsion in geometry and in field theory, an essay* / F. W. Hehl, Y. N. Obukhov // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:0711.1535v1 [gr-qc] 9Nov 2007.

[23] Kibble, T. W. B. *Lorenz invariance and the gravitational field* / T. W. B. Kibble // J. Math. Phys. – 1961. – Vol. 2. – P. 212 – 221.

[24] Крамер, Д. *Точные решения уравнений Эйнштейна* / Д. Крамер, Х. Штефанн, М. Мак-Каллум, Э. Херльт. – М.: Энергоиздат, 1982. – 416 с.

[25] Kubo, Y. *Vector fields in a metric manifold with torsion and boundary* / Y. Kubo // Kodai Math. Sem. Rep. – 1972. – Vol. 24. – P. 383 – 395.

[26] McCrea, J. D. *Irreducible decompositions of non-metricity, torsion, curvature and Bianchi identities in metric-affine spacetimes* / J. D. McCrea // Class. Quantum. Grav. – 1992. – Vol. 9. – P. 553 – 568.

[27] Megged, O. *Post-Riemannian Merger of Yang-Mills interactions with gravity* / O. Megged // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:hep-th/0008135.

[28] Muniraja, G. *Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Shur's theorem* / G. Muniraja // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2008. – Vol. 3, no. 25. – P. 1223 – 1232.

[29] Nakao, Z. *Submanifolds of a Riemannian manifold semi-symmetric metric connections.* / Z. Nakao // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 261 – 266.

[30] Penrose, R. *Spinors and torsion in General Relativity* / R. Penrose // Fond. Of Phys. – 1983. – Vol. 13. – P. 325 – 339.

[31] Pestov, I. B. *Kahler fermions on the Weitzenbok space-time* / I. B. Pestov // [Элек-

тронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:hep-th/9911247v1 30 Nov 1999.

[32] Puetzfeld, D. *Prospects of non-Riemannian cosmology* / D. Puetzfeld // Proceeding of the of 22nd. Texas Symposium on Relativistic Astrophysics at Stanford University (Dec. 13-17, 2004). – California: Stanford Univ. Press – 2004. – P. 1 – 5.

[33] Rani, N. *Non-existence of pseudo-harmonic and pseudo-Killing vector and tensor fields in compact orientable generalized Riemannian space (metric manifold with torsion) with boundary* / N. Rani, N. Prakash // Proc. Natl. Inst. Sci. India. – 1966. – Vol. 32,A., no. 1. – P. 23 – 33.

[34] Reinhart, B. L. *Differential geometry of foliations* / B. L. Reinhart – Berlin-New York: Springer-Verlag, 1983. – 194 p.

[35] Ruggiero, M. L. *Einstein-Cartan theory as a theory of defects in space-time* / M. L. Ruggiero, A. Tartaglia // Amer. J. Phys. – 2003. – Vol. 71. – P. 1303–1313.

[36] Sciama, D. W. *On the analogy between change and spin in general relativity* / D. W. Sciama // Recent developments in General Relativity. – Oxford: Pergamon Press & Warszawa: PWN. – 1962. – P. 415 – 439.

[37] Segupta, J. *On a type of semi-symmetric connection on a Riemannian manifold* / J. Segupta, U. C. De, T. Q. Binh // Ind. J. Pure Appl. Math. – 2000. – Vol. 31, no. 12. – P. 1650 – 1670.

[38] Stepanov, S. E. *On a conformal Killing 2-form of the electromagnetic field* / S. E. Stepanov // Journal Geom. and Phys. – 2000. – Vol. 33. – P. 191 – 209.

[39] Tarafdar, D. *On pseudo concircular symmetric manifold admitting a type quarter symmetric metric connection.* / D. Tarafdar // Istambul Univ. Fen. Fak. Mat. Dergisi. – 1996 – 1997. – Vol. 55 – 56. – P. 237 – 243.

[40] Tanno, S. *Partially conformal transformations with respect to $(m-1)$-dimensional distributions of m-dimensional Riemannian manifolds* / S. Tanno // Tôhoku Math. J. – 1965. – Vol. 17, no. 17. – P. 358 – 409.

[41] Trautman, A. *The Einstein-Cartan theory* / A. Trautman // Encyclopedia of Mathematical Physics. – Oxford: Elsevier, 2006. – Vol. 2. – P. 189 – 195.

[42] Tricerri, F. *Homogeneous structures on Riemannian manifolds* / F. Tricerri, L. Vanhecke // London Math. Soc.: Lecture Note Series. – Vol. 83. - London: Cambridge University Press, 1983.

[43] Tricerri, F. *Homogeneous structures. Progress in mathematics* / F. Tricerri, L. Vanhecke // Differential geometry. – 1983. – Vol. 32. – P. 234 – 246.

[44] Tricerri, F. *Self-dual and anti-self-dual homogeneous structures* / F. Tricerri , L. Vanhecke // Lecture notes in mathematics. – 1984. – no. 1045. – P. 18 – 194.

[45] Vysal, S. A. *On weakly symmetric spaces with semi-symmetric metric connection* / S. A. Vysal, R. O. Laleoğlu // Publ.Math. – 2005. – Vol. 67, no. 1 – 2. – P. 145 – 154.

[46] Yano, K. *On semi-symmetric metric connection* / K. Yano // Rev. Roum. Math. Pure Appl. – 1970. – Vol. 15. – P. 1579 – 1586.

[47] Yasar, E. *Totally umbilical lightlike hypersurfaces in semi-Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection* / E. Yasar, A. C. Cöken, A. Yücesan // Int. J. Pure Appl. Math. – 2005. – Vol. 23, no. 3. – P. 379 – 391.

[48] Бессе, А. *Многообразия Эйнштейна: в 2-х т. Т. 1* / А. Бессе. – М.: Мир, 1990. – 318 с.

[49] Бессе, А. *Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/1979* / А. Бессе. – М.: Мир, 1985 – 334 с.

[50] Гордеева, И. А. *Теорема исчезновения для псевдогармонических векторных полей на многообразии Римана-Картана* / И. А. Гордеева, С. Е. Степанов // Тезисы докладов "Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам". Суздаль, 27 июня – 2 июля 2008 г. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2008. – С. 71 – 73.

[51] Гордеева, И. А. *Псевдокиллинговые векторные поля на многообразиях Римана-Картана* / И. А. Гордеева // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2008", 19 – 24 мая 2008 г. – Одесса: Фонд "Наука 2008. – С. 73 –75.

[52] Гордеева, И. А. *Псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана-Картана* / И. А. Гордеева, С. Е. Степанов // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, no. 2. – С. 267 — 279.

[53] Гордеева, И. А. *Теоремы исчезновения некоторых классов многообразий Римана–Картана* / И. А. Гордеева // Фундамент. и прикл. матем. – 2010. – Т 16, No 2 – С. 7 — 12.

[54] Гордеева, И. А. *О классификации несимметрических метрических связностей* / И. А. Гордеева // Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева: – Пенза: Изд-во ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2007. – С. 30 – 37.

[55] Гордеева, И. А. *Многообразия Римана-Картана* / И. А. Гордеева, В. И. Паньженский, С. Е. Степанов // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я).: ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – Т. 123. – С. 110 – 141.

[56] Дубинкин, А. В. *К вопросу об инфинитезимальных обобщенно-конформных преобразованиях* / А. В. Дубинкин, А. П. Широков // Труды геометрического семинара (КГУ, Казань). – 1983. – Т. 15. – С. 26 – 34.

[57] Кобаяси, Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии* / Ш. Кобаяси. – М.: Наука, 1986. – 224 с.

[58] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. Т. 1.* /Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 344 с.

[59] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. Т. 2.* /Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 416 с.

[60] Норден, А. П. *Пространства аффинной связности* / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 463 с.

[61] Схоутен И. А. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т.1.* / И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк. – М.: ГОНТИ, 1939.

[62] Схоутен, И. А. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии, Т.II.* / И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк. – М.: ИЛ, 1948.

[63] Схоутен, Я. А. *Тензорный анализ для физиков* / Я. А. Схоутен. – М.: Наука, 1965.

[64] *Точные решения уравнений Эйнштейна* /Д. Крамер, Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Каллум; под ред. Э. Шмутцера; пер. с англ. – М.: Энергоиздат, 1982. – 416 с.

[65] Фиников, С. П. *Метод внешних форм Картана дифференциальной геометрии* / С. П. Фиников. – М.: Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[66] Яно, К. *Кривизна и числа Бетти* / К. Яно, С. Бохнер. – М.: ИЛ, 1957 – 152 с.

514.763.34

RICCI SOLITONS IN CONTACT METRIC MANIFOLDS

Mukut Mani Tripathi

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ В КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

М. М. Трипатхи

In $N(k)$-contact metric manifolds and/or (k,μ)-manifolds, gradient Ricci solitons, compact Ricci solitons and Ricci solitons with V pointwise collinear with the structure vector field ξ are studied.

В работе изучаются солитоны Риччи, в $N(k)$-контактных метрических многообразиях и в контактных (k,μ)-многообразиях

Keywords: солитоны Риччи, $N(k)$-контактные метрические многообразия, (k,μ)-многообразия, K-контактные многообразия, многообразия Сасаки.

Ключевые слова: Ricci soliton, $N(k)$-contact metric manifold, (k,μ)-manifold, K-contact manifold, Sasakian manifold.

1. Introduction

A Ricci soliton is a generalization of an Einstein metric. In a Riemannian manifold (M,g), g is called a Ricci soliton [18] if

$$\pounds_V g + 2\,Ric + 2\lambda g = 0, \tag{1}$$

where $\pounds$ is the Lie derivative, V is a complete vector field on M and λ is a constant. Metrics satisfying (1) are interesting and useful in physics and are often referred as quasi-Einstein (e.g. [9], [10], [15]). Compact Ricci solitons are the fixed point of the Ricci flow

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2\,Ric$$

projected from the space of metrics onto its quotient modulo diffeomorphisms and scalings, and often arise as blow-up limits for the Ricci flow on compact manifolds. The Ricci soliton is said to be shrinking, steady, and expanding according as λ is negative, zero, and positive respectively. If the vector field V is the gradient of a potential function $-f$, then g is called a gradient Ricci soliton and equation (1) assumes the form

$$\nabla\nabla f = Ric + \lambda g. \tag{2}$$

A Ricci soliton on a compact manifold has constant curvature in dimension 2 (Hamilton [18]), and also in dimension 3 (Ivey [19]). For details we refer to Chow and Knoff [12] and Derdzinski [14]. We also recall the following significant result of Perelman [24]: *A Ricci soliton on a compact manifold is a gradient Ricci soliton.*

On the other hand, the roots of contact geometry lie in differential equations as in 1872 Sophus Lie introduced the notion of contact transformation (Berührungstransformation) as a geometric tool to study systems of differential equations. This subject has manifold connections with the other fields of pure mathematics, and substantial applications in applied areas such as mechanics, optics, phase space of a dynamical system, thermodynamics and control theory (for more details see [1], [3], [16], [21] and [22]).

It is well known [26] that the tangent sphere bundle T_1M of a Riemannian manifold M admits a contact metric structure. If M is of constant curvature $c = 1$ then T_1M is Sasakian [33], and if $c = 0$ then the curvature tensor R satisfies $R(X,Y)\xi = 0$ [2]. As a generalization of these two cases, in [5], Blair, Koufogiorgos and Papantoniou started the study of the class of contact metric manifolds, in which the structure vector field ξ satisfies the (k,μ)-nullity condition. A contact metric manifold belonging to this class is called a (k,μ)-manifold. Such a structure was first obtained by Koufogiorgos [20] by applying a D_a-homothetic deformation [?] on a contact metric manifold satisfying $R(X,Y)\xi = 0$. In particular, a $(k,0)$-manifold is called an $N(k)$-contact metric manifold ([4], [6], [32]) and generalizes the cases $R(X,Y)\xi = 0$, K-contact and Sasakian.

In [28], Sharma has initiated the study of Ricci solitons in K-contact manifolds. In a K-contact manifold the structure vector field ξ is Killing, that is, $\pounds_\xi g = 0$; which is not in general true in contact metric manifolds. Motivated by these circumstances, in this paper we study Ricci solitons in $N(k)$-contact metric manifolds and (k,μ)-manifolds. In section , we give a brief description of $N(k)$-contact metric manifolds and (k,μ)-manifolds. In section , we prove main results. Among others, we prove that in a non-Sasakian (or non-K-contact) $N(k)$-contact metric manifold (M,g), if the metric g is a Ricci soliton with V pointwise collinear with ξ, then $\dim(M) > 3$, the metric g is a shrinking Ricci soliton and M is locally isometric to a contact metric manifold obtained by a $D_{\left(1+\frac{(\sqrt{n}\pm1)^2}{n-1}\right)}$-homothetic deformation of the contact metric structure on the tangent sphere bundle of an $(n+1)$-dimensional Riemannian manifold of constant curvature $\frac{(\sqrt{n}\pm1)^2}{n-1}$.

2. Contact metric manifolds

A 1-form η on a $(2n+1)$-dimensional smooth manifold M is called a *contact form* if $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ everywhere on M, and M equipped with a contact form is a *contact manifold*. For a given contact 1-form η, there exists a unique vector field ξ, called the *characteristic vector field*, such that $\eta(\xi) = 1$, $d\eta(\xi,\cdot) = 0$, and consequently $\pounds_\xi \eta = 0$, $\pounds_\xi d\eta = 0$. In 1953, Chern [11] proved that the structural group of a $(2n+1)$-dimensional contact manifold can be reduced to $\mathcal{U}(n) \times 1$. A $(2n+1)$-dimensional differentiable manifold M is called an *almost contact manifold* [17] if its structural group can be reduced to $\mathcal{U}(n) \times 1$. Equivalently, there is an *almost contact structure* (φ,ξ,η) [25] consisting of a tensor field φ of type $(1,1)$, a vector field ξ, and a 1-form η satisfying

$$\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \varphi\xi = 0, \quad \eta\circ\varphi = 0. \tag{3}$$

First and one of the remaining three relations of (3) imply the other two relations. An almost contact structure is *normal* [27] if the torsion tensor $[\varphi,\varphi] + 2d\eta\otimes\xi$, where $[\varphi,\varphi]$ is the Nijenhuis tensor of φ, vanishes identically. Let g be a compatible Riemannian metric with (φ,ξ,η), that is,

$$g(X,Y) = g(\varphi X,\varphi Y) + \eta(X)\eta(Y), \; X,Y \in TM. \tag{4}$$

Then, M becomes an *almost contact metric manifold* equipped with an *almost contact metric structure* (φ,ξ,η,g). The equation (4) is equivalent to

$$g(X,\varphi Y) = -g(\varphi X,Y) \quad \text{alongwith} \quad g(X,\xi) = \eta(X). \tag{5}$$

An almost contact metric structure becomes a contact metric structure if $g(X,\varphi Y) = d\eta(X,Y)$ for all $X,Y \in TM$. In a contact metric manifold M, the $(1,1)$-tensor field h defined by $2h = \pounds_\xi\varphi$, is symmetric and satisfies

$$h\xi = 0, \qquad h\varphi + \varphi h = 0, \tag{6}$$

$$\nabla\xi = -\varphi - \varphi h, \tag{7}$$

where ∇ is the Levi-Civita connection. A contact metric manifold is called a *K-contact manifold* if the characteristic vector field ξ is a Killing vector field. An almost contact metric manifold is a K-contact manifold if and only if $\nabla\xi = -\varphi$. A K-contact manifold is a contact metric manifold, while the converse is true if $h = 0$. A normal contact metric manifold is a *Sasakian manifold*. A contact metric manifold M is Sasakian if and only if the curvature tensor R satisfies

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \quad X,Y \in TM. \tag{8}$$

A contact metric manifold M is said to be *η-Einstein* ([23] or see [3] p. 105) if the Ricci tensor Ric satisfies $Ric = ag + b\eta\otimes\eta$, where a and b are some smooth functions on the manifold. In particular if $b = 0$, then M becomes an *Einstein manifold*.

A Sasakian manifold is always a K-contact manifold. The converse is true if either the dimension is three ([3], p. 76), or it is compact Einstein (Theorem A, [8]) or compact η-Einstein with $a > -2$ (Theorem 7.2, [8]). The conclusions of Theorems A and 7.2 of [8] are still true if the condition of compactness is weakened to completeness (Proposition 1, [28]).

In [5], Blair, Koufogiorgos and Papantoniou introduced a class of contact metric manifolds M, which satisfy

$$R(X,Y)\xi = (kI + \mu h)(\eta(Y)X - \eta(X)Y), \tag{9}$$

where k, μ are real constants. A contact metric manifold belonging to this class is called a *(k,μ)-manifold*. If $\mu = 0$, then a (k,μ)-manifold is called an *$N(k)$-contact metric manifold* ([4], [6], [32]). In a (k,μ)-manifold M, one has [5]

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)Y = ((1-k)\,g(X,\varphi Y) + g(X,\varphi hY))\,\xi + \\ +\eta(Y)(h(\varphi X + \varphi hX)) - \mu\eta(X)\varphi hY\end{aligned} \tag{10}$$

for all $X,Y \in TM$. The Ricci operator Q satisfies $Q\xi = 2nk\xi$, where $\dim(M) = 2n+1$. Moreover, $h^2 = (k-1)\varphi^2$ and $k \leq 1$. In fact, for a (k,μ)-manifold, the conditions of being a Sasakian manifold, a K-contact manifold, $k = 1$ and $h = 0$

are all equivalent. The tangent sphere bundle T_1M of a Riemannian manifold M of constant curvature c is a (k,μ)-manifold with $k = c(2-c)$ and $\mu = -2c$. Characteristic examples of non-Sasakian (k,μ)-manifolds are the tangent sphere bundles of Riemannian manifolds of constant curvature not equal to one and certain Lie groups [7]. For more details we refer to [3] and [5].

3. Main results

Let (M,φ,ξ,η,g) be a $(2n+1)$-dimensional non-Sasakian (k,μ)-manifold. Then the Ricci operator Q is given by [5]

$$Q = 2nkI+ + (2(n-1)+\mu)h - (2(n-1) - n\mu + 2nk)\varphi^2. \tag{11}$$

We also have

$$(\nabla_X\varphi^2)Y = = (X\eta(Y))\xi - \eta(\nabla_X Y)\xi - \eta(Y)\varphi X - \eta(Y)\varphi hX, \tag{12}$$

where first equation of (3) and equation (7) are used. Using (10) and (12) from (11) we obtain

$$\begin{aligned}(\nabla_X Q)Y &= (2(n-1)+\mu)\{(1-k)g(X,\varphi Y)\xi + g(X,\varphi hY)\xi - \mu\eta(X)\varphi hY\}\\ &\quad -(2(n-1)-n\mu+2nk)\{(X\eta(Y))\xi - \eta(\nabla_X Y)\xi\}\\ &\quad +(2(2n-1)k-(n+1)\mu+k\mu)\eta(Y)\varphi X + ((n+1)\mu - 2nk)\eta(Y)h\varphi X.\end{aligned}$$

Consequently, we have

$$\begin{aligned}(\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X &= (2(n+1)\mu - 4(2n-1)k - 2k\mu)\,d\eta(X,Y)\xi\\ &\quad +(2(2n-1)k-(n+1)\mu+k\mu)(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y)\\ &\quad +((\mu+3n-1)\mu - 2nk)(\eta(Y)\varphi hX - \eta(X)\varphi hY),\end{aligned} \tag{13}$$

where (5) has been used.

We also recall the following results for later use.

Theorem 3.1. (Theorem 5.2, Tanno [32]) *An Einstein $N(k)$-contact metric manifold of dimension ≥ 5 is necessarily Sasakian.*

Theorem 3.2. (Theorem 1.2, Tripathi and Kim [34]) *A non-Sasakian Einstein (k,μ)-manifold is flat and 3-dimensional.*

Now we prove the following

Theorem 3.3. *If the metric g of an $N(k)$-contact metric manifold (M,g) is a gradient Ricci soliton, then*

- **(a)** *either the potential vector field is a nullity vector field,*
- **(b)** *or g is a shrinking soliton and (M,g) is Einstein Sasakian,*
- **(c)** *or g is a steady soliton and (M,g) is 3-dimensional and flat.*

Proof. Let (M,g) be a $(2n+1)$-dimensional $N(k)$-contact metric manifold and g a gradient Ricci soliton. Then the equation (2) can be written as

$$\nabla_Y Df = QY + \lambda Y \tag{14}$$

for all vector fields Y in M, where D denotes the gradient operator of g. From (14) it follows that

$$R(X,Y)Df = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X,\ \ X,Y \in TM. \tag{15}$$

We have

$$g(R(\xi,Y)Df,\xi) = g(k(Df-(\xi f)\xi),Y), \tag{16}$$

where (9) with $\mu = 0$ is used. Also in an $N(k)$-contact metric manifold, it follows that

$$g((\nabla_\xi Q)Y - (\nabla_Y Q)\xi,\xi) = 0, \qquad Y \in TM. \tag{17}$$

From (15), (16) and (17) we get

$$k(Df - (\xi f)\xi) = 0,$$

that is, either $k=0$ or

$$Df = (\xi f)\xi. \tag{18}$$

If $k=0$, then putting $k=0=\mu$ in (13), it follows that Q is a Codazzi tensor, that is,

$$(\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X = 0, \qquad X,Y \in TM,$$

which in view of (15) gives

$$R(X,Y)Df = 0, \qquad X,Y \in TM,$$

that is, the potential vector field Df is a nullity vector field (see [13] and [31] for details).

Now, we assume that (18) is true. Using (18) in (14) we get

$$Ric(X,Y) + \lambda g(X,Y) = = Y(\xi f)\eta(X) - (\xi f)g(X,\varphi Y) - (\xi f)g(X,\varphi hY),$$

where (7) is used. Symmetrizing this with respect to X and Y we obtain

$$2\,Ric\,(X,Y) + 2\lambda g\,(X,Y) =$$

$$= X\,(\xi f)\,\eta\,(Y) + Y\,(\xi f)\,\eta\,(X) - 2\,(\xi f)\,g\,(\varphi hX, Y)\,. \tag{19}$$

Putting $Y = \xi$, we get

$$X\,(\xi f) = (2nk + \lambda)\,\eta\,(X)\,. \tag{20}$$

From (19) and (20) we get

$$Ric\,(X,Y) + \lambda g\,(X,Y) =$$

$$= (2nk + \lambda)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Y) - (\xi f)\,g\,(\varphi hX, Y)\,. \tag{21}$$

Using (21) in (14), we get

$$\nabla_Y Df = (2nk + \lambda)\,\eta\,(Y)\,\xi - (\xi f)\,\varphi hY. \tag{22}$$

Using (22) we compute $R\,(X,Y)\,Df$ and obtain

$$g\,(R\,(X,Y)\,(\xi f)\,\xi, \xi) = 4\,(2nk + \lambda)\,d\eta\,(X,Y)\,, \tag{23}$$

where equations (18) and (7) are used. Thus we get

$$2nk + \lambda = 0 \tag{24}$$

Therefore from equation (20) we have

$$X\,(\xi f) = 0, \qquad X \in TM,$$

that is,

$$\xi f = c,$$

where c is a constant. Thus the equation (18) gives

$$df = c\,\eta\,.$$

Its exterior derivative implies that

$$c\,d\eta = 0,$$

that is, $c = 0$. Hence f is constant. Consequently, the equation (14) reduces to

$$Ric = -\lambda g = 2nkg,$$

that is, M is Einstein. Then in view of Theorem 3.2 and Theorem 3.1, it follows that either M is Sasakian or M is 3-dimensional and flat. In case of Sasakian, $\lambda = -2n$ is negative, and therefore the soliton g is shrinking. In case of 3-dimensional and flat, $\lambda = 0$, and therefore the soliton g is steady.

Corollary 3.4. *Let (M,g) be a compact $N(k)$-contact metric manifold with $k \neq 0$. If g is a Ricci soliton, then g is a shrinking soliton and (M,g) is Einstein Sasakian.*

Proof. The proof follows from Theorem 3.3 and the following significant result of Perelman [24]: A Ricci soliton on a compact manifold is a gradient Ricci soliton.

In [28], a corollary of Theorem 1 is stated as follows: If the metric g of a compact K-contact manifold is a Ricci soliton, then g is a shrinking soliton which is Einstein Sasakian. In Corollary , the assumptions are weakened.

Next, we have the following

Theorem 3.5. *In a non-Sasakian (k,μ)-manifold (M,g) if g is a compact Ricci soliton, then (M,g) is 3-dimensional and flat.*

Proof. In a non-Sasakian (k,μ)-manifold, the scalar curvature r is given by [5]

$$r = 2n\,(2n - 2 + k - n\mu)\,. \tag{25}$$

Consequently, the scalar curvature is a constant. If g is a compact Ricci soliton, then by Proposition 2 of [28], which states that a compact Ricci soliton of constant scalar curvature is Einstein, it follows that the non-Sasakian (k,μ)-manifold is Einstein. Then by Theorem 3.2, it becomes 3-dimensional and flat.

Given a non-Sasakian (κ,μ)-manifold M, Boeckx [7] introduced an invariant

$$I_M = \frac{1 - \mu/2}{\sqrt{1-\kappa}}$$

and showed that for two non-Sasakian (κ,μ)-manifolds $(M_i, \varphi_i, \xi_i, \eta_i, g_i)$, $i = 1,2$, we have $I_{M_1} = I_{M_2}$ if and only if up to a D-homothetic deformation, the two manifolds are locally isometric as contact metric manifolds. Thus we know all non-Sasakian (κ,μ)-manifolds locally as soon as we have for every odd dimension $2n+1$ and for every possible value of the invariant I, one (κ,μ)-manifold (M,φ,ξ,η,g) with $I_M = I$. For $I > -1$ such examples may be found from the standard contact metric structure on the tangent sphere bundle of a manifold of constant curvature c where we have $I = \frac{1+c}{|1-c|}$. Boeckx also gives a Lie algebra construction for any odd dimension and value of $I \leq -1$.

In the following, we recall Example 3.1 of [6].

Example 3.6. For $n > 1$, the Boeckx invariant for a $(2n+1)$-dimensional $\left(1 - \frac{1}{n}, 0\right)$-manifold is $\sqrt{n} > -1$. Therefore, we consider the tangent sphere bundle of an $(n+1)$-dimensional manifold of constant curvature c so chosen that the resulting D_a-homothetic deformation will be a $\left(1 - \frac{1}{n}, 0\right)$-manifold. That is for $k = c(2-c)$ and $\mu = -2c$ we solve

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{k + a^2 - 1}{a^2}, \quad 0 = \frac{\mu + 2a - 2}{a}$$

for a and c. The result is

$$c = \frac{\left(\sqrt{n} \pm 1\right)^2}{n-1}, \quad a = 1 + c$$

and taking c and a to be these values we obtain a $N\left(1 - \frac{1}{n}\right)$-contact metric manifold.

In [28], Sharma noted that if a K-contact metric is a Ricci soliton with $V = \xi$ then it is Einstein.

Even in more general case, he showed that if a K-contact metric is a Ricci soliton with V pointwise collinear with ξ then V is a constant multiple of ξ (hence Killing) and g is Einstein. Here we prove the following

Theorem 3.7. *Let (M,g) be a non-Sasakian (or non-K-contact) $N(k)$-contact metric manifold. If the metric g is a Ricci soliton with V pointwise collinear with ξ, then $\dim(M) > 3$, the metric g is a shrinking Ricci soliton and M is locally isometric to a contact metric manifold obtained by a $D_{\left(1+\frac{(\sqrt{n}\pm1)^2}{n-1}\right)}$-homothetic deformation of the contact metric structure on the tangent sphere bundle of an $(n+1)$-dimensional Riemannian manifold of constant curvature $\frac{(\sqrt{n}\pm1)^2}{n-1}$.*

Proof. Let (M,g) be a $(2n+1)$-dimensional contact metric manifold and the metric g a Ricci soliton with $V=\alpha\xi$ (α being a function on M). Then from (1) we obtain

$$2Ric(X,Y) = -2\lambda g(X,Y) + 2\alpha g(\varphi hX,Y) - -g((X\alpha)\xi,Y) - g(X,(Y\alpha)\xi), \quad (26)$$

where (7) and (5) are used. Now let (M,g) be an $N(k)$-contact metric manifold. Putting $X=\xi=Y$ in (26) and using $h\xi=0$ and $Q\xi=2nk$ we get

$$\xi\alpha + 2nk + \lambda = 0. \quad (27)$$

Again putting $X=\xi$ in (26) and using $h\xi=0$, $Q\xi=2nk$ and (27) we get

$$d\alpha = (2nk+\lambda)\eta, \quad (28)$$

which shows that α is a constant and $\lambda=-2nk$; and consequently (26) becomes

$$Ric(X,Y) = 2nkg(X,Y) + \alpha g(\varphi hX,Y). \quad (29)$$

At this point, we assume that (M,g) is also non-Sasakian. It is known that in a $(2n+1)$-dimensional non-Sasakian (k,μ)-manifold M the Ricci tensor is given by [5]

$$Ric(X,Y) = (2(n-1)-n\mu)g(X,Y) + +(2(n-1)+\mu)g(hX,Y) + + (2(1-n)+n(2k+\mu))\eta(X)\eta(Y). \quad (30)$$

Consequently, putting $\mu=0$ in (30) we get

$$Ric(X,Y) = 2(n-1)g(X,Y) + +2(n-1)g(hX,Y) + +(2(1-n)+2nk)\eta(X)\eta(Y). \quad (31)$$

Replacing X by φX in equations (29) and (31) and equating the right hand sides of the resulting equations we get

$$(2nk-2(n-1))g(\varphi X,Y) = = \alpha g(hX,Y) + 2(n-1)g(\varphi hX,Y). \quad (32)$$

If $n=1$, from (32) we get

$$2kg(\varphi X,Y) = \alpha g(hX,Y),$$

which gives $h=0$, a contradiction. If $n>1$, anti-symmetrizing the equation (32) we get

$$nk - n + 1 = 0,$$

which gives $k=1-1/n$. Using $n>1$ and $k=1-1/n$ in $\lambda=-2nk$, we get $\lambda=2(1-n)<0$, which shows that g is a shrinking Ricci soliton. Finally, in view of $n>1$, $k=1-1/n$ and the Example 3.6, the proof is complete.

Acknowledgement: The author is thankful to Professor Ramesh Sharma, University of New Haven, USA for some useful discussion during the preparation of this paper.

References

[1] Arnold, V. I. *Contact geometry: the geometrical method of Gibb's thermodynamics*/ V. I. Arnold // Proceedings of the Gibbs Symposium, Yale University, (May 15–17, 1989). American Mathematical Society. – 1990. – P. 163 – 179.

[2] Blair, D. E. *Two remarks on contact metric structures* / D. E. Blair // Tôhoku Math. J. – 1977. – Vol. 29. – P. 319 – 324.

[3] Blair, D. E. *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds* / D. E. Blair. – Progress in Mathematics, 203. – Birkhauser Boston, Inc.: Boston, MA, 2002.

[4] Baikoussis, C. *A decomposition of the curvature tensor of a contact manifold satisfying $R(X,Y)\xi = k(\eta(Y)X - \eta(X)Y)$* / C. Baikoussis, D. E. Blair and T. Koufogiorgos. – Mathematics Technical Report, University of Ioannina, Greece, 1992.

[5] Blair, D. E. *Contact metric manifolds satisfying a nullity condition* / D. E. Blair, T. Koufogiorgos and B. J. Papantoniou // Israel J. Math. – 1995. Vol. 91, no. 1–3. – P. 189 – 214.

[6] Blair, D.E. *On the concircular curvature tensor of a contact metric manifold* / D.E. Blair, J.-S. Kim and M.M. Tripathi // J. Korean Math. Soc. – 2005. – Vol. 42, no. 5. – P. 883 – 892.

[7] Boeckx, E. *A full classification of contact metric (k,μ)-spaces*/ E. Boeckx // Illinois J. Math. – 2000. – Vol. 44, no. 1. – P. 212 – 219.

[8] Boyer, C. P. *Einstein manifolds and contact geometry*/ C. P. Boyer and K. Galicky // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – Vol. 129. – P. 2419 – 2430.

[9] Chave, T. *Quasi-Einstein metrics and their renoirmalizability properties* / T. Chave and G. Valent // Helv. Phys. Acta. – 1996. – Vol. 69. – P. 344 – 347.

[10] Chave, T. *On a class of compact and non-compact quasi-Einstein metrics and their renormalizability properties* / T. Chave and G.

Valent // Nuclear Phys. – 1996. – Vol. B 478. – P. 758 – 778.

[11] Chern, S. S. *Pseudo-groups continus infinis*/ S. S. Chern // Colloques Internationaux du C. N. R. S., Strassbourg. – P. 119 – 136.

[12] Chow, B. *The Ricci flow: An introduction*/ B. Chow and D. Knoff. – Mathematical Surveys and Monographs 110, American Math. Soc., 2004.

[13] Clifton, Y.H. *The k-nullity space of curvature operator*/ Y.H. Clifton and R. Maltz // Michigan Math. J. – 1970. – Vol. 17. – P. 85 – 89.

[14] Derdzinski, A. *Compact Ricci solitons*, Preprint.

[15] Friedan, D. H. *Nonlinear models in $2+\varepsilon$ dimensions* / D. H. Friedan // Ann. Physics. – 1985. – Vol. 163. – P. 318 – 419.

[16] Geiges, H. *A brief history of contact geometry and topology*/ H. Geiges // Expo. Math. – 2001. – Vol. 19, no. 1. –P. 25 – 53.

[17] Gray, J. W.*Some global properties of contact structures* / J. W. Gray // Ann. of Math. – 1959. – Vol. 69. – P. 421 – 450.

[18] Hamilton, R. S. *The Ricci flow on surfaces*/ R. S. Hamilton // Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), 237–262, Contemp. Math. **71**, American Math. Soc., 1988.

[19] Ivey, T. *Ricci solitons on compact 3-manifolds*/ T. Ivey // Differential Geom. Appl. – 1993. – Vol. 3. – P. 301 – 307.

[20] Koufogiorgos, T. *Contact metric manifolds*/ T. Koufogiorgos // Ann. Global Anal. Geom. – 1993. – Vol. 11. – P. 25 – 34.

[21] MacLane, S. *Geometrical mechanics* II / S. MacLane. – Lecture notes, University of Chicago, 1968.

[22] Nazaikinskii, V. E. *Contact geometry and linear differential equations* / V. E. Nazaikinskii, V. E. Shatalov and B. Y. Sternin. – Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[23] Okumura, M. *Some remarks on space with a certain contact structure* / M. Okumura // Tôhoku Math. J. – 1962. – Vol. 14. – P. 135 – 145.

[24] Perelman, G. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*/ G. Perelman. – Preprint, http://arXiv.org/abs/Math.DG/0211159.

[25] Sasaki, S. *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure.* I / S. Sasaki // Tôhoku Math. J. – 1960. – Vol. (2) 12. – P. 459 – 476.

[26] Sasaki, S. *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds* II / S. Sasaki // Tôhoku Math. J. – 1962. – Vol. (2) 14. – P. 146 – 155.

[27] Sasaki, S., Hatakeyama, Y. *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure* . II / S. Sasaki, Y. Hatakeyama // Tôhoku Math. J. – 1961. – Vol. (2) 13. – P. 281 – 294.

[28] Sharma, R. *Certain results on K-contact and (k,μ)-contact manifolds*/ R. Sharma //, J. Geom. – 2008. – Vol. 89, no. 1 – 2. – P. 138 – 147.

[29] Sharma, R. *Sasakian 3-manifold as a Ricci Soliton represents the Heisenberg group* / R. Sharma, A. Ghosh // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2011. – Vol. 8, no. 1. – P. 149 – 154.

[30] Tanno, S. *The topology of contact Riemannian manifolds* / S. Tanno // Illinois J. Math. – 1968. – Vol. 12. – P. 700 – 717.

[31] Tanno, S. *Some differential equations on Riemannian manifolds* / S. Tanno // J. Math. Soc. Japan. – 1978. – Vol. 30. – P. 509 – 531.

[32] Tanno, S. *Ricci curvatures of contact Riemannian manifolds* / S. Tanno // Tôhoku Math. J. – 1988. – Vol. 40. – P. 441 – 448.

[33] Tashiro, Y. *On contact structure of tangent sphere bundles* / Y. Tashiro // Tôhoku Math. J. – 1969. – Vol. 21. – P. 117 – 143.

[34] Tripathi, M. M. and Kim, J.-S. *On the concircular curvature tensor of a (κ,μ)-manifold*/ M. M. Tripathi and J.-S. Kim // Balkan J. Geom. Appl. – 2004. – Vol. 9, no. 1. – P. 114 – 124.

УДК 515.164.13

БАНАХОВО МНОГООБРАЗИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ВПОЛНЕ ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА

В. Н. Черненко

BANACH MANIFOLD OF INTEGRAL CURVES OF COMPLETELY PARALLELIZABLE PFAFFIAN SYSTEM

V. N. Chernenko

В данной работе изучается множество интегральных кривых вполне параллелизуемой системы Пфаффа. Показано, что это множество является банаховым многообразием.

In this paper we study the set of integral curves completely parallelizable Pfaffian system. It is shown that this set is a Banach manifold.

Ключевые слова: система Пфаффа, интегральные кривые, банахово многообразие.

Keywords: Pfaffian system, integral curves, Banach manifold.

Пусть M – гладкое паракомпактное n-мерное C^s-многообразие без края, $s \geq 4$. Напомним, что системой Пфаффа ранга r на многообразии M называется r-мерное C^{s-1}-подрасслоение σ кокасательного расслоения T^*M. Локальным сечением системы σ на открытом подмножестве $U \subset M$ называется дифференциальная 1-форма $\omega \in \Gamma(\sigma \mid_U)$ класса C^{s-1}. Для всякой точки $p \in M$ существует открытая окрестность $U \subset M$ и r локальных сечений ω^j, $j = 1, 2, \ldots, r$, системы σ на U, таких, что $\omega^j(q)$ образуют базис векторного пространства $\sigma_q = \sigma \bigcap T^*_q M$ для любого $q \in U$. Систему форм будем в этом случае называть локальным базисом системы Пфаффа σ на множестве U. Если для локального базиса ω^j системы σ выполняется равенство $U = M$, то этот базис называется глобальным, а сама система σ в этом случае называется вполне параллелизуемой. Будем предполагать, что на многообразии M задана вполне параллелизуемая система Пфаффа σ ранга r, снабжённая глобальным базисом ω^j, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Обозначим через $\Omega(M) = C^1([\alpha, \beta], M)$ – множество C^1-кривых на M. Кривая $c \in \Omega(M)$ называется интегральной кривой системы σ, если $\dot{c}(t) \in \operatorname{Ann} \sigma_{c(t)}$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$. Другими словами, кривая c является интегральной кривой системы σ, если $\omega^j \mid_{c(t)} (\dot{c}(t)) = 0$ для любых $j = 1, 2, \ldots, r$ и $t \in [\alpha, \beta]$. Подмножество из $\Omega(M)$, состоящее из интегральных кривых системы σ на многообразии M, обозначим через $\Omega_\sigma(M)$. При данном $h = (h^1, \ldots, h^r) \in C^0([\alpha, \beta], \mathbf{R}^r)$ будем говорить, что кривая $c \in \Omega(M)$ имеет тип h относительно системы σ, если $\omega^j \mid_c (\dot{c}) = h^j$ для любого $j = 1, 2, \ldots, r$. Подмножество из $\Omega(M)$, состоящее из кривых типа h относительно системы σ на многообразии M, обозначим через $\Omega^h_\sigma(M)$. Таким образом, $\Omega_\sigma(M) = \Omega^0_\sigma(M)$.

Множество $\Omega(M)$ является бесконечномерным банаховым C^{s-3}-многообразием [1], [2]. Опишем дифференцируемую структуру на нём. Сначала введём на $\Omega(M)$ C^1-топологию Уитни [3], базу которой образуют подмножества вида $B(U) = \{c \in \Omega(M) : (j^1 c)([\alpha, \beta]) \subset U\}$, где U – произвольное открытое подмножество в пространстве $J^1([\alpha, \beta], M)$ 1-струй всевозможных кривых из $\Omega(M)$. Зададим на M риманову структуру g, которая индуцирует экспоненциальное отображение $\exp : D \to M$, где D – открытая окрестность нулевого сечения касательного расслоения TM. Обозначим через $\pi : TM \to M$ каноническую проекцию. Уменьшая в случае необходимости окрестность D, будем считать, что отображение $\pi \times \exp : D \to M \times M$ является диффеоморфизмом на свой образ [4]. Векторным полем вдоль $c \in \Omega(M)$ называется отображение $X : ([\alpha, \beta] \to TM)$, такое, что $\pi \circ X = c$. Множество C^1-векторных полей вдоль c является векторным пространством и естественным образом отождествляется с векторным пространством $\Gamma^1(c^*TM)$ C^1-сечений индуцированного расслоения c^*TM [3]. Риманова структура g определяет норму $\mid \mid : T_p M \to \mathbf{R}$ для каждой точки $p \in M$ и риманову ковариантную производную

$$\nabla : \Gamma^1(T[\alpha, \beta]) \times \Gamma^1(c^*TM) \longrightarrow \Gamma^0(c^*TM)$$

вдоль каждой кривой кривой $c \in \Omega(M)$ [4]. Определим на векторном пространстве $\Gamma^1(c^*TM)$ норму

$$\mid X \mid = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \mid X(t) \mid + \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \mid (\nabla_{\dot{c}} X)(t) \mid$$

для любого $X \in \Gamma^1(c^*TM)$. Тогда $\Gamma^1(c^*TM)$ становится банаховым пространством. Для каждой кривой $c \in \Omega(M)$ определим отображение

$$\Phi_c : \Gamma^1(c^*D) \longrightarrow \Omega(M)$$

формулой $\Phi_c(X) = \exp \circ X$. Это отображение является гомеоморфизмом на свой образ $\Phi_c(\Gamma^1(c^*D))$ и обратное отображение

$$\Phi_c^{-1} : \Phi_c(\Gamma^1(c^*D)) \longrightarrow \Gamma^1(c^*D)$$

является картой на $\Omega(M)$, центрированной в c. Все такие карты C^{s-3}-согласованы и превращают множество $\Omega(M)$ в банахово C^{s-3}-многообразие. Если $c \in \Omega(M)$, то касательное пространство $T_c\Omega(M)$ естественным образом отождествляется с пространством $\Gamma^1(c^*TM)$.

Для произвольного отображения $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \to M$ и чисел $t \in [\alpha, \beta]$, $\tau \in [0, \varepsilon]$ обозначим через $F_\tau : [\alpha, \beta] \to M$ и $F^t : [0, \varepsilon] \to M$ кривые, определенные, соответственно, формулами $F_\tau(t) = F(t, \tau)$ и $F^t(\tau) = F(t, \tau)$.

Определение 1. *Вариацией кривой $c \in \Omega(M)$ называется C^1-отображение $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \to M$, $\varepsilon > 0$, такое, что $F_0 = c$. Вариацию F будем называть $A^{1,1}$- вариацией, если для любой карты (U, φ) на M, такой, что $F^{-1}(U) \neq \emptyset$, частные производные*

$$\frac{\partial^2(\varphi \circ F \mid_{F^{-1}(U)})}{\partial t \partial \tau}$$

существуют и непрерывны.

Если F является $A^{1,1}$- вариацией, то для для любого $\tau \in [0, \varepsilon]$ векторное поле $X_\tau : [\alpha, \beta] \to TM$ вдоль F_τ, определённое формулой $X_\tau(t) = \dot{F}^t(\tau)$, принадлежит классу C^1. Каждую вариацию F кривой c можно рассматривать как путь $F^* : [0, \varepsilon] \to \Omega(M)$, определённый формулой $F^*(\tau) = F_\tau$. При этом $F^*(0) = c$. Если вариация F является $A^{1,1}$-вариацией, то путь F^* на многообразии $\Omega(M)$ является C^1-путём [5]. Его вектор скорости $\dot{F}^*(\tau)$ с точностью до указанного выше отождествления есть векторное поле X_τ. В дальнейшем любая вариация F предполагается $A^{1,1}$-вариацией.

Определение 2. *Вариация F интегральной кривой $c \in \Omega_\sigma(M)$ системы Пфаффа σ называется интегральной вариацией, если $F_\tau \in \Omega_\sigma(M)$ для* *любого* $\tau \in [0, \varepsilon]$. *Вариация* F *кривой* $c \in \Omega^h_\sigma(M)$ *типа* h *относительно системы Пфаффа* σ *называется вариацией типа* h, *если* $F_\tau \in \Omega^h_\sigma(M)$ *для любого* $\tau \in [0, \varepsilon]$.

Определение 3. *Пусть* F – *вариация кривой* $c \in \Omega(M)$ *и* $X \in \Gamma^1(c^*\mathrm{T}M)$ – *векторное поле вдоль* c. *Будем говорить, что* F *является вариацией в направлении поля* X, *если* $X_0 = X$.

Предложение 1. *Пусть* $c \in \Omega^h_\sigma(M)$ – *кривая типа* h *системы Пфаффа* σ *и* $X \in \Gamma^1(c^*\mathrm{T}M)$ – *векторное поле вдоль* c. *Вариация типа* h *кривой* c *в направлении поля* X *существует тогда и только тогда, когда поле* X *удовлетворяет условию*

$$\frac{d}{dt}(\omega^j\mid_c(X)) - (d\omega^j)\mid_c(\dot{c}, X) = 0 \qquad (1)$$

для любого $j = 1, \ldots, r$.

Доказательство. Пусть $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \to M$ – вариация типа h кривой c в направлении поля X. Возьмём произвольную точку $t \in [\alpha, \beta]$ и выберем в окрестности точки $c(t)$ карту многообразия M. Обозначим через F^i, c^i, X^i, $i = 1, 2, ..., n$, координатные функции, соответственно, вариации F, кривой c и поля X в этой карте. Тогда по определению вариации F кривой c в направлении поля X имеем:

$$F^i(t, 0) = c^i(t), \quad \frac{\partial F^i}{\partial \tau}(t, 0) = X^i(t). \qquad (2)$$

Обозначим $\omega^j = \omega^j_i(x^m)dx^i$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Тогда из определения типа вариации F следуют тождества:

$$\omega^j_i(F^m(t, \tau))\frac{\partial F^i}{\partial t}(t, \tau) = h^j(t), \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Дифференцируя их по τ при $\tau = 0$ и учитывая (2), получаем:

$$\frac{\partial \omega^j_i}{\partial x^k}(c^m(t))X^k(t)\dot{c}^i(t) + \omega^j_i(c^m(t))\dot{X}^i(t) = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{d}{dt}(\omega^j\mid_{c(t)}(X(t))) - (d\omega^j)\mid_{c(t)}(\dot{c}(t), X(t)) =$$
$$= \frac{\partial \omega^j_i}{\partial x^k}(c^m(t))\dot{c}^k(t)X^i(t) + \omega^j_i(c^m(t))\dot{X}^i(t) -$$
$$-(\frac{\partial \omega^j_i}{\partial x^k}(c^m(t))\dot{c}^k(t)X^i(t) - \frac{\partial \omega^j_i}{\partial x^k}(c^m(t))X^k(t)\dot{c}^i(t)) = 0.$$

Условие (1) выполнено.

Лемма. *Пусть в* $\mathbf{R}^n$ *задана вполне параллелизуемая система Пфаффа* θ *ранга* r, *определённая глобальным базисом* ν^j,

$$\nu^j(x^m) = \nu^j_i(x^m)dx^i, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \qquad (3)$$

такая, что

$$\det\|\nu^j_k(x^m)\| \neq 0, \quad k = 1, 2 \ldots, r, \qquad (4)$$

для любой точки $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$. *Пусть* $c : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ – C^1-*кривая типа* h *относительно системы* θ, $X : [a, b] \to \mathrm{T}\mathbf{R}^n$ – *векторное* C^1-*поле вдоль* c, $\varphi : [0, \varepsilon] \to \mathbf{R}^n$ – C^1-*кривая в* $\mathbf{R}^n$, $Y : [0, \varepsilon] \to \mathrm{T}\mathbf{R}^n$ – *векторное* C^1- *поле вдоль* φ. *Предположим, что выполнены условия:*

$$c(a) = \varphi(0), \ \dot{c}(a) = Y(0), \ X(a) = \dot{\varphi}(0), \ \dot{X}(a) = \dot{Y}(0); \qquad (5)$$

$$\nu^j\mid_\varphi(Y) = h^j(a), \ j = 1, 2, \ldots, r; \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}(\nu^j\mid_c(X)) - (d\nu^j)\mid_c(\dot{c}, X) = 0, \ j = 1, \ldots, r. \qquad (7)$$

Тогда существует вариация $F : [a, b] \times [0, \varepsilon] \to \mathbf{R}^n$ *типа* h *относительно системы* θ *кривой* c *в направлении поля* X *такая, что*

$$F^a = \varphi, \quad \frac{dF_\tau}{dt}(a) = Y(\tau), \quad \tau \in [0, \varepsilon]. \qquad (8)$$

Доказательство леммы. Обозначим через c^i, φ^i, X^i, Y^i, $i = 1, 2, ..., n$, координатные функции, соответственно, отображений c, φ, X, Y. Определим отображение $\tilde{F} : [a, b] \times [0, \varepsilon] \to \mathbf{R}^n$ при помощи координатных функций $\tilde{F}^i$, полагая

$$\tilde{F}^i(t, \tau) = c^i(t) + \varphi^i(\tau) + \tau(X^i(t) - X^i(a)) +$$
$$+ (t - a)(Y^i(\tau) - Y^i(0)) - \tau(t - a)\dot{X}^i(a) - c^i(a).$$

Тогда $\tilde{F}$ является $A^{1,1}$- вариацией кривой c. Непосредственно проверяется выполнение следующих равенств:

$$\tilde{F}^i(a, \tau) = \varphi^i(\tau), \ \tilde{F}^i(t, 0) = c^i(t),$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial t}(a, \tau) = Y^i(\tau), \ \frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial \tau}(t, 0) = X^i(t). \qquad (9)$$

Будем искать вариацию F типа h кривой c, определённую координатными функциями

$$\begin{cases} F^k(t, \tau) = \tilde{F}^k(t, \tau) + f^k(t, \tau), & k = 1, 2, \ldots, r; \\ F^l(t, \tau) = \tilde{F}^l(t, \tau), & l = r + 1, \ldots, n, \end{cases} \qquad (10)$$

где функции $f^k(t, \tau)$ пока неизвестны. Для их определения подставим (10) в равенства $\nu^j\mid_{F_\tau}(\dot{F}_\tau) = h^j$, $j = 1, 2, \ldots, r$, вытекающие из определения типа вариации. В результате получим следующие уравнения:

$$\nu^j_k(\tilde{F}^k(t,\tau)+f^k(t,\tau),\tilde{F}^l(t,\tau))(\frac{\partial \tilde{F}^k}{\partial t}(t,\tau)+\frac{\partial f^k}{\partial t}(t,\tau))+$$
$$+\nu^j_m(\tilde{F}^k(t,\tau)+f^k(t,\tau),\tilde{F}^l(t,\tau))\frac{\partial \tilde{F}^m}{\partial t}(t,\tau)=h^j(t),\quad m=r+1,...,n. \tag{11}$$

Учитывая (4), разрешим систему (11) относительно $(\partial f^k/\partial t)(t,\tau)$, получив эквивалентную систему вида

$$\frac{\partial f^k}{\partial t}(t,\tau)=G(t,\tau,f^j(t,\tau)),\quad j,k=1,2,\ldots,r. \tag{12}$$

Легко проверяется, что из равенств (6), (7), (9) вытекают тождества:

$$G^k(a,\tau,0)=0,\ G^k(t,0,0)=0,\ \frac{\partial G^k}{\partial \tau}(t,0,0) \tag{13}$$

для $k=1,2,\ldots,r$. Будем теперь считать, что функции $f^k=f^k(t,\tau)$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12), зависящей от параметра τ, при начальных условиях

$$f^k(a,\tau)=0. \tag{14}$$

Тогда функции $f^k=f^k(t,\tau)$ принадлежат классу C^1 и производные $(\partial^2 f^k/\partial t\partial\tau)(t,\tau)$ непрерывны [6]. Поэтому вариация F, определённая системой (10), является $A^{1,1}$-вариацией. При этом, в силу (11), вариация F имеет тип h относительно системы θ. Заметим, что при $\tau=0$, в силу (13), набор из r нулевых функций является решением системы (12), удовлетворяющим условию (14), и, в силу единственности решения [6], имеем тождества

$$f^k(t,0)=0. \tag{15}$$

Из этих тождеств следует, что F является вариацией пути c. Решение (15) определено на компактном множестве $[a,b]$, поэтому, уменьшая, если это необходимо, число ε, можно считать, что все решения $f^k=f^k(t,\tau)$ определены на отрезке $[a,b]$ для любого значения параметра $\tau\in[0,\varepsilon]$.

Подставляя в (12) значение $t=a$ и используя (13) и (14), убеждаемся, что

$$\frac{\partial f^k}{\partial t}(a,\tau)=0. \tag{16}$$

Равенства (14) и (16) вместе с (9) и (10) влекут (8). Далее замечаем, что, в силу (12), функции $g^k=\partial f^k/\partial\tau$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial g^k}{\partial t}(t,\tau)=\frac{\partial G^k}{\partial \tau}(t,\tau,f^j(t,\tau))+$$
$$+\frac{\partial G^k}{\partial f^m}(t,\tau,f^j(t,\tau))g^m(t,\tau), \tag{17}$$

$j,k,m=1,2,\ldots,r$, зависящей от параметра τ с неизвестными функциями $g^k(t,\tau)$ при начальном условии $g^k(a,\tau)=0$. Набор из r нулевых функций является решением системы (17) при $\tau=0$ и поэтому, в силу единственности решения, имеем $(\partial f^k/\partial\tau)(t,0)=0$. Отсюда и из (9) и (10) следует, что F – вариация в направлении поля X. Лемма доказана.

Окончание доказательства предложения 1. Пусть векторное поле X вдоль кривой c удовлетворяет условию (1). Покроем компактное множество $c([\alpha,\beta])\subset M$ конечным числом координатных областей $U_1,U_2,...,U_m$ карт (U_q,ψ_q), где $\psi_q(U_q)=\mathbf{R}^n$, так, чтобы существовало разбиение $\alpha=\alpha_0<\alpha_1<...<\alpha_m=\beta$ отрезка $[\alpha,\beta]$, такое, что $c([\alpha_{q-1},\alpha_q])\subset U_q$, $q=1,2,\ldots,m$, и базис $\nu^j=\omega^j\mid_{U_q}$ системы $\sigma\mid_{U_q}$ удовлетворял в каждой карте (U_q,ψ_q) условию (4). В области U_1 определим кривую $\varphi:\ [0,\varepsilon]\to U_1$ с помощью координатных функций $\varphi^i(\tau)=c^i(\alpha_0)+\tau X^i(\alpha_0)$, $i=1,2,\ldots,n$, где c^i и X^i – координатные функции, соответственно, кривой $c\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$ и поля $X\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$. Тогда φ удовлетворяет первому и третьему из условий (5) для кривой $c\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$ и поля $X\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$, кривая $c\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$ имеет тип $h\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$ относительно системы Пфаффа $\sigma\mid_{U_1}$ и выполнено условие (7). Далее определим векторное поле $Y:\ [0,\varepsilon]\to TU_1$ вдоль φ координатными функциями $Y^i=Y^i(\tau)$, $i=1,\ldots,n$, где $Y^l(\tau)=\dot{c}^l(\alpha_0)+\tau\dot{X}^l(\alpha_0)$, $l=r+1,\ldots,n$, а $Y^k(\tau)$ единственным образом находится из уравнений:

$$\omega^j_k(\varphi^i(\tau))Y^k(\tau)+\omega^j_l(\varphi^i(\tau))Y^l(\tau)=h^j(\alpha_0), \tag{18}$$

$j,k=1,2,\ldots,r$, что возможно в силу (4). Поэтому поле Y удовлетворяет условию (6). Заметим, что

$$Y^l(0)=\dot{c}^l(\alpha_0),\quad \dot{Y}^l(0)=\dot{X}^l(\alpha_0). \tag{19}$$

Равенство (18) с учетом (19) и первого из равенств (5) при $\tau=0$ превращается в равенство

$$\omega^j_k(c^i(\alpha_0))Y^k(0)+\omega^j_l(c^i(\alpha_0))\dot{c}^l(\alpha_0)=h^j(\alpha_0). \tag{20}$$

Поскольку кривая $c\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$ имеет тип $h\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$, то

$$\omega^j_k(c^i(\alpha_0))\dot{c}^k(\alpha_0)+\omega^j_l(c^i(\alpha_0))\dot{c}^l(\alpha_0)=h^j(\alpha_0). \tag{21}$$

Из равенств (20) и (21) следует, что $Y^k(0)=\dot{c}^k(\alpha_0)$, что вместе с (19) влечёт второе из условий (5). Дифференцируя (18) по τ при $\tau=0$ и учитывая второе и третье из условий (5) и второе из условий (19), имеем:

$$\frac{\partial\omega^j_{i_1}}{\partial x^{i_2}}(c^i(\alpha_0))X^{i_2}(\alpha_0)\dot{c}^{i_1}(\alpha_0)+\omega^j_k(c^i(\alpha_0))\dot{Y}^k(0)+$$
$$+\omega^j_l(c^i(\alpha_0))\dot{X}^l(\alpha_0)=0,\quad i_1,i_2=1,2,\ldots,n. \tag{22}$$

В свою очередь, равенство (7) в координатах при $t = \alpha_0$ имеет вид:

$$\frac{\partial \omega^j_{i_1}}{\partial x^{i_2}}(c^i(\alpha_0))X^{i_2}(\alpha_0)\dot{c}^{i_1}(\alpha_0) + \omega^j_k(c^i(\alpha_0))\dot{X}^k(\alpha_0)+$$

$$+\omega^j_l(c^i(\alpha_0))\dot{X}^l(\alpha_0) = 0. \qquad (23)$$

Из равенств (22) и (23) в силу (4) следует равенство $\dot{Y}^k(0) = \dot{X}^k(\alpha_0)$, что вместе с (19) влечёт четвёртое из условий (5). Поэтому для системы Пфаффа $\sigma\mid_{U_1}$ с базисом $\omega^j\mid_{U_1}$, кривых $c\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$, φ и полей $X\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$, Y выполнены все условия леммы. Применяя лемму, получаем вариацию $F_{(1)} : [\alpha_0, \alpha_1] \times [0,\varepsilon] \to U_1 \subset M$ типа $h\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$ кривой $c\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$ в направлении поля $X\mid_{[\alpha_0,\alpha_1]}$. Далее, по индукции, предположим, что мы построили вариацию $F_{(p)} : [\alpha_0, \alpha_p]\times[0,\varepsilon] \to M$, $p = 1, 2, \ldots, m-1$, типа $h\mid_{[\alpha_0,\alpha_p]}$ кривой $c\mid_{[\alpha_0,\alpha_p]}$ в направлении поля $X\mid_{[\alpha_0,\alpha_p]}$. Тогда

$$F_{(p)}(t,0) = c\mid_{[\alpha_0,\alpha_p]}(t),\ \omega^j\mid_{F_{(p)}(t,\tau)}(\frac{\partial F_{(p)}}{\partial t}(t,\tau)) =$$

$$= h^j\mid_{[\alpha_0,\alpha_p]}(t),\ \frac{\partial F_{(p)}}{\partial \tau}(t,0) = X\mid_{[\alpha_0,\alpha_p]}(t). \qquad (24)$$

Положим

$$\varphi(\tau) = F_{(p)}(\alpha_p,\tau),\quad Y(\tau) = \frac{\partial F_{(p)}}{\partial t}(\alpha_p,\tau). \qquad (25)$$

Тогда из (24) и (25) вытекает, что:

$$c\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}(\alpha_p) = \varphi(0),\quad \dot{c}\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}(\alpha_p) = Y(0),$$

$$X\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}(\alpha_p) = \dot{\varphi}(0),$$

$$\dot{X}\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}(\alpha_p) = \dot{Y}\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}(0),$$

$$\omega^j\mid_{\varphi(\tau)}(Y(\tau)) = h^j\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}(\alpha_p).$$

Поэтому для системы Пфаффа $\sigma\mid_{U_{p+1}}$ с базисом $\omega^j\mid_{U_{p+1}}$, кривых $c\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}$, φ и полей $X\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}$, Y выполнены все условия леммы. Применяя лемму, получаем вариацию $\tilde{F}_{(p+1)} : [\alpha_p, \alpha_{p+1}]\times[0,\varepsilon] \to \to U_{p+1} \subset M$, типа $h\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}$ кривой $c\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}$ в направлении поля $X\mid_{[\alpha_p,\alpha_{p+1}]}$, удовлетворяющую условию (8), которое в силу (25) превращается в тождества

$$\tilde{F}_{(p+1)}(\alpha_p,\tau) = F_{(p)}(\alpha_p,\tau), \qquad (26)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_{(p+1)}}{\partial t}(\alpha_p,\tau) = \frac{\partial F_{(p)}}{\partial t}(\alpha_p,\tau). \qquad (27)$$

Из них вытекает, что

$$\frac{\partial \tilde{F}_{(p+1)}}{\partial \tau}(\alpha_p,\tau) = \frac{\partial F_{(p)}}{\partial \tau}(\alpha_p,\tau), \qquad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_{(p+1)}}{\partial t\partial \tau}(\alpha_p,\tau) = \frac{\partial^2 F_{(p)}}{\partial t\partial \tau}(\alpha_p,\tau). \qquad (29)$$

Пользуясь равенствами (26), произведём склейку вариаций $F_{(p)}$ и $\tilde{F}_{(p+1)}$ вдоль координатной линии $t = \alpha_p$, получив непрерывное отображение $F_{(p+1)} : [\alpha_0, \alpha_{p+1}] \times [0,\varepsilon] \to M$. Равенства (27), (28) гарантируют, что отображение $F_{(p+1)}$ будет класса C^1, а равенство (29) влечёт, что $F_{(p+1)}$ будет $A^{(1,1)}$-вариацией кривой $c\mid_{[\alpha_0,\alpha_{p+1}]}$ типа $h\mid_{[\alpha_0,\alpha_{p+1}]}$ в направлении поля $X\mid_{[\alpha_0,\alpha_{p+1}]}$. При $p = m-1$ получаем искомую вариацию $F = F_{(m)} : [\alpha,\beta]\times[0,\varepsilon] \to M$ типа h кривой c в направлении поля X. Предложение 1 доказано.

Замечание 1. Условие (1) неформально можно записать в виде $(\mathrm{L}_X\omega^j)(\dot{c}) = 0$.

Замечание 2. Условие (1) линейно по X, поэтому для произвольной кривой $c \in \Omega(M)$ выделяет в пространстве $\mathrm{T}_c\Omega(M) = \Gamma^1(c^*\mathrm{T}M)$ подпространство $D_\sigma(c)$.

Предложение 2. *Если $c \in \Omega_\sigma(M)$, то $\dot{c} \in D_\sigma(c)$.*

Доказательство. Подставляя $\dot{c}$ в условие (1), и учитывая тождества $\omega^j\mid_c(\dot{c}) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, вытекающие из интегральности кривой c, убеждаемся, что $\dot{c} \in D_{\sigma(c)}$. Предложение доказано.

Отображение $D_\sigma : c \to D_\sigma(c)$ является распределением на многообразии $\Omega(M)$ [4]. C^1-путь $\mu : I \to \Omega(M)$, где I – интервал из $\mathbf{R}$, называется интегральным путём распределения D_σ, если $\dot{\mu}(\tau) \in D_\sigma(\mu(\tau))$ для любого $\tau \in I$.

Предложение 3. *Пусть $F : [\alpha,\beta]\times[0,\varepsilon] \to M$ – вариация кривой $c \in \Omega(M)$. Путь $F^* : [0,\varepsilon] \to \Omega(M)$ является интегральным путём распределения D_σ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\omega^j\mid_{F_\tau}(\dot{F}_\tau)) = 0 \qquad (30)$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, r$ и любого $\tau \in [0,\varepsilon]$.

Доказательство. Интегральность пути F^* означает, что для любого $\tau \in [0,\varepsilon]$ касательный вектор $X_\tau = \partial F/\partial \tau$ пути F^* в точке τ принадлежит $D_\sigma(F_\tau)$. Это, в свою очередь, означает, что для любого $j = 1, 2, \ldots, r$ должно удовлетворяться соотношение (1), то есть

$$\frac{d}{dt}(\omega^j\mid_{F_\tau}(X_\tau)) - (d\omega^j)\mid_{F_\tau}(\dot{F}_\tau, X_\tau) = 0. \qquad (31)$$

Остаётся доказать эквивалентность (30) и (31). Для этого выберем в окрестности точки $F(t,\tau)$ карту многообразия M, в которой F определяется координатными функциями F^i, $i = 1, 2, ..., n$, и $\omega^j = \omega^j_i(x^m)dx^i$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Тогда (31) в координатах после очевидных сокращений примет вид:

$$\frac{\partial \omega^j_i}{\partial x^k}(F^m(t,\tau))\frac{\partial F^k}{\partial \tau}(t,\tau)\frac{\partial F^i}{\partial t}(t,\tau)+$$

$$+\omega^j_i(F^m(t,\tau))\frac{\partial^2 F^i}{\partial t\partial \tau}(t,\tau) = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Но точно такой же вид в координатах принимает и соотношение (30). Предложение доказано.

Определим отображение $\gamma : \Omega(M) \to C^0([\alpha,\beta],\mathbf{R}^r)$ формулой

$$\gamma(c) = (\omega^1 \mid_c (\dot c), \omega^2 \mid_c (\dot c), \dots, \omega^r \mid_c (\dot c)).$$

Предложение 4. *Отображение γ является C^{s-3}-субмерсией.*

Доказательство. Базис ω^j системы σ определяет отображение $g : TM \to \mathbf{R}^r$ класса C^{s-1}. Множество $C^0([\alpha,\beta],TM)$ является банаховым C^{s-3}-многообразием [2], поэтому отображение

$$\omega_g : C^0([\alpha,\beta],TM) \longrightarrow C^0([\alpha,\beta],\mathbf{R}^r),$$

определённое формулой $\omega_g(X) = g \circ X$, по ω-теореме принадлежит классу C^{s-3} [2]. Пусть

$$j^1 : \Omega(M) = C^1([\alpha,\beta],M) \longrightarrow C^0([\alpha,\beta],TM)$$

1-струйное расширение, являющееся C^{s-3}-вложением [2], и так как $\gamma = \omega_g \circ j^1$, то γ принадлежит классу C^{s-3}. Далее зафиксируем кривую $c \in \Omega(M)$ и вектор $Y \in \mathrm{T}_{\gamma(c)} C^0([\alpha,\beta],\mathbf{R}^r)$ и будем искать вектор $X \in \mathrm{T}_c\Omega(M)$, такой, что

$$d\gamma \mid_c (X) = Y. \qquad (32)$$

Для этого сначала предположим, что $c([\alpha,\beta])$ принадлежит области U некоторой карты на M. Обозначим через c^i, X^i, Y^j, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,r$, координатные функции, соответственно, кривой c и полей X, Y. Обозначим также $\omega^j = \omega^j_i(x^m)dx^i$, $m = 1,2,\dots,n$. Определим вариацию $F : [\alpha,\beta] \times [0,\varepsilon] \to U \subset M$ кривой c в направлении поля X координатными функциями

$$F^i(t,\tau) = c^i(t) + \tau X^i(t).$$

Тогда $F^*(0) = c$ и $\dot F^*(0) = X$. Поэтому

$$d\gamma \mid_c (X) = \frac{\partial(\gamma \circ F^*)}{\partial \tau} \mid_{\tau=0}$$

и уравнение (32) в координатах перепишется в виде:

$$\frac{\partial \omega^j_i}{\partial x^k}(c^m(t))X^k(t)\dot c^i(t) + \omega^j_i(c^m(t))\dot X^i(t) = Y^j(t). \qquad (33)$$

В силу того, что rank $\parallel \omega^j_i(x^m) \parallel = r$, это уравнение всегда имеет C^1-решение $X^i = X^i(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$. В общем случае, когда компактное множество $c([\alpha,\beta])$ не покрывается одной картой, покроем его конечным числом карт и будем строить поле X вдоль кривой c последовательно в каждой из этих карт, обеспечивая его C^1-гладкость с помощью начальных условий для системы (33). Предложение доказано.

Предложение 5. *Для любого $h \in C^0([\alpha,\beta],\mathbf{R}^r)$ множество $\Omega^h_\sigma(M)$ кривых типа h относительно системы σ на многообразии M является банаховым C^{s-3}-многообразием, вложенным в банахово C^{s-3}-многообразие $\Omega(M)$.*

Доказательство. По определению типа кривой имеем равенство $\Omega^h_\sigma(M) = \gamma^{-1}(h)$ и в силу предложения 4 множество $\Omega^h_\sigma(M)$ является вложенным подмногообразием многообразия $\Omega(M.)$

Следствие. *Семейство*

$$\{\Omega^h_\sigma(M) : h \in C^0([\alpha,\beta],\mathbf{R}^r)\}$$

образует C^{s-3}-слоение на многообразии $\Omega(M)$.

Замечание. Слоение $\{\Omega^h_\sigma(M)\}$ зависит от выбора базиса ω^j системы σ, однако его слой $\Omega_\sigma(M)$, состоящий из интегральных кривых системы σ, от этого выбора не зависит.

Предложение 6. *Для любого $h \in C^0([\alpha,\beta],\mathbf{R}^r)$ и любого пути $c \in \Omega^h_\sigma(M)$ касательное пространство $\mathrm{T}_c\Omega^h_\sigma(M)$ совпадает с пространством $D_\sigma(c)$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathrm{T}_c\Omega^h_\sigma(M)$. Тогда существует C^1-путь $\mu : [0,\varepsilon] \to \Omega^h_\sigma(M)$ такой, что $\mu(0) = c$ и $\dot\mu(0) = X$. Путь μ определяет вариацию $F : [\alpha,\beta] \times [0,\varepsilon] \to M$ формулой $F(t,\tau) = (\mu(\tau))(t)$. Эта вариация кривой c в направлении поля X имеет тип h и по предложению 1 поле X удовлетворяет условию (1), откуда $X \in D_\sigma(c)$. Обратно, пусть $X \in D_\sigma(c)$. Тогда X удовлетворяет условию (1) и по предложению 1 существует вариация $F : [\alpha,\beta] \times [0,\varepsilon] \to M$ типа h кривой c в направлении поля X. Эта вариация определяет путь $F^* : [0,\varepsilon] \to \Omega^h_\sigma(M)$, такой, что $F^*(0) = c$ и $\dot F^*(0) = X$, и поэтому $X \in \mathrm{T}_c\Omega^h_\sigma(M)$. Предложение доказано.

Следствие. *Распределение D_σ совпадает с касательным распределением к слоению $\{\Omega^h_\sigma(M)\}$.*

Предложение 7. *Если многообразие M связно, то банахово многообразие $\Omega_\sigma(M)$ также связно.*

Доказательство. Пусть $c_1, c_2 \in \Omega_\sigma(M)$. Из связности M вытекает его линейная связность и поэтому существует кривая $c \in C^0([1,2],M)$, такая, что $c(1) = c_1(\alpha)$, $c(2) = c_2(\alpha)$. Для произвольной точки $x \in M$ обозначим через $c_x : [\alpha,\beta] \to M$ постоянное отображение в эту точку. Тогда $c_x \in \Omega_\sigma(M)$. Определим отображение $\hat c_1 : [0,1] \to \Omega_\sigma(M)$ формулой $(\hat c_1(\tau))(t) = c_1(t(1-\tau) + \alpha\tau)$, $\tau \in [0,1]$, $t \in [\alpha,\beta]$. Тогда $\hat c_1$ – непрерывно [5] и

$$\hat c_1(0) = c_1, \quad \hat c_1(1) = c_{c_1(\alpha)}. \qquad (34)$$

Определим отображение $\hat c : [1,2] \to \Omega_\sigma(M)$ формулой $(\hat c(\tau))(t) = c(\tau)$, $\tau \in [1,2]$, $t \in [\alpha,\beta]$. Тогда $\hat c$ – непрерывно и

$$\hat c(1) = c_{c_1(\alpha)}, \quad \hat c(2) = c_{c_2(\alpha)}. \qquad (35)$$

Определим отображение $\hat{c}_2 : [2,3] \to \Omega_\sigma(M)$ формулой $(\hat{c}_2(\tau))(t) = c_2(t(\tau-2)+\alpha(3-\tau))$, $\tau \in [2,3]$, $t \in [\alpha,\beta]$. Тогда $\hat{c}_2$ – непрерывно и

$$\hat{c}_2(2) = c_{c_2(\alpha)}, \quad \hat{c}_2(3) = c_2. \tag{36}$$

Отображение $\mu : [0,3] \to \Omega_\sigma(M$, определённое формулой

$$\mu(\tau) = \begin{cases} \hat{c}_1(\tau), & 0 \le \tau \le 1, \\ \hat{c}(\tau), & 1 \le \tau \le 2, \\ \hat{c}_2(\tau), & 2 \le \tau \le 3, \end{cases}$$

определено и непрерывно в силу (34)-(36) и удовлетворяет условию $\mu(0) = c_1$, $\mu(3) = c_2$. Таким образом, многообразие $\Omega_\sigma(M)$ линейно связно и поэтому связно. Предложение доказано.

Литература

[1] Eliasson, H. I. *Geometry of Manifolds of Maps* / H. I. Eliasson // J. Differential Geometry. – 1967. – no. 1. – P. 169 – 194.

[2] Ленг, С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий* / С. Ленг – М.: Мир, 1967. – 204 с.

[3] Голубицкий, М. *Устойчивые отображения и их особенности* / М. Голубицкий, В. Гийемин – М.: Мир, 1977. – 292 с.

[4] Громол, Д. *Риманова геометрия в целом* / Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер. – М.: Мир, 1971. – 344 с.

[5] Бурбаки, Н. *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов* / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1975 – 222 с.

[6] Понтрягин, Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* / Л. С. Понтрягин. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 312 с.

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 515.17 + 517.545

ДИВИЗОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М. И. Головина

DIVISORS THE PRYM DIFFERENTIALS ON RIEMANN SURFACE

M. I. Golovina

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики [1-4]. Цель работы — получить новые свойства мероморфных дифференциалов Прима и абелевых дифференциалов на переменной компактной римановой поверхности и для переменных характеров, в связи с дивизорами.

The theory of multiplicative functions and Prym differentials on a compact Riemann surface has found numerous applications in function theory, analytic number theory and equations of mathematical physics [1-4]. The work purpose — to receive new properties of meromorphic Prym differentials and abelians differentials on variable compact Riemann surfaces and variable character, in connection with divisors.

Ключевые слова: дифференциал Прима, дивизоры, абелевы дифференциалы, переменная риманова поверхность, переменные характеры, мероморфные дифференциалы.

Keywords: Prym differential, divisors, abelians differentials, variable Riemann surfaces, variable characters, meromorphic differentials.

Работа поддержана грантами: АВЦП, 2.1.1.3707; ФЦП, №-02.740.11.0457; РФФИ 11 - 01 - 90709.

1. Предварительные сведения

Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 — риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0, Γ изоморфна $\pi_1(F)$, и эта группа имеет представление $\Gamma = \langle A_1, ..., A_g, B_1, ..., B_g : \prod_{j=1}^{g} C_j = I\rangle$, где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}, j = 1, ..., g$, а I — тождественное отображение [5].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0. Пусть $M(F)$ — множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0, $Diff_0(F)$ — группа сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, состоящая из всех диффеоморфизмов гомотопных тождественному диффеоморфизму на F_0. Группа $Diff_0(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in Diff_0(F), \mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_g(F) = \mathbb{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/Diff_0(F)$ [5].

Так как отображение $U \to F_0 = U/\Gamma$ локальный диффеоморфизм, то любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до $\Gamma-$дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L_\infty(U), \|\mu\|_\infty = esssup_{z\in U}|\mu(z)| < 1$, и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z), z \in U, T \in \Gamma$.

Если $\Gamma-$дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbb{C}}\backslash U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\overline{z}} = \mu(z)w_z$. Отображение $T \to T^\mu = w^\mu T(w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу

$$\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1} = \langle A_1^\mu, ..., B_g^\mu : \prod_{j=1}^{g} [A_j^\mu, B_j^\mu] = I\rangle.$$

Классический результат Л. Альфорса, Л. Берса [5] утверждает, что пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_g(F)$ является комплексно аналитическим многообразием размерности $3g - 3$ при $g \geq 2$. В работе Л. Берса [5, с. 99] построен канонический базис голоморфных дифференциалов

$$\zeta_1 = \zeta_1([\mu], \xi)d\xi, ..., \zeta_g = \zeta_g([\mu], \xi)d\xi$$

для поверхности F_μ, двойственный к каноническому гомотопическому базису $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ на F_μ.

Указанный базис голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной компактной римановой поверхности F_μ. Кроме того, матрица $b-$периодов $\Omega(\mu) = = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^g$ на F_μ состоит из комплексных чисел

$$\pi_{jk}[\mu] = \int\limits_{\xi}^{B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w)dw,\ \xi \in w^\mu(U)$$

и голоморфно зависит от $[\mu]$.

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), ..., \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu)) \in (\mathbb{C}^*)^{2g}$. Характер называется нормированным, если все его значения лежат на окружности

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Определение 1.1. *$m-$дифференциалом Прима для ρ, относительно фуксовой группы* Γ, *или $(\rho, m)-$дифференциалом, называется дифференциал $\phi = \phi(z)dz^m$, такой, что*

$$\phi(Tz)(T'z)^m = \rho(T)\phi(z), z \in U, T \in \Gamma, \rho : \Gamma \to \mathbb{C}^*.$$

В частности, при $m = 0$, это мультипликативная функция для ρ относительно Γ.

Если f_0 — мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то $\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\zeta_j([\mu])$ и

$$f_0([\mu], P) = \exp \int\limits_{P_0[\mu]}^{P} 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu], \rho) \in \mathbb{C}$, $j = 1, ..., g$, c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ. При этом интегрирование ведется от фиксированной точки $P_0[\mu]$ до текущей точки P на переменной поверхности F_μ, и $s[\mu]$ — сечение К. Эрла [6] над $U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g$. Отсюда получаем, что характер ρ для f_0 имеет вид: $\rho(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho)$, $\rho(b_k^\mu) = = \exp(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\pi_{jk}([\mu])), k = 1, ..., g$.

Будем называть такие характеры ρ *несущественными*, а f_0 (с таким характером) – *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1}...P_k^{n_k}, P_j \in F_\mu, n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, ..., k$.

Теорема Римана-Роха для характеров. [2; 4]. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство $r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D)$.*

Теорема Абеля для характеров. [2; 4]. *Пусть D — дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $[F_\mu, \{a_1^\mu, ..., a_g^\mu, b_1^\mu, ..., b_g^\mu\}]$ рода $g \geq 1$ и ρ — характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера ρ, если и только если $\deg D = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} \log \rho(b_j^\mu)e^{(j)}[\mu] - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} \log \rho(a_j^\mu)\pi^{(j)}[\mu] (= \psi(\rho, [\mu]))$$

в $\mathbb{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu], ..., e^{(g)}[\mu]$, $\pi^{(1)}[\mu], ..., \pi^{(g)}[\mu]$ матрицы $a^\mu-$периодов и $b^\mu-$периодов на F_μ, где $\varphi[\mu]$ – отображение Якоби из F_μ в многообразие Якоби $J(F_\mu) = \mathbb{C}^g/L(F_\mu)$.

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi : w^\mu(U) \to \mathbb{C}^g$ по правилу:

$$\varphi_j(\xi) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w)dw, j = 1, ..., g.$$

Тогда φ индуцирует послойное голоморфное вложение из F_μ в $J(F_\mu)$. Универсальное многообразие Якоби рода g есть расслоенное пространство над $\mathbb{T}_g$, слой которого над $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ есть якобиан $J(F_\mu)$ для поверхности F_μ [6].

Далее, для любого натурального числа $n > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbb{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на компактной римановой поверхности F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n, который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_n из этого расслоения на универсальное расслоение Якоби, $n \geq 1$, ограничение которого на слои является продолжением классического отображения Якоби $\varphi : F_\mu \to J(F_\mu)$. Известно, что для $n = g$ отображение $\varphi : F_g[\mu] \backslash F_g^1[\mu] \to W_g[\mu] \backslash W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu]$ — $g-$кратное симметрическое произведение поверхности F_μ и $W_g^1[\mu] = \varphi(F_g^1[\mu])$ имеет комплексную размерность, не превышающую $g - 2$ [2; 4]. Локальные голоморфные сечения этих расслоений над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g$ можно получить (для любого $n \geq 1$) из локальных голоморфных сечений К. Эрла s для $\Phi : M(F) \to \mathbb{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [6]. Отметим, что, по теореме Л. Берса [5, с. 99], отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$.

2. Элементарные дифференциалы Прима

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют так называемые элементарные дифференциалы [2; 4; 5] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса и голоморфно зависящие от характеров ρ и от модулей $[\mu]$ римановых поверхностей.

Теорема 2.1. *1) Для любого существенного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$, натурального числа $q \geq 1$ и несущественного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$, натурального числа $q > 1$ существует элементарный $(\rho, q)-$дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом $Q_1 = Q_1[\mu]$ на F_μ, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$;*

2) Для любого несущественного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$ при $q = 1$ не существует элементарный $(\rho, 1)-$дифференциал $\tau_{\rho;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом Q_1 на F_μ.

Доказательство. 1) Если ρ — существенный характер и $q = 1$, то, по теореме Римана-Роха, для характеров имеем равенство:

$$i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = -1 + g + 1 + r_{\rho^{-1}}(Q_1),$$

$i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = g$ и $i_\rho(1) = g - 1$. Отсюда следует, что $i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = i_\rho(1) + 1$. Поэтому существует дифференциал Прима $\tau_{\rho;Q_1}$ для ρ на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один.

Если ρ — произвольный характер и $q > 1$, то, по теореме Римана-Роха, для $(\rho, q)-$дифференциалов [4, с. 43] имеем:

$$i_{\rho,q}(D) = (2q-1)(g-1) - \deg D + r((f)\frac{Z^{q-1}}{D})$$

и $i_{\rho,q}(1) = (2q-1)(g-1)$, где f — мультипликативная функция для ρ и Z — канонический класс для абелевых дифференциалов на F_μ. Поэтому

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1}) = i_{\rho,q}(1) + 1 + r((f)Z^{q-1}Q_1).$$

Таким образом, имеем равенство:

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1}) = i_{\rho,q}(1) + 1,$$

так как $\deg((f)Z^{q-1}Q_1) = 0 + (q-1)(2g-2) + 1 > 0$. Следовательно, существует $(\rho, q)-$дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ для ρ на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один.

Построим конструктивно такие дифференциалы, локально голоморфно зависящие от ρ и $[\mu]$:

a) такой $(\rho, q)-$дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ можно задать в следующем виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f\omega_0^q$, где f — мультипликативная функция для существенного характера ρ на F_μ, $q \geq 1$ и ω_0 — любой голоморфный абелев дифференциал на F_μ. Дивизор

$$(\tau_{\rho,q;Q_1}) = \frac{R_1...R_N}{(\omega_0)^q Q_1}(\omega_0)^q,$$

где $N = q(2g-2) + 1$ и точка Q_1 не принадлежит дивизору (ω_0). Отсюда получаем равенство:

$$\varphi(R_1...R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1) - \varphi(R_{g+1}...R_N) + \psi(\rho) = a \qquad (*)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$ для F_μ;

b) в случае $\rho = 1$ или ρ — несущественный характер при $q > 1$ такой дифференциал ищем в следующем виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f_0 f_1 \omega_0^q$, где f_1 — однозначная мероморфная функция с дивизором $(f_1) = \frac{R_1...R_N}{(\omega_0)^q Q_1}$ и f_0 — мультипликативная единица для ρ на F_μ. Здесь $\psi(\rho) = 0$ и, по теореме Абеля, имеем равенство:

$$\varphi(R_1...R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1) - \varphi(R_{g+1}...R_N) = a. \qquad (**)$$

При наших условиях в обоих случаях a) и b) верно неравенство $N - g \geq g - 1$ и $\dim W_g^1 \leq g - 2$. Шевелением дивизоров $R_{g+1}...R_N$ можно добиться, что a не принадлежит W_g^1 и уравнения $(*)$ и $(**)$, в многообразии Якоби, имеют единственные решения $R_1...R_g$.

Выбирая локально голоморфное сечение по $[\mu]$ и ρ дивизоров $R_{g+1}...R_N$ над $\mathbb{T}_g$, получим дивизор $R_1...R_g$ (как единственное решение предыдущих уравнений в $J(F_\mu)$) тоже голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$. Причем малым шевелением дивизоров $R_{g+1}...R_N$ можно добиться, чтобы точка Q_1 не совпадала с точками $R_1, ..., R_N$.

2) Если существует дифференциал $\tau_{\rho;Q_1}$ для несущественного характера ρ с вычетом $res_{Q_1}\tau_{\rho;Q_1} = c_{Q_1} \neq 0$ для некоторой его ветви, то $f_0^{-1}\tau_{\rho;Q_1}$ — абелев дифференциал с единственным простым полюсом в Q_1 и f_0 — мультипликативная функция для ρ на F_μ. По теореме о вычетах $f_0^{-1}(\widetilde{Q}_1)c_{Q_1} = 0$, где $\widetilde{Q}_1 \neq Q_1$. Противоречие.

Это утверждение также следует из теоремы Римана-Роха так как $i_\rho(Q_1^{-1}) = g = i_\rho(1)$ для несущественного характера ρ. Действительно,

$$0 = r_{\rho^{-1}}(Q_1) = \deg(\frac{1}{Q_1}) - g + 1 + i_\rho(\frac{1}{Q_1}) =$$

$$= -1 - g + 1 + i_\rho(\frac{1}{Q_1}).$$

Теорема 2.1 доказана.

3. Однозначные мероморфные дифференциалы на переменной компактной римановой поверхности

Обозначим через $\Omega_2(F_\mu)$ пространство однозначных (абелевых) дифференциалов второго рода с конечным числом полюсов на F_μ, а через $\Omega_{2,e}(F_\mu)$ — подпространство всех точных дифференциалов второго рода на переменной поверхности F_μ.

Рассмотрим $\widetilde{E}_1 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$, векторное расслоение у которого над точкой $[\mu]$ из базы $\mathbb{T}_g$ лежит слой $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$.

Теорема 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g$ над базой $\mathbb{T}_g$ при $g \geq 2$. При этом наборы классов смежности дифференциалов*

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}, ..., \tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1}, \qquad (*)$$

и

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, ..., \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}, \qquad (**)$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $n_1, ..., n_g$ — пробелы Вейерштрасса в $\widetilde{P}_1$ на F_μ и $r(\frac{1}{\widetilde{P}_1...\widetilde{P}_g}) = 1$ на F_μ.

Доказательство. Зададим отображение Φ_1 из пространства $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$ на $\mathbb{C}^{2g}$ по правилу: сопоставляем ω его базисные периоды, т. е.

$$\Phi_1 : \omega \to (\int\limits_{a_1} \omega, ..., \int\limits_{a_g} \omega, \int\limits_{b_1} \omega, ..., \int\limits_{b_g} \omega) \in \mathbb{C}^{2g}.$$

Ядро отображения Φ_1 совпадает с $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Действительно, если все указанные периоды для дифференциала ω равны нулю, то и все остальные периоды тоже равны нулю. Поэтому дифференциал ω будет точным на F_μ, а значит, принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Ясно также, что если дифференциал принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$, то все его периоды равны нулю. Так как отображение Φ_1 взаимнооднозначно и линейно на фактор пространстве, то $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \leq 2g$.

Докажем обратное неравенство

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \geq 2g$$

и построим базис этого фактор пространства.

Возьмем мероморфные дифференциалы из набора $(*)$ на поверхности F_μ. Покажем, что классы смежности с такими дифференциалами будут линейно независимы над $\mathbb{C}$ на F_μ. От противного. Предположим, что существует линейная комбинация, у которой не все коэффициенты нули, равная нулевому классу, тогда верно равенство $C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g + \widetilde{C}_1\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1} + ... + \widetilde{C}_g\tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1} = df$, где df — точный дифференциал второго рода, а f – однозначная мероморфная функция на F_μ.

Выберем среди коэффициентов $\widetilde{C}_j \neq 0$ коэффициент с максимальным номером, например $j = j_0$. Тогда f будет иметь в качестве особенностей только один полюс $\widetilde{P}_1$ порядка n_{j_0}. Это противоречит выбору пробелов в точке $\widetilde{P}_1$ на F_μ. Поэтому $\widetilde{C}_1 = ... = \widetilde{C}_g = 0$.

Осталось равенство $C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g = df$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $C_1, ..., C_g$. Так как $\zeta_1, ..., \zeta_g$ — канонический базис, то a_j–период левой части будет равен C_j, а для правой части все периоды равны нулю. Отсюда

$$C_1 = ... = C_g = 0.$$

Таким образом, доказали линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора $(*)$.

Рассмотрим набор $(**)$. Если существует линейная комбинация

$$C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g + \widetilde{C}_1\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} + ... + \widetilde{C}_g\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g} = df,$$

то все коэффициенты $\widetilde{C}_j = 0,\ j = 1, ..., g$, так как в противном случае функция f будет иметь дивизор $(f) \geq \frac{1}{\widetilde{P}_1...\widetilde{P}_g}$, что противоречит выбору точек $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ на F_μ. Аналогично, как для набора $(*)$, показывается, что $C_k = 0,\ k = 1, ..., g$.

Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) = 2g$.

Известно, что дифференциалы $\tau^{(n_j+1)}_{\widetilde{P}_1}$ можно выбрать голоморфно зависящими от $[\mu]$ [5]. Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. *Расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным (глобально) тривиальным над пространством Тейхмюллера и существуют глобальные сечения для $\widetilde{E}_1$ над $\mathbb{T}_g$, т.е. существуют $2g$ абелевых дифференциалов первого и второго рода, которые являются глобальными функциями от $[\mu]$ на $\mathbb{T}_g$.*

Доказательство. Это следует из теоремы Грауэрта, в силу односвязности базы $\mathbb{T}_g$, о том, что над такой базой расслоение становится глобально тривиальным или комплексно аналитически эквивалентным $\mathbb{T}_g \times \mathbb{C}^{2g}$. Следствие 3.1 доказано.

Обозначим через $\Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}, F_\mu)$ пространство абелевых дифференциалов с дивизорами кратными $\frac{1}{Q_1...Q_s}$, где $Q_1...Q_s$ — локально голоморфное сечение в пространстве дивизоров степени s над $\mathbb{T}_g$, где $s \geq 2$.

Пусть $\widetilde{E}_2 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{Q_1 \cdots Q_s}, F_\mu)$ — векторное расслоение над $\mathbb{T}_g$. По теореме Римана-Роха, $r(Q_1...Q_s) = -s - g + 1 + i(\frac{1}{Q_1...Q_s})$. Отсюда $i(\frac{1}{Q_1...Q_s}) = s + g - 1$, так как $r(Q_1...Q_s) = 0$.

Рассмотрим набор дифференциалов

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{Q_2Q_1}, ..., \tau_{Q_sQ_1}, \qquad (1)$$

которые, по теореме Берса и по классическим результатам, локально голоморфно зависят от $[\mu]$.

Этот набор линейно независим над $\mathbb{C}$. Если $C_1\zeta_1+...+C_g\zeta_g+\widetilde{C}_1\tau_{Q_2Q_1}+...+\widetilde{C}_{s-1}\tau_{Q_sQ_1} = 0$ на F_μ, то $\widetilde{C}_1 = ... = \widetilde{C}_{s-1} = 0$, так как нет особенностей в правой части. Коэффициенты $C_1 = ... = C_g = 0$ в силу независимости $\zeta_1, ..., \zeta_g$ над $\mathbb{C}$ на F_μ. Таким образом, доказано предложение.

Предложение 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ ранга $g+s-1$ при $s \geq 2$ является голоморфным векторным расслоением над $\mathbb{T}_g$, а набор дифференциалов (1) дает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Следствие 3.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbb{T}_g \times \mathbb{C}^{g+s-1}$ и существуют $g+s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_g$.*

Обозначим через $\widetilde{E}_3 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu)$ векторное расслоение над $\mathbb{T}_g$, $s \geq 2$, где $\Omega(1, F_\mu)$ — пространство голоморфных абелевых дифференциалов на F_μ.

По теореме Римана-Роха, $i(\frac{1}{Q_1...Q_s}) = g+s-1$ и $i(1) = g$, поэтому

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu) = s-1.$$

Докажем, что набор классов смежности дифференциалов

$$\tau_{Q_2Q_1}, ..., \tau_{Q_sQ_1} \qquad \mathbf{(2)}$$

будет линейно независим над $\mathbb{C}$ на F_μ. Если $C_1\tau_{Q_2Q_1} + ... + C_{s-1}\tau_{Q_sQ_1} = \omega$, где ω — голоморфный дифференциал, то все коэффициенты $C_1 = ... = C_{s-1} = 0$, так как особые точки правой и левой сторон различны. Таким образом, доказали предложение.

Предложение 3.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_3$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $s-1$ над $\mathbb{T}_g$ и классы смежности дифференциалов набора (2) образуют базис локально голоморфных сечений этого расслоения. Кроме того, $\widetilde{E}_3$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbb{T}_g \times \mathbb{C}^{s-1}$ и существуют $s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_g$.*

4. Мультипликативные функции и единицы на переменной римановой поверхности

Пусть на F_μ рода $g \geq 2$ задана мультипликативная мероморфная функция f для любого характера ρ. Тогда дивизор $(f) = D = \frac{R_1^{\alpha_1}...R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}}$ на F_μ, где $R_j, Q_i \in F_\mu, \alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1, ..., m, \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, ..., s$, и $0 = \deg D = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j$.

Рассмотрим однозначный абелев дифференциал $\omega(z)dz = \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ третьего рода на F_μ с простыми полюсами в точках $R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $\alpha_1, ..., \alpha_m, -\beta_1, ..., -\beta_s$ соответственно. Тогда

$$\omega(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_jP_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_jP_0} + \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j \zeta_j, \qquad (*)$$

где $c_j \in \mathbb{C}, j = 1, ..., g$, и P_0 не принадлежит $suppD = \{R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s\}$. Отсюда

$$f(P) = \exp \int\limits_{P_0}^{P} \omega(z)dz$$

на F_μ.

Пусть f — мультипликативная функция на F_μ рода $g \geq 2$. Предположим дополнительно, что в окрестности $U(P_j)$ функция $f(P) \sim e^{q_j(k_j)(P)}, k_j(P_j) = \infty, q_j$ — некоторые многочлены от k_j, $j = 1, ..., l$, а в точках $P_{l+1}, ..., P_n$ возможны либо полюса, либо нули порядков $r_{l+1}, ..., r_n$ соответственно. Положим $\widetilde{g}(P) = \frac{f(P)}{\chi_{P_1,...,P_l}(P)}$ на F_μ, где $\chi_{P_1,...,P_l}(P)$ будет $l-$точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с теми же асимптотиками в точках $P_1, ..., P_l$, как у функции f [3, с. 82]. Тогда $0 = \deg(\widetilde{g}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j + \sum\limits_{j=l+1}^{n} r_j$. Дифференциал $\widetilde{\omega}(z)dz = \frac{\widetilde{g}'(z)}{\widetilde{g}(z)}dz$ будет абелевым дифференциалом третьего рода с простыми полюсами $R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s, P_{l+1}, ..., P_n$, где функция $\widetilde{g}$ имеет дивизор $(\widetilde{g}) = \widetilde{D} = \frac{R_1^{\alpha_1}...R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}} P_{l+1}^{r_{l+1}}...P_n^{r_n}$, $r_j \in \mathbb{Z}$, $j = l+1, ..., n$ на F_μ, и

$$\widetilde{\omega}(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_jP_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_jP_0} + $$

$$+ \sum_{j=l+1}^{n} r_j \tau_{P_jP_0} + \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j \zeta_j, \qquad (**)$$

где $c_j \in \mathbb{C}, j = 1, ..., g$. Таким образом доказана

Теорема 4.1. *Мультипликативные функции f на F_μ рода $g \geq 2$ для любого характера ρ, с указанными выше условиями, имеют следующие представления :*

1) $f(P) = \exp \int\limits_{P_0}^{P} \omega(z)dz$, где $\omega(z)dz$ задана формулой (*) на F_μ;

2) $f(P) = \chi_{P_1,...,P_l}(P) \exp \int\limits_{P_0}^{P} \widetilde{\omega}(z)dz$, где $\widetilde{\omega}(z)dz$ задается формулой (**) на F_μ и $1 \leq l \leq n$, $n \geq 1$, которая имеет асимптотики вида $e^{q_j(k_j)(P)}$ в $U(P_j), j = 1, ..., l$. Здесь $\chi_{P_1,...,P_l}(P)$ — l-точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с указанной асимптотикой в точках $P_1, ..., P_l$. Эти функции локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.

Предложение 4.1. *Если f — мультипликативная функция для несущественного характера ρ на F рода $g \geq 2$ имеет единственный полюс* *точно второго порядка в точке Q, то F — гиперэллиптическая.*

Доказательство. Если такую функцию f разделить на f_0, то получится $\frac{f}{f_0}$ — однозначная функция на F, с единственным полюсом точно порядка 2, и по классической теореме [5] получаем, что F – гиперэллиптическая риманова поверхность. Предложение 4.1 доказано.

Предложение 4.2. *Если ρ — несущественный характер на F рода $g \geq 2$ и в точке Q первый мультипликативный непробел Вейерштрасса равен 2, то F — гиперэллиптическая.*

Если дана функция f для любого ρ, то дивизор $D = (f)$ степени нуль, состоящий из ее нулей и полюсов с учетом кратности, определяется единственно на F. Выясним будет ли верным утверждение, что функция f для некоторого характера по заданному дивизору $D, \deg D = 0$, определяется с точностью до умножения на ненулевую константу.

По теореме 1.1.3 [4, с. 23], [2, с. 130] каждый дивизор $D \neq 1$ степени 0 на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ будет дивизором единственной (с точностью до умножения на ненулевую константу) мультипликативной функции на F, принадлежащей единственному нормированному характеру.

Теорема 4.2. *Пусть D — дивизор, $\deg D = 0$, на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, тогда:*

1) если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для одного и того же характера ρ, то $f_1 = cf_2$, где $c = const \neq 0$ на F;

2) если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1 \neq \rho_2$, то $f_1 = f_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F и $\rho_1 = \rho_2\rho_0$;

3) если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1 = \rho_2$ и $f_1 = cf_2$, где $c = const \neq 0$ на F;

4) Для любого несущественного характера ρ не существует функции f для ρ с дивизором $(f) = \frac{P_1}{Q_1}$, $P_1 \neq Q_1$, на F.

Доказательство. 1) Рассмотрим частное $g = \frac{f_1}{f_2}$. Дивизор $(g) = 1$ и характер $\frac{\rho}{\rho} = 1$, поэтому $g = c \neq 0$ на F, так как g — однозначная аналитическая функция на F;

2) Также рассмотрим $g = \frac{f_1}{f_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Таким образом, $f_1 = f_2 g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0;

3) Снова рассмотрим $g = \frac{f_1}{f_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Отсюда ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным. По теореме [2, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и по утверждению 1) имеем $f_1 = cf_2$, $c \neq 0$ на F.

4) Действительно, если существует такая функция для несущественного характера ρ, то рассмотрим функцию $g = \frac{f}{f_0}$, где f_0 — мультипликативная единица для ρ. Функция g будет однозначной функцией с одним простым полюсом на F. Противоречие. Теорема 4.2 доказана.

Замечание 4.1. В частности, существует функция f с заданным дивизором $(f) = \frac{P_1}{Q_1}$ для нормированного характера $\rho \neq 1$, а значит, ρ будет существенным характером [2, с. 130].

Следствие 4.1. *Для любого фиксированного характера функция f на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ восстанавливается по своему дивизору с точностью до умножения на ненулевую константу.*

Ясно, что $(\rho, m)-$дифференциал ω имеет единственный дивизор $D = (\omega)$ из своих нулей и полюсов, с учетом кратности, на F рода $g \geq 2$, и $\deg D = (2g-2)m$, $m \geq 1$.

Выясним, будет ли по заданному дивизору D на F рода $g \geq 2$, $\deg D = (2g-2)m$ определяться $(\rho, m)-$дифференциал ω с точностью до умножения на ненулевую константу на F.

Известно из [4, с. 23], что любой дивизор D на F рода $g \geq 2$ степени $(2g-2)m$, $g \geq 1$, $m \geq 1$ есть дивизор единственного (с точностью до умножения на ненулевую константу) $(\rho, m)-$дифференциала, принадлежащего к единственному нормированному характеру ρ.

Теорема 4.3. *Пусть D — дивизор,*

$$\deg D = (2g-2)m, \ m \geq 1,$$

на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, тогда:

1) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для одного и того же характера ρ, то $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = const \neq 0$ на F;

2) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1 \neq \rho_2$, то $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F, где $\rho_1 = \rho_2\rho_0$;

3) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1 = \rho_2$ и $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = const \neq 0$ на F.

Доказательство. 1) Рассмотрим частное $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Дивизор $(g) = 1$ и характер $\frac{\rho}{\rho} = 1$, поэтому $g = c \neq 0$ на F, так как g — однозначная аналитическая функция на F.

2) Также рассмотрим $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Таким образом, $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0, и $\rho_1 = \rho_2\rho_0$.

3) Рассмотрим $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть

несущественным. Отсюда характер ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным. По теореме [2, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и по утверждению 1) имеем $\omega_1 = c\omega_2$, $c \neq 0$ на F. Теорема 4.3 доказана.

Литература

[1] Gunning, R. C. *On the period classes of Prym differentials* / R. C. Gunning // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 319. – P. 153 – 171.

[2] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – New-York: Springer, 1992.–Vol. 71.

[3] Дубровин, Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1* / Б. А. Дубровин – М.: МГУ, 1986.

[4] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.

[5] Альфорс, Л. В. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения* / Л. В. Альфорс, Л. Берс. – М.: ИЛ, 1961.

[6] Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties*/ C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – Vol. 107. – P. 255 – 286.

УДК 517.55

О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА-БАРНСА НА ГРАНИЦЕ ЕГО ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

Т. В. Зыкова

ON THE CONVERGENCE OF MELLIN-BARNES INTEGRAL ON THE BOUNDARY OF ITS DOMAIN OF CONVERGENCE

T. V. Zykova

В работе исследуется множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения.

In the present paper we give the description of the set of convergence for Mellin-Barnes integral representing solution to the general algebraic equation.

Ключевые слова: интеграл Меллина-Барнса, общее алгебраическое уравнение.

Keywords: Mellin-Barnes integral, general algebraic equation.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-7347.2010.1).

1. История вопроса

В самом общем виде объект исследования – это многомерный интеграл Меллина-Барнса

$$\Phi_\gamma(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^p} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^p} \frac{\prod\limits_j \Gamma\left(\langle A_j, z\rangle + c_j\right)}{\prod\limits_k \Gamma\left(\langle B_k, z\rangle + d_k\right)} x_1^{-z_1} \cdots x_p^{-z_p} dz, \tag{1}$$

здесь $A_j, B_k \in \mathbb{R}^p$, $c_j, d_k \in \mathbb{R}$, $dz = dz_1 \cdots dz_p$. Вектор $\gamma \in \mathbb{R}^p$, участвующий в определении множества интегрирования, выбран так, чтобы оно не пересекало полюсы гамма-функций Эйлера в числителе.

Области сходимости интегралов Меллина-Барнса (1) являются *секториальными*: они определяются лишь условиями на аргументы параметров $x_1, \ldots, x_p$, причем, если область сходимости непустая, то преобразование Меллина интеграла (1) равно его подынтегральному выражению, деленному на $(2\pi i)^p$ (см. [1]). Секториальные области рассматриваются в множестве $\mathfrak{S} = \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^p$, которое представляет собой область наложения над комплексным алгебраическим тором $\mathbb{T}^p = (\mathbb{C}\backslash\{0\})^p$. Далее обозначим через $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$ вектор $(\arg x_1, \ldots, \arg x_p)$. Тогда каждая точка $x = (r, \theta) \in \mathfrak{S}$ $\left(r \in \mathbb{R}_+^p, \theta \in \mathbb{R}^p\right)$ проектируется в точку $\left(r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_p e^{i\theta_p}\right) \in \mathbb{T}^p$. На $\mathbb{T}^p$ обращение этой проекции может быть многозначным.

Интегралы Меллина-Барнса явились четвертым подходом к изучению гипергеометрических функций: первые два реализованы Гауссом как решения гипергеометрических дифференциальных уравнений и как суммы гипергеометрических рядов. Третий подход основан на интегральном представлении Эйлера, обобщающем бета-функцию (см. [2]).

Проблема сходимости данных интегралов привлекала внимание ряда специалистов на протяжении последнего столетия. Шаги к ее решению в многомерном случае были сделаны Х. Меллином [3], Р. Бушманом и Х. Сриваставой [4], А. К. Цихом и др. ([5]). Часть (максимальной) области сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения, первоначально была указана Х. Меллином (см. [3]). В работе И. А. Антиповой [1] найдена истинная (максимальная) область сходимости таких интегралов. Область сходимости многомерного интеграла Меллина-Барнса (1) в самом общем случае описана в работе Л. Нильсон, М. Пассаре, А. К. Циха [6]. Тем не менее оставался открытым вопрос о структуре множества сходимости алгебраических интегралов Меллина-Барнса. В работе [7] детально описано множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение тетраномиального алгебраического уравнения. В настоящей работе исследуется множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения (Теорема 1 и Теорема 2).

2. Множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения

Рассмотрим интеграл гипергеометрического типа:

$$\frac{1}{(2\pi i)^p}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^p}\frac{\mu}{n}\frac{\Gamma(z_1)...\Gamma(z_p)\Gamma(\frac{\mu}{n}-\frac{1}{n}\langle\alpha,z\rangle)}{\Gamma(\frac{\mu}{n}+\frac{1}{n}\langle\beta,z\rangle+1)}x_1^{-z_1}...x_p^{-z_p}dz, \tag{2}$$

где $\alpha=(n_1,\ldots,n_p)\in\mathbb{N}^p$,
$\beta=(n-n_1,\ldots,n-n_p)\in\mathbb{N}^p$, $n>n_p>\cdots>n_1\geq$ ≥ 1, $\mu>0$. Интегрирование в (2) ведется по мнимому (вертикальному) подпространству $\gamma+i\mathbb{R}^p$, вектор $\gamma\in\mathbb{R}^p$ фиксирован и выбирается из симплекса

$$U=\left\{u\in\mathbb{R}^p_+:\langle\alpha,u\rangle<\mu\right\}. \tag{3}$$

Из работ [1], [3] известно, что интеграл (2) представляет μ-ю степень ветви решения $y(x)$ ($y(0)=1$) общего алгебраического уравнения

$$y^n+x_py^{n_p}+\ldots+x_1y^{n_1}-1=0 \tag{4}$$

с комплексными коэффициентами x_i,
$i\in J:=\{1,\cdots,p\}$. Введем в $\mathbb{R}^p$ два семейства целочисленных векторов:

$$\mathcal{L}_1=\{\varphi_l=ne_l, l\in J\},$$

$$\mathcal{L}_2=\{\varphi_{kj}=-n_je_k+n_ke_j, k<j,\ k,j\in J\},$$

здесь $e_1,\ldots,e_p$ – базисные векторы в $\mathbb{R}^p$. В работе [1] доказано, что интеграл (2), зависящий от параметра $x=(x_1,\ldots,x_p)$, сходится в секториальной области S, основание которой в пространстве аргументов $\theta_1=\arg x_1,\ldots,\theta_p=\arg x_p$ есть внутренность выпуклого многогранника

$$P=\{\theta\in\mathbb{R}^p:|\langle\varphi_l,\theta\rangle|\leq\pi n_l,\ |\langle\varphi_{kj},\theta\rangle|\leq\pi n_k\}, \tag{5}$$

где $l,k,j\in J$, $k<j$. Иначе говоря, $S=\{x\in\mathfrak{S}:\theta\in P^\circ\}=Arg^{-1}(P^\circ)$, где отображение

$$Arg:\mathbb{T}^p\to\mathbb{R}^p:(x_1,\ldots,x_p)\to(\arg x_1,\ldots,\arg x_p).$$

В работе исследуется сходимость интеграла (2) в случае, когда $(\arg x_1,\ldots,\arg x_p)$ принадлежит границе многогранника P. Если в уравнении (4) показатели удовлетворяют условию $n<2n_2$, то среди неравенств, определяющих многогранник P, нет лишних. В этом случае он имеет p^2+p гиперграней (граней максимальной размерности), которые задаются пересечением соответствующих гиперплоскостей с самим многогранником P:

$$\Gamma^{\pm}_l=\{\theta\in P:\langle\varphi_l,\theta\rangle=\pm\pi n_l\},\ l\in J,$$
$$\Gamma^{\pm}_{kj}=\{\theta\in P:\langle\varphi_{kj},\theta\rangle=\pm\pi n_k\},\ k<j,\ k,j\in J. \tag{6}$$

Справедлива

Теорема 1. *Прообразы точек θ (при отображении Arg) из относительной внутренности гиперграней (6) многогранника P принадлежат множеству сходимости интеграла (2).*

Если $n\geq 2n_2$, то среди неравенств (5) появляются лишние, следовательно, количество гиперграней многогранника P уменьшается. Далее рассмотрим крайнюю ситуацию, когда $n>2n_p$. В этом случае многогранник P есть p-мерный параллелепипед. Зафиксируем поднаборы $J_s=\{j_1,\ldots,j_s\}\subset J$, $J_t=\{j_1,\ldots,j_t\}\subset J$, $J_s\cap J_t=\varnothing$. При $s=0$ считаем $J_s=\varnothing$, при $t=0$ считаем $J_t=\varnothing$. Рассмотрим грань параллелепипеда коразмерности $s+t$

$$\Gamma(J_s,J_t)=$$

$$=\{\theta\in P:\langle\varphi_l,\theta\rangle=\pi n_l,\ l\in J_s,\langle\varphi_j,\theta\rangle=-\pi n_j, j\in J_t\}. \tag{7}$$

Заметим, что $\Gamma(J_0,J_0)=\Gamma(\varnothing,\varnothing)=P$. При $p\geq 3$ имеет место

Теорема 2. *Прообразы точек θ (при отображении Arg) из относительной внутренности грани $\Gamma(J_s,J_t)$ многогранника P принадлежат множеству сходимости интеграла (2), если $(s,t)\in\{0,1,2\}^2$.*

Замечание 1. Случай $p=2$ полностью исследован в работе [7].

3. Идея доказательства

Введем несколько обозначений:

$$u_j=Re\,z_j,\quad \upsilon_j=Im\,z_j,\quad j\in J.$$

Используя оценку для гамма-функции, вытекающую из формулы Стирлинга, заменим подынтегральную функцию в (2) на функцию вида:

$$\frac{\prod\limits_{j\in J}(|\upsilon_j|+1)^{u_j-\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{1}{n}\langle\alpha,\upsilon\rangle\right|+1\right)^{-\frac{1}{n}\langle\alpha,u\rangle+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{n}\left|\langle\beta,\upsilon\rangle\right|+1\right)^{\frac{1}{n}\langle\beta,u\rangle+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times exp\left\{\langle\upsilon,\theta\rangle-\frac{\pi}{2}\left(\sum_{j\in J}|\upsilon_j|+\frac{1}{n}\left|\langle\alpha,\upsilon\rangle\right|-\frac{1}{n}\left|\langle\beta,\upsilon\rangle\right|\right)\right\}, \tag{8}$$

имеющую тот же порядок роста при $\upsilon\to\infty$. Исследуем интеграл от функции (8) по пространству $\mathbb{R}^p_\upsilon$.

Приведем доказательства для точек гиперграни Γ^+_ν многогранника P ($\nu\in J$). Для других точек многогранника P, упомянутых в теоремах 1, 2, идея доказательства та же самая.

Зафиксируем точку θ на грани Γ^+_ν многогранника P ($\nu\in J$), тогда аргумент экспоненциального множителя в (8) примет вид:

$$\frac{\pi n_\nu}{n}\upsilon_\nu+\langle\theta[\nu],\upsilon[\nu]\rangle-$$
$$-\frac{\pi}{2}\left(\sum_{j=1}^{p}|\upsilon_j|+\frac{1}{n}|\langle\alpha,\upsilon\rangle|-\frac{1}{n}|\langle\beta,\upsilon\rangle|\right), \tag{9}$$

здесь $\upsilon[\nu]=(\upsilon_1,\ldots,[\upsilon_\nu],\ldots,\upsilon_p)\in\mathbb{R}^{p-1}$, $\theta[\nu]=$ $=(\theta_1,\ldots,[\theta_\nu],\ldots,\theta_p)$. Заметим, что при любом $\upsilon\in\mathbb{R}^p$ величина (9) неположительна. В том случае, когда (9) есть величина отрицательная, экспоненциальный множитель в (8) убывает при $\upsilon\to\infty$ и степенной множитель не может повлиять на сходимость интеграла (2). Найдем направления $\upsilon\in\mathbb{R}^p$, для которых (9) обращается в нуль. Нетрудно видеть, что это произойдет в одномерном конусе

$$\sigma^+_\nu=\{re_\nu\in\mathbb{R}^p,\, r\ge 0\}.$$

Заметим, что конус σ^+_ν принадлежат двойственному вееру P^* (его также называют двойственным коническим полиэдром (см. [8])), который представляет собой разбиение $\mathbb{R}^p$ на полиэдральные конусы, соприкасающиеся по граням. Луч σ^+_ν является одномерной гранью ортанта $\mathbb{R}^p_\ge$. Поэтому, сузив функцию (8) по переменной υ на множество $\mathbb{R}^p_\ge$, получим интеграл:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p_\ge}\frac{\prod\limits_{j\in J}(\upsilon_j+1)^{u_j-\frac12}\left(\frac1n\langle\alpha,\upsilon\rangle+1\right)^{-\frac1n\langle\alpha,u\rangle+\frac{\mu}{n}-\frac12}}{\left(\frac1n\langle\beta,\upsilon\rangle+1\right)^{\frac1n\langle\beta,u\rangle+\frac{\mu}{n}+\frac12}}\times$$
$$\times exp\left\{\left\langle\theta[\nu]-\frac{\pi}{n}\alpha[\nu],\upsilon[\nu]\right\rangle\right\}d\upsilon, \tag{10}$$

где $\alpha[\nu]=(n_1,\ldots,[n_\nu],\ldots,n_p)$, $u\in U$.

Лемма 1. *Интеграл (10) сходится.*

Доказательство. Введем обозначения:

$$K_j=\upsilon_j+1,\ j\in J,$$
$$L(\upsilon)=\frac1n\langle\alpha,\upsilon\rangle+1,\quad M(\upsilon)=\frac1n\langle\beta,\upsilon\rangle+1,$$
$$\xi=(\xi_j)_{j\in J}=\left(u_j-\frac12\right)_{j\in J},$$
$$\delta=-\frac1n\langle\alpha,u\rangle+\frac{\mu}{n}-\frac12,\quad \varkappa=\frac1n\langle\beta,u\rangle+\frac{\mu}{n}+\frac12.$$

Интеграл (10) можно представить в виде повторного:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{p-1}_\ge}I\left(\upsilon[\nu]\right)\prod_{j\in J[\nu]}K_j^{\xi_j}exp\left\{\left\langle\theta[\nu]-\frac{\pi}{n}\alpha[\nu],\upsilon[\nu]\right\rangle\right\}d\upsilon[\nu], \tag{11}$$

где

$$I\left(\upsilon[\nu]\right)=\int\limits_0^\infty\frac{K_\nu^{\xi_\nu}L^\delta(\upsilon)}{M^\varkappa(\upsilon)}d\upsilon_\nu, \tag{12}$$

а $J[\nu]=\{1,\ldots,[\nu],\ldots,p\}$. Заметим, что аргумент экспоненты в подынтегральном выражении (11) отрицательный, так как

$$\left\langle\theta[\nu]-\frac{\pi}{n}\alpha[\nu],\upsilon[\nu]\right\rangle=\frac1n\sum_{j\in J[\nu]}\left(\langle\varphi_j,\theta\rangle-\pi n_j\right)\upsilon_j, \tag{13}$$

где $\upsilon_j>0$, а $\langle\varphi_j,\theta\rangle-\pi n_j<0$ в силу (5).

Исследуем сходимость интеграла (12). Степень подынтегральной функции в (12) равна

$$\xi_\nu+\delta-\varkappa=-\frac32-\sum_{j\in J[\nu]}u_j<-1, \tag{14}$$

при условии $\sum\limits_{j\in J[\nu]}u_j>-\frac12$. Последнее неравенство выполняется в силу (3). Неравенство (14), в свою очередь, гарантирует сходимость интеграла (12).

Покажем, что $I(\upsilon[\nu])$ может иметь не более, чем степенной рост по переменным $\upsilon_1,\ldots,[\upsilon_\nu],\ldots,\upsilon_p$. Откуда, ввиду наличия в интеграле (11) экспоненциального множителя с отрицательным аргументом (13), будет следовать сходимость этого интеграла, а следовательно и интеграла (10). Домножим числитель и знаменатель в подынтегральном выражении (12) на произведение функций

$$L^{\delta'}(\upsilon)\cdot K_\nu^{\xi'_\nu},\quad \delta'\ge 0,\ \xi'_\nu\ge 0$$

так, чтобы в полученном выражении показатели $\delta+\delta'$, $\xi_\nu+\xi'_\nu$ были целыми и положительными. Ввиду неотрицательности δ' и $\varkappa$ справедлива оценка:

$$\frac{K_\nu^{\xi_\nu+\xi'_\nu}L^{\delta+\delta'}(\upsilon)}{K_\nu^{\xi'_\nu}M^\varkappa(\upsilon)L^{\delta'}(\upsilon)}\le\frac{K_\nu^{\xi_\nu+\xi'_\nu}L^{\delta+\delta'}(\upsilon)}{K_\nu^{\xi'_\nu}\left(\frac{n-n_\nu}{n}\upsilon_\nu+1\right)^\varkappa\left(\frac{n_\nu}{n}\upsilon_\nu+1\right)^{\delta'}}. \tag{15}$$

Числитель в (15) есть полином по переменной υ_ν с полиномиальными коэффициентами, зависящими от остальных переменных $\upsilon[\nu]$. Если правую часть (15) представить в виде суммы дробей, разделив почленно на знаменатель, то степени по υ_ν (т.е. разность степеней числителя и знаменателя) каждой дроби будут:

$$\xi_\nu+\delta-\varkappa=-\frac32-\sum_{j\in J[\nu]}u_j<-1.$$

Следовательно, при интегрировании в (12) каждое слагаемое будет сходящимся интегралом по переменной v_ν. Получается, что $|I(v[\nu])| \le R(v[\nu])$, где $R(v[\nu])$ – некоторый полином. Лемма 1 доказана.

Таким образом, в силу Леммы 1 интеграл (2) сходится в прообразах внутренних точек гиперграни Γ_ν^+.

Замечание 2. Для грани коразмерности t (см. Теорему 2) аналог соотношения (14) имеет вид

$$\sum_{j\in J_t} \xi_j + \delta - \varkappa = -\frac{t+2}{2} - \sum_{j\in J\setminus J_t} u_j < -t,$$

из которого естественно вытекает условие на коразмерность грани $t \le 2$.

4. Примеры

Множество сходимости интеграла, представляющего решение алгебраического уравнения с двумя параметрами ($p = 2$), полностью исследовано в работе [7]. Многогранник P для этого случая (при $n < 2n_2$) изображен на Рис. 1. Прообразы всех точек границы шестиугольника P, за исключением вершин $A_1\left(-\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(1-\frac{n_2}{n}\right)\right)$, $A_3\left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}\right)$, $A_4\left(\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(\frac{n_2}{n}-1\right)\right)$, $A_6\left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}\right)$, принадлежат множеству сходимости интеграла (2).

Для интеграла с тремя параметрами многогранник P (при $n < 2n_2$) представляет собой двенадцатигранник с восемнадцатью вершинами (см. Рис.2). Интеграл сходится в прообразах всех граничных точек многогранника P за исключением вершин:

$A_3\left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}, \frac{\pi n_3}{n}\right)$, $A_5\left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}, -\frac{\pi n_3}{n}\right)$,
$A_{11}\left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}, \pi\left(1-\frac{n_3}{n}\right)\right)$,
$A_{12}\left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}, \pi\left(\frac{n_3}{n}-1\right)\right)$,
$A_{15}\left(-\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(1-\frac{n_2}{n}\right), \pi\left(1-\frac{n_3}{n}\right)\right)$,
$A_{16}\left(\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(\frac{n_2}{n}-1\right), \pi\left(\frac{n_3}{n}-1\right)\right)$.

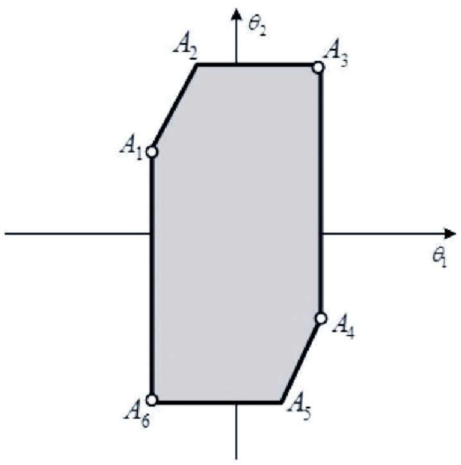


Рис. 1. $P : p = 2, n < 2n_2$

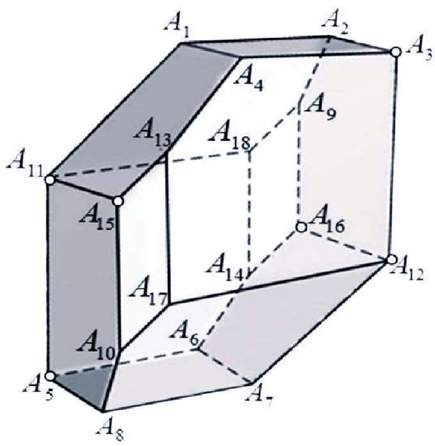


Рис. 2. $P : p = 3, n < 2n_2$

Литература

[1] Антипова, И. А. *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений* / И. А. Антипова // Матем. сб. – 2007. – Vol. 198, no. 4. – P. 3 – 20.

[2] Gelfand, I. M. *Generalized Euler integrals and A–hypergeometric functions* / I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky // Adv. in Math. – 1990. – Vol. 84, no. 2. – P. 255 – 271.

[3] Mellin, H. R. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* / H. R. Mellin // C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I Math. – 1921. – Vol. 172. – P. 658 – 661.

[4] Buschman, R. *Convergence regions for some multiple Mellin-Barnes contour integrals representing generalized hypergeometric functions* / R. Buschman, H. Srivastava // Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. – 1986. – Vol. 17, no. 5. – P. 605 – 609.

[5] Жданов, О. Н. *Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов* / О. Н. Жданов, А. К. Цих // Сиб. матем. журн. – 1998. – Vol. 39, no. 2. – P. 281 – 298.

[6] Nillson, L. *Domains of convergence for A-hypergeometric series and integrals* / L. Nillson, M. Passare, A. Tsikh // в печати

[7] Антипова, И. А. *О множестве сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего решения тетраномиального алгебраического уравнения* / И. А. Антипова, Т. В. Зыкова // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2010. – Vol. 3, no. 4. – P. 475 – 486.

[8] Хованский, А. Г. *Многогранники Ньютона (разрешение особенностей), Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления)* / А. Г. Хованский. – М.: ВИНИТИ, 1985. – no. 22. – P. 207 – 239.

УДК 517.552

О ФОРМУЛЕ ПЕРЕСТАНОВКИ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА КОШИ-СЕГЕ В МНОГОМЕРНОМ ШАРЕ

А. С. Кацунова

ON THE FORMULA OF CHANGE OF INTEGRATION ORDER FOR THE SINGULAR CAUCHY-SZEGÖ INTEGRAL IN MULTIDIMENSIONAL BALL

A. S. Katsunova

В работе рассмотрены аналоги формулы Пуанкаре-Бертрана для особого интеграла Коши-Сеге в шаре. Главное значение интеграла рассмотрено по Коши и в смысле Керзмана-Стейна. Аналог, полученный в случае рассмотрения главного значения по Коши, отличен от формулы Пуанкаре-Бертрана для интеграла Коши на комплексной плоскости. Однако, если рассматривать главное значение в смысле Керзмана-Стейна, они совпадают. Статья является обзором основных результатов по данной теме.

It is obtained the Poincaré-Bertrand formula for singular Cauchy-Szegö integral in a multidimensional ball. It is considered principal value of integral in terms of Cauchy and in terms of Kerzman-Stein. The received formula in case of consideration of a Cauchy principal value differs from Poincaré-Bertrand formula for Cauchy integral in a complex plane. However, in case of consideration of a principal value in terms of Kerzman-Stein the received formula of change of integration order is coincide with Poincaré-Bertrand formula. This paper is a review of the main results on this problem.

Ключевые слова: интеграл Коши-Сеге, главное значение особого интеграла, формула перестановки повторного интеграла.

Keywords: Cauchy-Szegö integral, principal value of integral in terms of Cauchy, formula of change of integration order for iterated integral.

1. Введение

В теории голоморфных функций одного комплексного переменного основополагающую роль играет интегральная формула Коши (см., например, [1, 2]).

Теорема 1.1. *Пусть $G \subset \mathbb{C}^1$ — ограниченная односвязная область, границей которой является произвольная кусочно-гладкая линия ∂G. Для функции f, голоморфной в G и непрерывной в $\overline{G}$ (т. е. $f \in \mathcal{O}(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$), справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G.$$

В случае, если точка z лежит на границе области G, интеграл становится расходящимся в обычном смысле и рассматривают главное значение по Коши особого интеграла, которое определяется следующим образом:

$$\text{v.p.}\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \\ = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G \setminus \{\zeta:\ |\zeta - z| < \varepsilon\}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \partial G.$$

Пусть функция $\varphi(\zeta, w)$ удовлетворяет условию Гельдера на $\Gamma \times \Gamma$ с показателем α (т. е. $\varphi(\zeta, w) \in \mathcal{C}^\alpha(\Gamma \times \Gamma)$), где Γ — гладкая кривая из $\mathbb{C}^1$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда для интеграла Коши имеет место формула перестановки повторного особого интеграла (см., например, [3]).

Теорема 1.2. *Если $\varphi(\zeta, w) \in \mathcal{C}^\alpha(\Gamma \times \Gamma)$ при $0 < \alpha \leqslant 1$, тогда*

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_w} dw \int\limits_{\Gamma_\zeta} \frac{\varphi(\zeta, w)}{(\zeta - z)\ (w - \zeta)}\ d\zeta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_\zeta} \int\limits_{\Gamma_w} \frac{\varphi(\zeta, w)}{(\zeta - z)\ (w - \zeta)}\ d\zeta\ dw + \frac{1}{4}\, \varphi(z, z), \ z \in \Gamma.$$

Целью работы являются исследование повторного особого интеграла Коши-Сеге и получение аналога классической формулы Пуанкаре-Бертрана для интеграла (типа) Коши.

2. Интегральное представление Коши-Сеге

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$. Введем следующие обозначения. Если $\zeta,\ z \in \mathbb{C}^n$, то $\langle \zeta, z \rangle = \zeta_1 z_1 + \ldots + \zeta_n z_n$, а $|z| = \sqrt{\langle \overline{z}, z \rangle}$, где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\overline{z} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$.

Пусть $B_z(r)$ — шар из $\mathbb{C}^n$ с центром в точке z радиуса r, т. е.

$$B_z(r) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n :\ |\zeta - z| < r\}.$$

Обозначим $B = B_0(1)$ — единичный шар из $\mathbb{C}^n$, S — граница шара B

$$S = \partial B = \{\zeta \in \mathbb{C}^n :\ |\zeta| = 1\}.$$

Обозначим через $K(\zeta, z)$ — ядро Коши-Сеге для шара, т. е.

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{\left(1 - \langle \overline{\zeta}, z \rangle\right)^n},$$

а через $\sigma(\zeta)$ — дифференциальную форму

$$\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, \overline{\zeta}_k\, d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где

$$d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n,\ d\overline{\zeta}[k] = \\ = d\overline{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta}_{k-1} \wedge d\overline{\zeta}_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta}_n.$$

Приведем известное интегральное представление Коши-Сеге (Хуа Локена) для голоморфных функций в шаре (см., например, [4]).

Теорема 2.1. *Для любой функции $f \in \mathcal{O}(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$, справедлива формула*

$$f(z) = \int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta), \quad z \in B.$$

3. Главное значение по Коши интеграла Коши-Сеге

Для точек $z \in S$ обычно рассматривается главное значение по Коши:

$$\text{v.p.} \int\limits_S f(\zeta)\, K(\zeta, z)\, \sigma(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{S \setminus B_z(\varepsilon)} f(\zeta)\, K(\zeta, z)\, \sigma(\zeta).$$

Для особого интеграла Коши-Сеге верно утверждение (см. [5]).

Теорема 3.1. *При $n > 1$ справедлива формула:*

$$\text{v.p.} \int\limits_S K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta) = 1, \quad z \in S.$$

Обозначим для интегрируемой на S функции f предельное значение интеграла

$$\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta)$$

изнутри шара B через $K^+[f]$, а через $K_s[f]$ — главное значение по Коши этого интеграла, т. е.

$$K_s[f] = \text{v.p.} \int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta), \quad z \in S.$$

Тогда для интеграла Коши-Сеге справедлив аналог формулы Сохоцкого-Племеля (см. [5]).

Следствие 3.2. *Пусть $n > 1$. Если функция $f \in \mathcal{C}^{\alpha}(S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то интеграл $K^+[f]$ продолжается на S до некоторой функции, также удовлетворяющей на S условию Гельдера с показателем $\beta = \frac{\alpha}{2}$ и*

$$K^+[f] = K_s[f].$$

В этом параграфе для точек $z \in S$ будем рассматривать интеграл Коши-Сеге в смысле главного значения по Коши и знак v.p. будем опускать.

Теорема 3.3. *Пусть*

$$f(\zeta, w) = f_0(\zeta, w)\ \left|1 - \langle \overline{\zeta}, w \rangle\right|^{-\nu},$$

$0 \leqslant \nu < n$, $f_0 \in \mathcal{C}^{\alpha}(S \times S)$, тогда

$$\int\limits_{S_w} d\sigma(w) \int\limits_{S_\zeta} f(\zeta, w)\ K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta) = \\ = \int\limits_{S_\zeta} K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta) \int\limits_{S_w} f(\zeta, w)\ d\sigma(w), \quad z \in S.$$

Лемма 3.4. *При $n > 1$ для точек z^0, $\zeta^0 \in S$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S_w} K(w, z^0)\ K(\zeta^0, w)\ \sigma(w) = K(\zeta^0, z^0), \quad z^0 \neq \zeta^0.$$

Теорема 3.5. *При $n > 1$, если $f \in \mathcal{C}^{\alpha}(S \times S)$, тогда*

$$\int\limits_{S_w} K(w, z)\ \sigma(w) \int\limits_{S_\zeta} f(\zeta, w)\ K(\zeta, w)\ \sigma(\zeta) = \\ = \int\limits_{S_\zeta} \sigma(\zeta) \int\limits_{S_w} f(\zeta, w)\ K(w, z)\ K(\zeta, w)\ \sigma(w),\ z \in S.$$

Формула, полученная в теореме 3.5, отлична от формулы Пуанкаре-Бертрана в случае комплексной плоскости для интеграла Коши.

Из теоремы 3.5 и леммы 3.4 получается следствие, называемое формулой композиции.

Следствие 3.6. *Пусть $n > 1$. Если $f(\zeta, w) = f(\zeta) \in \mathcal{C}^{\alpha}(S)$, то*

$$K_s^2[f] = K_s[f].$$

4. Главное значение в смысле Керзмана-Стейна интеграла Коши-Сеге

В работах Альта [6], Керзмана и Стейна [7] для точек $z \in S$ было рассмотрено другое главное значение v.p.h. особого интеграла Хенкина-Рамиреза, частным случаем которого является интеграл Коши-Сеге. Поэтому, наряду с v.p., для точек $z \in S$ рассмотрим главное значение в смысле

Керзмана-Стейна:

$$\text{v.p.h.}\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{S\setminus\{\zeta:\ \left|1-\left\langle\overline{\zeta},\ z\right\rangle\right|<\varepsilon\}} f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta).$$

Лемма 4.1 *При $n>1$ справедлива формула*

$$\text{v.p.h.}\int\limits_S K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta) = \frac{1}{2},\quad z\in S.$$

Обозначим через $K_{sh}[f]$ — главное значение в смысле Керзмана-Стейна интеграла Коши-Сеге, т. е.

$$K_{sh}[f] = \text{v.p.h.}\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta).$$

Будем считать, что функция $f\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$ для $0<\alpha\leqslant 1$, если для точек $\zeta,z\in S$ выполняется неравенство

$$|f(\zeta)-f(z)|\leqslant C\ |1-\left\langle\overline{\zeta},z\right\rangle|^{\alpha}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $n>1$. Если функция $f\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$, $0<\alpha\leqslant 1$, то интеграл $K^{+}[f]$ непрерывно продолжается на $\overline{B}$, $K^{+}[f]\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$ и справедливо равенство*

$$K^{+}[f] = \frac{f(z)}{2} + \text{v.p.h.}\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta),\quad z\in S.$$

Лемму 4.1 и теорему 4.2 можно найти в [6, 7].

Ниже для точек $z\in S$ будем рассматривать главное значение интеграла в смысле Керзмана-Стейна и знак v.p.h. будем опускать.

Теорема 4.3. *Пусть*

$$f(\zeta,w) = f_0(\zeta,w)\ |1-\left\langle\overline{\zeta},w\right\rangle|^{-\nu},$$

$0\leqslant\nu<n$, $f_0\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S\times S)$, *тогда*

$$\int\limits_{S_w} d\sigma(w)\int\limits_{S_\zeta} f(\zeta,w)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{S_\zeta} K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta)\int\limits_{S_w} f(\zeta,w)\ d\sigma(w),\quad z\in S.$$

Лемма 4.4. *Для точек $z^0,\zeta^0\in S$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S_w} K(w,z^0)\ K(\zeta^0,w)\ \sigma(w) = 0,\quad z^0\neq\zeta^0.$$

Теорема 4.5. *Пусть $f\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S\times S)$, тогда*

$$\int\limits_{S_w} K(w,z)\ \sigma(w)\int\limits_{S_\zeta} f(\zeta,w)\ K(\zeta,w)\ \sigma(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{S_\zeta}\sigma(\zeta)\int\limits_{S_w} f(\zeta,w)\ K(w,z)\ K(\zeta,w)\ \sigma(w) +$$

$$+\frac{1}{4}\ f(z,z),\ z\in S.$$

Из теоремы 4.5 и леммы 4.4 получается следствие, называемое формулой композиции.

Следствие 4.6. *Пусть $n>1$. Если $f(\zeta,w) = f(\zeta)\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$, то*

$$K^2_{sh}[f] = \frac{1}{4}\ f(z),\quad z\in S,$$

где

$$K_{sh}[f] = \text{v.p.h.}\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta).$$

Как и следствие 3.6, следствие 4.4 является одной из формул композиции для особого интеграла Коши-Сеге при $n>1$.

Литература

[1] Привалов, И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного* / И. И. Привалов. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

[2] Шабат, Б. В. *Введение в комплексный анализ. Ч.1* / Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

[3] Гахов, Ф. Д. *Краевые задачи* / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

[4] Рудин, У. *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* / У. Рудин. – М.: Мир, 1984. – 456 с.

[5] Кытманов, А. М. *О главном значении по Коши особого интеграла Хенкина – Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$* / А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 3, № 46. – С. 625 – 633.

[6] Alt, W. *Singuläre integrale mit gemischten homogenitäten auf mannigrfaltigkeiten und anwendungen in der funktionentheorie* / W. Alt // Math. Zeit. – 1974. – Vol. 137, no. 3. – P. 227 – 256.

[7] Kerzman, N. *The Szegö kernel in terms of Cauchy–Fantappié kernels* / N. Kerzman, E. M. Stein // Duke Math. J. – 1978. – Vol. 45, no. 3. – P. 197 – 224.

УДК 514.76.2

ДИВИЗОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА И АБЕЛЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ НА ТОРЕ

Т. С. Крепицина

DIVISORS THE PRYM DIFFERENTIALS AND ABELIANS DIFFERENTIALS ON THE TORUS

T. S. Krepizina

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима на торе нашла приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики [1-7]. Цель работы — получить новые свойства мероморфных дифференциалов Прима и абелевых дифференциалов на переменном торе и для переменных характеров в связи с дивизорами.

The theory of multiplicative functions and Prym differentials on torus has found applications in the theory of functions, the analytical theory of numbers and in the equations of mathematical physics [1-7]. The work purpose — to receive new properties of meromorphic Prym differentials and abelians differentials on variable torus and variable characters, in connection with divisors.

Ключевые слова: дифференциал Прима, дивизоры, абелевы дифференциалы, переменный тор, переменные характеры, мероморфные дифференциалы.

Keywords: Prym differential, divisors, abelians differentials, variable tor, variable characters, meromorphic differentials.

Работа поддержана грантом ФЦП (№ 02.740.11.0457).

1. Предварительные сведения

Пусть F_0 — компактная риманова поверхность рода $g = 1$, $F_0 = \mathbb{C}/\Gamma$, где Γ — группа с двумя образующими $A_1(z) = z + \omega$, $B_1(z) = z + \omega'$, $Im\frac{\omega'}{\omega} > 0$. Положим $\mu_0 = \frac{\omega'}{\omega}$. Фундаментальная группа для поверхности F_0 имеет алгебраическое представление $\pi_1(F_0) \cong \Gamma =< a_1, b_1 : a_1 b_1 = b_1 a_1 >$. Класс $[F_0, \{a_1, b_1\}]$ конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1 единственно определяется одним комплексным параметром (модулем) $\mu_0 = \frac{\omega'}{\omega}$, лежащим в верхней полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$. При этом $F_0 = \mathbb{C}/\Gamma_0$, где Γ_0 — группа с двумя образующими $A_{01}(z) = z + 1$, $B_{01}(z) = z + \mu_0$.

Любой другой класс $[F_\mu, \{a_1^\mu, b_1^\mu\}]$ конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1 также единственно определяется одним комплексным параметром (модулем) $\mu \in H$ и $F_\mu = \mathbb{C}/\Gamma_\mu$, где Γ_μ порождается двумя образующими $A_{\mu 1}(z) = z + 1$, $B_{\mu 1}(z) = z + \mu$. Кроме того, существует квазиконформное отображение $\widetilde{f}_\mu : F_0 \to F_\mu$ и его поднятие $f_\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ на универсальные накрывающие поверхности задает изоморфизм отмеченной группы Γ_0 на отмеченную группу $\Gamma_\mu = f_\mu \Gamma_0 f_\mu^{-1}$ и $a_1^\mu = \widetilde{f}_\mu(a_1)$, $b_1^\mu = \widetilde{f}_\mu(b_1)$.

Пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1(F_0)$, состоящее из классов $[F_\mu, \{a_1^\mu, b_1^\mu\}]$ конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1, параметризовано точками H и является 1-мерным комплексно аналитическим многообразием. Это пространство с метрикой Тейхмюллера биголоморфно изометрично пространству $(H, \frac{|dz|}{2y})$, $z = x + iy$, постоянной отрицательной кривизны -4. [9].

Далее, для любого натурального числа $n > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbb{T}_1$, у которого слой над $\mu \in \mathbb{T}_1$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n, который голоморфно зависит от μ [7].

Характер ρ на торе F это произвольный гомоморфизм из Γ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Он однозначно определяется вектором $(\rho(a_1), \rho(b_1)) \in [\mathbb{C}^*]^2$. Отсюда имеем изоморфизм группы характеров $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ и $[\mathbb{C}^*]^2$. Характер ρ называется *несущественным* на F_μ, если существует $c(\mu, \rho) \in \mathbb{C}^1$, такое, что $\rho(a_1^\mu) = \exp 2\pi i c(\mu, \rho)$,

$$\rho(b_1^\mu) = \exp 2\pi i c(\mu, \rho)\pi_{11},$$

где для канонического базиса $\zeta_1(\mu) = Cdz, C \neq 0$, голоморфных абелевых дифференциалов на переменной римановой поверхности F_μ, двойственного каноническому базису $\{a_1^\mu, b_1^\mu\}$ в $\pi_1(F_\mu)$ имеем $\int_{a_1^\mu} \zeta_1(\mu) = \delta_{11} = 1$, $\int_{b_1^\mu} \zeta_1(\mu) = \pi_{11} = \mu$. Несущественные характеры образуют подгруппу L_1 в группе $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$. Характеры из $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_1$ будем называть *существенными* [3; 6]. Характер называется нормированным, если все его значения лежат на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Мультипликативной функцией f на F для ρ называется однозначная мероморфная функция $w = f(z)$ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям $f(Tz) = \rho(T)f(z),\ z \in \mathbb{C},\ T \in \Gamma$.

Если f_0 — мультипликативная функция без нулей и полюсов на F_μ для ρ, то $\frac{df_0}{f_0} =$

$2\pi i c_1(\mu,\rho)\zeta_1(\mu)$, а значит

$$f_0(\mu,P)=\exp\int_{P_0[\mu]}^{P}2\pi i c_1(\mu,\rho)\zeta_1(\mu),$$

где $P_0[\mu]=\widetilde{f}^{s[\mu]}(P_0)\in F_\mu$, c_1 зависит голоморфно от μ и ρ. При этом интегрирование ведется от фиксированной точки $P_0[\mu]$ до текущей точки P на переменной поверхности F_μ, и $s[\mu]$ — сечение К. Эрла над $\mathbb{T}_1$ [7]. Такую функцию будем называть мультипликативной единицей для ρ.

Определение 1.1. *q-дифференциалом Прима ϕ для ρ, относительно группы Γ, т.е. (ρ,q)-дифференциалом, называется дифференциал $\phi(z)dz^q$, такой, что $\phi(Tz)(T'z)^q=\phi(z)\rho(T)$, $z\in\mathbb{C}, T\in\Gamma$.*

В частности, при $q=0$ это мультипликативная функция для ρ, относительно Γ.

Определение 1.2. *Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на компактной римановой поверхности F для характера ρ называется мультипликативно точным, если $\phi=df(z)$ и*

$$f(Tz)=\rho(T)f(z), T\in\Gamma, z\in\mathbb{C},$$

т. е. f — мультипликативная функция на F класса C^2 для ρ.

Пусть D — дивизор на F. Введем, по аналогии с классическим случаем $\rho=1$, для любого характера ρ следующие пространства : $L_\rho(D;F)$, состоящее из мультипликативных мероморфных функций f на F для ρ, таких, что $(f)\geq D$, и $\Omega_\rho(D;F)$, состоящее из мероморфных 1-дифференциалов ω на F для ρ, таких, что $(\omega)\geq D$. Обозначим через $r_\rho(D)=\dim_{\mathbb{C}}L_\rho(D;F)$, $i_\rho(D)=\dim_{\mathbb{C}}\Omega_\rho(D;F)$ размерности этих комплексных векторных пространств.

Теорема Римана-Роха для характеров [3; 6]. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g=1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера $\rho,\rho\neq 1$ верно равенство $r_\rho(D^{-1})=\deg D+i_{\rho^{-1}}(D)$.*

Предложение 1.1. [10]. *Размерность $\dim_{\mathbb{C}}L_\rho(1;F)=r_\rho(1)$ равна 1 при $\rho\in L_1$ и равна 0 при $\rho\in Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_1$.*

Положим $\psi(\rho)=\frac{1}{2\pi i}(\log\rho(b_1)-\log\rho(a_1)\pi_{11})$.

Теорема Абеля для характеров на торе [3; 4; 6]. *Пусть $[F;\{a_1,b_1\}]$ — отмеченная компактная риманова поверхность рода 1, ρ — характер для F и $D=\dfrac{P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Qs^{\beta_s}}$ — дивизор степени нуль на F. Тогда существует мультипликативная функция f на F для ρ с $(f)=D\Leftrightarrow$ $\psi(\rho)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j z_j-\sum_{k=1}^{s}\beta_k w_k=\varphi(D)$ в $J(F)=\varphi(F)$, где $\varphi(P_j)=z_j$, $\varphi(Q_k)=w_k$ и φ — отображение Якоби из F на $J(F)$.*

Следствие 1.1. [4; 6]. *Для любого несущественного характера ρ на торе F, т.е. характер задается мультипликаторами $\mu=e^{\lambda\omega},\mu'=e^{\lambda\omega'}$ с условием $\frac{1}{i\pi}(\omega\log\mu'-\omega'\log\mu)=0$ в $J(F)$, не существует мультипликативной функции f на F для ρ, имеющей точно один простой полюс на F.*

Следствие 1.2. [3; 10]. *Каждый дивизор*

$$D=\frac{P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}}\neq 1,$$

$\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{N}$, степени нуль на торе F будет дивизором мультипликативной функции

$$f(P)=f(Q_0)\exp\left[\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\int_{Q_0}^{P}\tau_{P_jP_0}-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{s}\beta_j\int_{Q_0}^{P}\tau_{Q_jP_0}+\log\rho(a_1)\int_{Q_0}^{P}\zeta_1\right]$$

для некоторого нормированного характера $\rho(a_1)=\exp 2\pi i c$, $\rho(b_1)=\exp 2\pi i(c\pi_{11}+d)$, $d\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, где τ_{PQ} — нормированный абелев дифференциал третьего рода с простыми полюсами P,Q и вычетами + 1 и -1 соответственно.

Следствие 1.3. [3; 10]. *Для любого существенного характера ρ на торе F существует мультипликативная функция f для ρ, имеющая точно один простой полюс в любой точке Q_1 на F. При этом*

$$f(P)=\exp[\int_{Q_0}^{P}\tau_{P_1P_0}-\int_{Q_0}^{P}\tau_{Q_1P_0}+\log\rho(a_1)\int_{Q_0}^{P}\zeta_1],$$

где $\varphi(P_1)=\varphi(Q_1)+\psi(\rho)$ в $J(F)$ и $\psi(\rho)\neq 0$.

Обозначим через $\Omega^q_\rho(D;F_\mu)$ пространство (ρ,q)-дифференциалов, которые кратны дивизору D на F_μ. Его размерность обозначим через $i_{\rho,q}(D)$.

Теорема Римана – Роха для q–дифференциалов и характеров. ([3; 6]). *Для любого $q\in\mathbb{Z}$ верно равенство*

$$i_{\rho,q}(D)=-\deg D+i((f)Z^q/D)=$$
$$=-\deg D+r((f)Z^{q-1}/D)$$

при любом характере ρ на римановой поверхности F рода $g=1$, где f — любая мультипликативная функция для ρ, $f\neq 0$ и Z — канонический класс дивизоров абелевых дифференциалов на F.

Предложение 1.2.[10]. *Пусть ρ — любой характер на переменном торе F_μ и $q\in\mathbb{Z}$. Тогда $i_{\rho,q}(1;F_\mu)=\dim_{\mathbb{C}}\Omega^q_\rho(1;F_\mu)=1$ при $\rho\in L_1$ и $i_{\rho,q}(1;F_\mu)=0$ при $\rho\in Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_1$. Причем $\Omega^q_\rho(1;F_\mu)=\langle dz^q\exp 2\pi i c(\mu,\rho)z\rangle$ при $\rho\in L_1$, где $\rho(a_1)=\exp 2\pi i c(\mu,\rho)$.*

2. Элементарные дифференциалы Прима

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют так называемые элементарные дифференциалы [3; 6; 8] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса, и голоморфно зависящие от характеров ρ и от модулей μ римановой поверхности рода один.

Теорема 2.1. *1. Для любого существенного характера ρ, точки Q_1 на торе F_μ и натурального числа $q \geq 1$ существует элементарный (ρ, q)-дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом $Q_1 = Q_1[\mu]$ на F_μ, локально голоморфно зависящий от ρ и μ;*

2.Для любого несущественного характера ρ и точки $Q_1 \in F_\mu$ при $q \geq 1$ не существует элементарный (ρ, q)-дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом Q_1 на F_μ.

Доказательство. 1) Пусть ρ — существенный характер и $q \geq 1$. Построим такие дифференциалы локально голоморфно зависящие от ρ и μ. Такой (ρ, q)-дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ можно задать в следующем виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f dz^q$, где f — мультипликативная функция для ρ на F_μ, $q \geq 1$, и dz — голоморфный абелев дифференциал на F_μ. Дивизор $(\tau_{\rho,q;Q_1}) = \frac{R_1}{Q_1} = (f)$. Отсюда получаем равенство

$$\varphi(R_1) = \varphi(Q_1) + \psi(\rho), \psi(\rho) \neq 0, \qquad (*)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$ для F_μ, где Q_1 голоморфно зависит, от μ, а значит, правая сторона голоморфно зависит от μ. Тогда существует единственное решение R_1, голоморфно зависящее от μ и ρ. Отсюда $(f) = \frac{R_1}{Q_1}$ тоже голоморфно зависит от μ и ρ.

2) Пусть ρ — несущественный характер и $q \geq 1$. Если существует дифференциал $\tau = \tau_{\rho,q;Q_1}$ с вычетом в $res_{Q_1}\tau \neq 0$ для некоторой его ветви, то $f_1 = f_0^{-1} dz^{-q} \tau$ — однозначная мероморфная функция с единственным простым полюсом на торе F_μ и $(f_1) = \frac{R_1}{Q_1}, R_1 \neq Q_1$, где f_0 — мультипликативная единица для ρ. По классической теореме Абеля $\varphi(R_1) = \varphi(Q_1)$ в $J(F_\mu)$. Так как φ — взаимно однозначное отображение из F_μ на $J(F_\mu)$, то $R_1 = Q_1$. Противоречие. Теорема доказана.

3. Однозначные мероморфные дифференциалы на торе

Обозначим через $\Omega_2(F_\mu)$ пространство однозначных (абелевых) дифференциалов второго рода с конечным числом полюсов на F_μ, а через $\Omega_{2,e}(F_\mu)$ – подпространство всех точных дифференциалов второго рода на переменном торе F_μ.

Пусть $\widetilde{E}_1 = \bigcup\limits_{\mu} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$ — векторное расслоение у которого над точкой μ из базы $\mathbb{T}_1$ лежит слой $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$.

Теорема 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным векторным расслоением ранга 2 над $\mathbb{T}_1$. При этом набор классов смежности дифференциалов*

$$\zeta_1, \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} \qquad (**)$$

задает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.

Доказательство. Зададим отображение Φ из пространства $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$ на $\mathbb{C}^2$ по правилу: сопоставляем ω его базисные периоды, т. е.

$$\Phi : \omega \to (\int\limits_{a_1} \omega, \int\limits_{b_1} \omega) \in \mathbb{C}^2.$$

Ядро отображения Φ совпадает с $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Действительно, если все указанные периоды для ω равны нулю, то и все остальные периоды тоже равны нулю. Поэтому дифференциал ω будет точным на F_μ, а значит, принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Ясно, что если дифференциал принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$, то все его периоды равны нулю. Так как отображение Φ взаимнооднозначно и линейно на классах смежности, то $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \leq 2$.

Докажем обратное неравенство

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \geq 2$$

и построим базис этого фактор-пространства.

Рассмотрим набор $(**)$. Если существует линейная комбинация $C_1\zeta_1 + \widetilde{C}_1\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} = df$, то коэффициент $\widetilde{C}_1 = 0$, так как в противном случае f — однозначная функция с единственным простым полюсом на F_μ. Осталось равенство $C_1\zeta_1 = df$. Тогда a_1—период левой части будет равен C_1, а для правой части все периоды равны нулю. Отсюда $C_1 = 0$. Таким образом, доказали линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора $(**)$.

Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) = 2$.

Базис ζ_1 пространства голоморфных абелевых дифференциалов, по теореме Берса [9], можно выбрать голоморфно зависящим от μ. Также классический факт: дифференциалы $\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}$ можно выбрать голоморфно зависящими от μ. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Из классических результатов известно, что ζ_1 и $\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}$ только локально голоморфно зависят от μ из $\mathbb{T}_1$.

Следствие 3.1. *Расслоение $\widetilde{E}_1$ является (глобально) тривиальным над пространством Тейхмюллера и существуют глобальные сечения для $\widetilde{E}_1$ над $\mathbb{T}_1$, т.е. существует два абелевых дифференциала первого и второго рода, которые являются глобальными функциями от μ над $\mathbb{T}_1$.*

Доказательство. Это следует из теоремы Грауэрта, в силу односвязности базы $\mathbb{T}_1$, о том, что над такой базой расслоение становится глобально тривиальным или комплексно аналитически эквивалентным $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{C}^2$. Следствие 3.1 доказано.

Обозначим через $\Omega(\frac{1}{Q_1 \cdots Q_s}, F_\mu)$ пространство абелевых дифференциалов с дивизорами кратными $\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}$, где $Q_1 \ldots Q_s$ — локально голоморфное сечение в пространстве дивизоров степени s над $\mathbb{T}_1$.

Пусть $\widetilde{E}_2 = \bigcup\limits_{\mu} \Omega(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}, F_\mu)$ — векторное расслоение над $\mathbb{T}_1$, $s \geq 1$. По теореме Римана-Роха, $r(Q_1 \ldots Q_s) = -s + i(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s})$. Отсюда $i(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}) = s$, так как $r(Q_1 \ldots Q_s) = 0$.

Рассмотрим набор дифференциалов

$$\zeta_1, \tau_{Q_2 Q_1}, \ldots, \tau_{Q_s Q_1}, \tag{1}$$

которые, по теореме Берса и по классическим результатам, локально голоморфно зависят от μ.

Этот набор линейно независим над $\mathbb{C}$. Если $C_1 \zeta_1 + \widetilde{C}_1 \tau_{Q_2 Q_1} + \ldots + \widetilde{C}_{s-1} \tau_{Q_s Q_1} = 0$ на F_μ, то $\widetilde{C}_1 = \ldots = \widetilde{C}_{s-1} = 0$, так как нет особенностей в правой части. Коэффициент $C_1 = 0$ в силу линейной независимости ζ_1 над $\mathbb{C}$ на F_μ. Таким образом, доказано предложение.

Предложение 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ ранга s, $s \geq 1$, является голоморфным векторным расслоением над $\mathbb{T}_1$, а набор дифференциалов* (1) *дает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Следствие 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{C}^s$ и существуют s глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_1$.*

Обозначим через $\widetilde{E}_3 = \bigcup\limits_{\mu} \Omega(\frac{1}{Q_1 \cdots Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu)$ векторное расслоение над $\mathbb{T}_1$, $s \geq 2$, где $\Omega(1, F_\mu)$ — пространство голоморфных абелевых дифференциалов на F_μ.

По теореме Римана-Роха, $i(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}) = s$ и $i(1) = 1$. Поэтому

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu) = s - 1.$$

Докажем, что набор классов смежности дифференциалов

$$\tau_{Q_2 Q_1}, \ldots, \tau_{Q_s Q_1} \tag{2}$$

будет линейно независим над $\mathbb{C}$ на F_μ. Если $C_1 \tau_{Q_2 Q_1} + \ldots + C_{s-1} \tau_{Q_s Q_1} = \omega$, где ω — голоморфный дифференциал, то все коэффициенты $C_1 = \ldots = C_{s-1} = 0$, так как особые точки правой и левой сторон различны. Таким образом, доказали предложение.

Предложение 3.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_3$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $s-1$ над $\mathbb{T}_1$ и классы смежности дифференциалов набора* (2) *образуют базис локально голоморфных сечений этого расслоения. Кроме того, $\widetilde{E}_3$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{C}^{s-1}$ и существуют $s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_1$.*

4. Мультипликативные функции и единицы на переменном торе

Пусть на F_μ задана мультипликативная мероморфная функция f для любого характера ρ. Тогда дивизор $(f) = D = \frac{R_1^{\alpha_1} \ldots R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1} \ldots Q_s^{\beta_s}}$ на F_μ, где $R_j, Q_i \in F_\mu, \alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, m, \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, s$, и $0 = \deg D = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j$.

Рассмотрим однозначный (абелев) дифференциал $\omega(z)dz = \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ третьего рода на F_μ с простыми полюсами в точках $R_1, \ldots, R_m, Q_1, \ldots, Q_s$ и вычетами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, -\beta_1, \ldots, -\beta_s$ соответственно. Тогда

$$\omega(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_j P_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_j P_0} + 2\pi i c_1 \zeta_1, \tag{$***$}$$

где $c_1 \in \mathbb{C}$, и P_0 не принадлежит $supp D = \{R_1, \ldots, R_m, Q_1, \ldots, Q_s\}$. Отсюда $f(P) = \exp \int\limits_{P_0}^{P} \omega(z)dz$ на F_μ.

Пусть f — мультипликативная функция на торе F_μ. Предположим дополнительно, что в окрестности $U(P_j)$ функция

$$f(P) \sim e^{q_j(k_j)(P)}, k_j(P_j) = \infty,$$

q_j – некоторые многочлены от k_j, $j = 1, \ldots, l$, а в точках $P_{l+1}, \ldots, P_n$ возможны либо полюса, либо нули порядков $r_{l+1}, \ldots, r_n$ соответственно. Положим $\widetilde{g}(P) = \frac{f(P)}{\chi_{P_1, \ldots, P_l}(P)}$ на F_μ, где $\chi_{P_1, \ldots, P_l}(P)$ будет l-точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с теми же асимптотиками в точках $P_1, \ldots, P_l$, как у функции f [8]. Тогда $0 = \deg(\widetilde{g}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j + \sum\limits_{j=l+1}^{n} r_j$. Дифференциал $\widetilde{\omega}(z)dz = \frac{\widetilde{g}'(z)}{\widetilde{g}(z)}dz$ будет абелевым дифференциалом третьего рода с простыми полюсами $R_1, \ldots, R_m, Q_1, \ldots, Q_s, P_{l+1}, \ldots, P_n$, где функция $\widetilde{g}$ имеет дивизор

$$(\widetilde{g}) = D = \frac{R_1^{\alpha_1} \ldots R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1} \ldots Q_s^{\beta_s}} P_{l+1}^{r_{l+1}} \ldots P_n^{r_n},$$

$r_j \in \mathbb{Z}, j = l+1, \ldots, n$ на F_μ, и

$$\widetilde{\omega}(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_j P_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_j P_0} +$$

$$+\sum_{j=l+1}^{n} r_j \tau_{P_j P_0} + 2\pi i c_1 \zeta_1, \qquad (****)$$

где $c_1 \in \mathbf{C}$. Таким образом доказана.

Теорема 4.1. *Мультипликативные функции f на торе F_μ для любого характера ρ, с указанными выше условиями, имеют следующие представления :*

1.$f(P) = \exp\int\limits_{P_0}^{P} \omega(z)dz$, где $\omega(z)dz$ задана формулой (***) на F_μ;

2. $f(P) = \chi_{P_1,...,P_l}(P)\exp\int\limits_{P_0}^{P} \widetilde{\omega}(z)dz$, где $\widetilde{\omega}(z)dz$ задана формулой (****) на F_μ и $1 \le l \le n$, $n \ge 1$, которая имеет асимптотики вида $e^{q_j(k_j)(P)}$ в $U(P_j), j = 1,...,l$. Здесь $\chi_{P_1,...,P_l}(P)$ — l-точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с указанной асимптотикой в точках $P_1,...,P_l$. Эти функции локально голоморфно зависят от μ и ρ.

Если дана функция f для любого ρ, то дивизор $D = (f)$, степени нуль, состоящий из ее нулей и полюсов с учетом кратности, определяется единственно на F_μ. Выясним будет ли верным утверждение, что функция f для некоторого характера по заданному дивизору $D, \deg D = 0$, определяется с точностью до умножения на ненулевую константу.

Известна теорема 1.1.3. [6, с. 40; 3], что каждый дивизор $D \ne 1$ степени 0 будет дивизором единственной (с точностью до умножения на ненулевую константу) мультипликативной функции на торе F_μ, принадлежащей единственному нормированному характеру.

Предложение 4.1. *Пусть D — дивизор, $\deg D = 0$ на компактной римановой поверхности F рода $g = 1$, тогда:*

1. Если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для одного и того же характера ρ, то $f_1 = cf_2$, где $c = const \ne 0$ на F_μ;

2. Если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1 \ne \rho_2$, то $f_1 = f_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F_μ, где $\rho_1 = \rho_2\rho_0$;

3. Если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1 = \rho_2$ и $f_1 = cf_2$, где $c = const \ne 0$ на F_μ;

4. Для любого несущественного характера ρ не существует функции f для ρ с дивизором $(f) = \frac{P_1}{Q_1}$, $P_1 \ne Q_1$, на F_μ.

Доказательство. 1) Рассмотрим частное $g = \frac{f_1}{f_2}$. Дивизор $(g) = 1$ и характер $\frac{\rho}{\rho_1} = 1$, поэтому $g = c \ne 0$ на F_μ, так как g однозначная аналитическая функция на F_μ.

2) Также рассмотрим $g = \frac{f_1}{f_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Таким образом, $f_1 = f_2 g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0.

3) Снова рассмотрим $g = \frac{f_1}{f_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Отсюда ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным, и по теореме [6, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и, по утверждению 1), имеем $f_1 = cf_2$, $c \ne 0$ на F_μ.

4) Действительно, если существует такая функция для несущественного характера ρ, то рассмотрим функцию $g = \frac{f}{f_0}$, где f_0 — мультипликативная единица для ρ. Функция g — однозначная функция с одним простым полюсом на F. Противоречие. Предложение 4.1 доказано.

Замечание 4.1. В то же время существует функция f с заданным дивизором $(f) = \frac{P_1}{Q_1}$ для нормированного характера ρ, а значит, ρ будет существенным характером [6, с. 130].

Следствие 4.1. *Для любого фиксированного характера функция f на торе F_μ восстанавливается по своему дивизору с точностью до умножения на ненулевую константу.*

Ясно, что (ρ, m)−дифференциал $\omega_{\rho,m}$ имеет единственный дивизор D из своих нулей и полюсов с учетом кратности и

$$\deg D = (2g - 2)m = 0, \; m \ge 1.$$

Выясним будет ли по заданному дивизору D, $\deg D = 0$ находиться (ρ, m)-дифференциал $\omega_{\rho,m}$ с точностью до умножения на ненулевую константу на поверхности F_μ рода $g = 1$.

Известно из [3, с. 23], что любой дивизор D степени нуль при $m \ge 1$ есть дивизор единственного (с точностью до умножения на ненулевую константу) (ρ, m)-дифференциала, принадлежащего к единственному нормированному характеру на торе.

Предложение 4.2. *Пусть D — дивизор, $\deg D = 0$, на торе F_μ и $m \ge 1$, тогда:*

1. Если существуют два (ρ, m)-дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для одного и того же характера ρ, то $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = const \ne 0$ на F_μ.

2. Если существуют два (ρ, m)-дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$ для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1 \ne \rho_2$, то $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F_μ, где $\rho_1 = \rho_2\rho_0$.

3. Если существуют два (ρ, m)-дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1 = \rho_2$ и $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = const \ne 0$ на F_μ.

Доказательство. 1) Рассмотрим частное $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Дивизор $(g) = 1$ и характер $\frac{\rho}{\rho} = 1$, поэтому $g = c \ne 0$ на F_μ, так как g — однозначная аналитическая функция на F_μ.

2) Теперь рассмотрим $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен

быть несущественным. Таким образом, $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0 и $\rho_1 = \rho_2\rho_0$.

3) Рассмотрим $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Отсюда характер ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным и, по теореме [6, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и, по утверждению 1), $\omega_1 = c\omega_2$, $c \neq 0$ на F_μ. Предложение 4.2 доказано.

Литература

[1] Ахиезер, Н. И. *Элементы теории эллиптических функций* / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1970.

[2] Чуешев, В. В. *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2005.

[3] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.

[4] Appell, P. *Principes de la theorie des fonctions elliptiques et applications* / P. Appell, E. Lacour. – Paris: Gauthier-Villars, 1897.

[5] Forsyth, A. R. *Theory of functions of a complex variable* / A. R. Forsyth. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1900.

[6] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – Vol. 71. New-York: Springer, 1992.

[7] Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties* / C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – 107. – P. 255 – 286.

[8] Дубровин, Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1* / Б. А. Дубровин. – М.: МГУ, 1986.

[9] Альфорс, Л. В. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения* / Л. В. Альфорс, Л. Берс. – М.: ИЛ, 1961.

[10] Крепицина, Т. С. *Группа характеров и мультипликативные функции на торе* / Т. С. Крепицина // Вестник КемГУ. – 2011. – Вып. 3(47). – С. 11 – 16.

УДК 515.17 + 517.545

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА И ИХ КЛАССЫ ПЕРИОДОВ НА ПЕРЕМЕННОЙ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т. А. Пушкарева, В. В. Чуешев

HARMONIC PRYM DIFFERENTIALS AND THEIR CLASSES PERIODS ON VARIABLE COMPACT RIEMANN SURFACE

T. A. Pushkareva, V. V. Chueshev

Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов играют большую роль в современной теории функций на компактных римановых поверхностях [1 – 5]. В работе исследовано гармоническое расслоение Прима, слои которого есть пространства гармонических дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях. Доказано, что когомологическое расслоение Ганнинга, связанное с классами периодов, будет вещественно-аналитически изоморфно гармоническому расслоению Прима над произведением пространства Тейхмюллера и пространства нетривиальных нормированных характеров.

Harmonic Prym differentials and their periods classes play the big role in contemporary theory functions on compact Riemann surfaces. In this paper is investigated harmonic Prym bundle, whose fibre is space of harmonic Prym differentials on variable compact Riemann surfaces. Proven that cohomology Gunning bundle, which connect with periods classes, are real analytically isomorphic harmonic Prym bundle over product Teichmueller space and a space of nontrivial normalized characters.

Ключевые слова: гармонический дифференциал Прима, переменная компактная риманова поверхность, переменные характеры, пространство Тейхмюллера.

Keywords: harmonic Prym differential, variable compact Riemann surface, variable characters, Teichmueller space.

Работа поддержана грантами: АВЦП, 2.1.1.3707; ФЦП, №-02.740.11.0457; РФФИ 09 - 01 - 00255; НШ - 7347.2010.1; РФФИ 11 - 01 - 90709;

1. Предварительные сведения

Пусть F – фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 – риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге

$$U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\},$$

такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0 и Γ изоморфна $\pi_1(F)$. Эта группа имеет представление $\Gamma = \langle A_1, ..., A_g, B_1, ..., B_g : \prod_{j=1}^{g} C_j = I\rangle$, где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}, j = 1, ..., g$, а I – тождественное отображение [2] .

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, где $\mu(z)$ – комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0. Пусть $M(F)$ – множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0, $Diff^+(F)$ – группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, а $Diff_0(F)$ – нормальная подгруппа в $Diff^+(F)$, состоящая из всех диффеоморфизмов гомотопных тождественному диффеоморфизму на F_0. Группа $Diff^+(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in Diff^+(F), \mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/Diff_0(F)$ [2; 3].

Так как отображение $U \to F_0 = U/\Gamma$ локальный диффеоморфизм, то любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до Γ^c–дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L_\infty(U), \|\mu\|_\infty = esssup_{z\in U}|\mu(z)| < 1$, и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(\overline{z}), z \in U, T \in \Gamma$.

Если Γ–дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbf{C}}\backslash U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\overline{z}} = \mu(\overline{z})w_z$. Отображение $T \to T^\mu = w^\mu T(w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу

$$\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma(w^\mu)^{-1} = \langle A_1^\mu, ..., B_g^\mu : \prod_{j=1}^{g}[A_j^\mu, B_j^\mu] = I\rangle.$$

Классические результаты Л. Альфорса, Л. Берса [3] и других авторов утверждают, что: 1) $\mathbf{T}_g(F)$ является комплексно-аналитическим многообразием размерности $3g - 3$ при $g \geq 2$; 2) $\mathbf{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру, такую, что естественное отображение $\Phi : M(F) \to M(F)/Diff_0(F) = \mathbf{T}_g(F)$ будет голоморфным и при этом Φ имеет только локальные голоморфные сечения; 3) элементы из Γ_μ голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ компактных римановых поверхностей.

Характер ρ для F_μ это любой гомоморфизм $\rho : \pi_1(F_\mu) \cong \Gamma_\mu \to \mathbf{C}^*$. Характер ρ вида:
$\rho(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho)$,
$\rho(b_k^\mu) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\pi_{jk}([\mu]))$,
$k = 1, ..., g$, где $\pi_{j,k}$ – матрица $b-$периодов на F_μ, будем называть *несущественными*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Пусть L_g – подгруппа несущественных характеров, $[S^1]^{2g}$ – подгруппа нормированных характеров в группе $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$.

Дифференциалом Прима ϕ для ρ на F_μ назовем дифференциал $\phi = \phi(z)dz$, такой, что $\phi(Tz)T'(z) = \rho(T)\phi(\overline{z}),\ z \in w^\mu(U), T \in \Gamma_\mu$. Обозначим через $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ пространство всех голоморфных дифференциалов Прима для ρ на F_μ.

Для $\phi = df(z)$ на $w^\mu(U)$ верно

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T),$$

где период $\phi(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$ для $T \in \Gamma_\mu$. Такое отображение $\phi : \Gamma_\mu \to \mathbf{C}$, удовлетворяет коциклическому условию, $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T),\ S, T \in \Gamma_\mu$, то есть $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$. Определен класс периодов

$$[\phi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho),$$

где $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ порождается 1-коциклом $\sigma(T) = 1 - \rho(T), T \in \Gamma_\mu$.

Гармоническим дифференциалом Прима ϕ на F для $\rho \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма $\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(\overline{z})d\overline{z}$ на U, такая, что

$$\phi_1(Tz)dTz + \phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz} = \rho(T)(\phi_1(z)dz + \phi_2(\overline{z})d\overline{z}),$$

$T \in \Gamma, z \in U$.

Гармонический дифференциал Прима ϕ на U представляется в виде $\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(\overline{z})d\overline{z}$, где $\phi_1(z)dz = df_1(z), \phi_2(\overline{z})d\overline{z} = d\overline{f_2(z)}, f_j(z)$ — голоморфные функции на $U, j = 1, 2$, которые определяются с точностью до аддитивных комплексных констант. Поэтому $\phi = df(z)$, где

$$f(z) = f_1(z) + \overline{f_2(z)}$$

— комплекснозначная гармоническая функция на U (гармонический интеграл Прима для дифференциала ϕ). Также получаем следующие соотношения:

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T), \phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T),$$

где

$$\phi(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0) = \phi_1(T) + \phi_2(T),$$

$$\phi_1(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0),$$
$$\phi_2(T) = \overline{f_2(Tz_0)} - \rho(T)\overline{f_2(z_0)}.$$

Здесь

$$\phi_1(Tz)dTz = \rho(T)\phi_1(z)dz,$$
$$\phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz} = \rho(T)\phi_2(\overline{z})d\overline{z},$$

$T \in \Gamma, z \in U$. Следовательно, отображение периодов $\phi : T \to \phi(T)$ или $\phi : \Gamma \to \mathbf{C}$, относительно гармонического интеграла Прима $f(z)$, есть элемент из $Z^1(\Gamma, \rho)$. Если $\widehat{f_1}(z) = f_1(z) + c_1, \widehat{f_2}(z) = f_2(z) + c_2$ — другие интегралы Прима для $\phi_1(z)dz, \phi_2(\overline{z})d\overline{z}$ соответственно, то

$$\widehat{\phi_1}(T) = \phi_1(T) + c_1\sigma(T),$$
$$\widehat{\phi_2}(T) = (\overline{f_2(Tz_0) + c_2}) - \rho(T)(\overline{f_2(z_0) + c_2}) = = \phi_2(T) + \overline{c_2}\sigma(T).$$

Таким образом,

$$\widehat{\phi}(T) = \phi(T) + (c_1 + \overline{c_2})(1 - \rho(T)), T \in \Gamma,$$

и отображения периодов при различных гармонических интегралах Прима для одного и того же гармонического дифференциала Прима будут отличаться на элемент из $B^1(\Gamma, \rho)$. Поэтому $\mathbf{C}$−линейное отображение $p : \phi \to [\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$, которое гармонический дифференциал Прима ϕ переводит в его класс периодов $[\phi]$, корректно определено.

Обозначим через $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ пространство всех гармонических дифференциалов Прима для ρ на F.

Лемма 1.1. [3, с. 106]. *Голоморфное главное $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$−расслоение E биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению*

$$\mathbf{T}_g(F) \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$$

над $\mathbf{T}_g(F)$.

2. Эквивалентность соотношений Аппеля и Ганнинга для периодов замкнутых дифференциалов Прима

В работе П. Аппеля [1], с помощью специальных рассечений на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, получено основное соотношение на классы $[\phi]$ периодов замкнутых дифференциалов Прима $\phi = \phi(z)dz$ для ρ на F :

$$\sum_{k=1}^{g} \frac{\phi(B_k)(1 - \rho(A_k)) - \phi(A_k)(1 - \rho(B_k))}{\rho(A_1)\rho(A_2)...\rho(A_k)} \frac{1}{\rho(B_k)} = 0. \tag{1}$$

В работе Р. Ганнинга [4], с помощью соотношений для фуксовой группы Γ, получено другое соотношение:

$$\sum_{k=1}^{g} \phi(B_k)\sigma(A_k) - \phi(A_k)\sigma(B_k) = 0 \tag{2}$$

для классов $[\phi]$ периодов замкнутых дифференциалов Прима ϕ для ρ на F.

Предложение 2.1. *Для любого замкнутого дифференциала Прима ϕ для ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ соотношение Аппеля (1) эквивалентно соотношению Ганнинга (2).*

Доказательство. Положим

$$1 - \rho(A_k) = \sigma(A_k), \quad 1 - \rho(B_k) = \sigma(B_k)$$

для $k = 1, ..., g$. Рассмотрим замену переменных:

$$\tilde{\phi}(A_1) = \frac{1}{\rho(A_1)\rho(B_1)}\phi(A_1),$$
$$\tilde{\phi}(B_1) = \frac{1}{\rho(A_1)\rho(B_1)}\phi(B_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{\phi}(A_k) = \frac{1}{\rho(A_1...A_k)\rho(B_k)}\phi(A_k),$$
$$\tilde{\phi}(B_k) = \frac{1}{\rho(A_1...A_k)\rho(B_k)}\phi(B_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{\phi}(A_g) = \frac{1}{\rho(A_1...A_g)\rho(B_g)}\phi(A_g),$$
$$\tilde{\phi}(B_g) = \frac{1}{\rho(A_1...A_g)\rho(B_g)}\phi(B_g).$$

Из вида блочно диагональной матрицы замены следует, что ее определитель не равен нулю: $\frac{1}{\rho(A_1)^2\rho(B_1)^2} \cdots \frac{1}{\rho(A_1...A_k)^2\rho(B_k)^2} \cdots \frac{1}{\rho(A_1...A_g)^2\rho(B_g)^2} \neq 0$. Поэтому эта матрица невырожденная. После замены формула Аппеля примет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{g}(\tilde{\phi}(B_k)\sigma(A_k) - \tilde{\phi}(A_k)\sigma(B_k)) = 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{g}(\phi(B_k)\sigma(A_k) - \phi(A_k)\sigma(B_k)) = 0.$$

Предложение доказано.

3. Гармоническое расслоение Прима

Теорема 3.1. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, ϕ — гармонический дифференциал Прима на F для $\rho \in [S^1]^{2g}$ и $[\phi] = 0$ в $H^1(\Gamma, \rho)$. Тогда $\phi = 0$ на F.*

Доказательство 1. [3, с. 155]. По лемме 3.2.1 [3] дифференциал $\phi = \varpi + \overline{\varphi}$, где ϖ и φ — голоморфные дифференциалы Прима для ρ и $\overline{\rho}$ соответственно на F. Из условия $[\phi] = 0$ и леммы 3.2.2 [3] следует существование мультипликативной функции f на F для ρ, такой, что $\varpi + \overline{\varphi} = df(z)$ на U. Покажем, что $\varpi = 0 = \varphi$ на U. От противного. Предположим, что $\varphi \neq 0$ на фундаментальной области Δ для группы Γ (или на F). Тогда, положив $\varphi = g(z)dz$ на Δ, имеем:

$$\frac{i}{2}\int\int_{\Delta} \varphi \wedge \overline{\varphi} = \int\int_{\Delta} |g(z)|^2 dx \wedge dy > 0.$$

С другой стороны,

$$\varphi \wedge \overline{\varphi} = \varphi \wedge \varpi + \varphi \wedge \overline{\varphi} = \varphi \wedge df = -d(f\varphi).$$

Отсюда

$$\int\int_{\Delta}\varphi\wedge\overline{\varphi}=\int\int_{\Delta}\varphi\wedge df=-\int_{\partial\Delta}f\varphi=0$$

по теореме 3.2.3 [3, с. 155], так как $\rho_1=\rho,\rho_2=\overline{\rho}$, $\rho\overline{\rho}=1$ и для дифференциала df все a–периоды и b–периоды равны 0. Получили противоречие. Поэтому $\phi=\varpi$.

Повторяя предыдущие рассуждения с ϖ, получим, что $\varpi=0$ на U.

Доказательство 2. Используя обозначения предыдущего доказательства, получим, что:

$$0\leq(\phi,\phi)=\int\int_{\Delta}\phi\wedge*\overline{\phi}=\int_{\partial\Delta}f(z)(*\overline{\phi})=0.$$

Последнее равенство снова выводится из теоремы 3.2.3 [3]. Отсюда $(\phi,\phi)=0$ на Δ и $\phi=0$ на Δ. Следовательно, $\phi=0$ на F. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Гармонический дифференциал Прима ϕ на F для $\rho\in[S^1]^{2g}\backslash 1$ единственно определяется своим классом периодов* $[\phi]\in H^1(\Gamma,\rho)$ *и* $\Gamma(F,\mathcal{H}^1(\rho))\cong H^1(\Gamma,\rho)$.

Доказательство. Так как отображение периодов p – $\mathbf{C}$–линейное инъективное отображение $(2g-2)$–мерного векторного пространства $\Gamma(F,\mathcal{H}^1(\rho))$ в $(2g-2)-$мерное векторное пространство $H^1(\Gamma,\rho)$, то $\Gamma(F,\mathcal{H}^1(\rho))\cong H^1(\Gamma,\rho)$ для $\rho\in[S^1]^{2g}\backslash 1$. Следствие доказано.

Множество всех гармонических дифференциалов Прима ϕ для $\rho\in Hom(\Gamma_\mu,\mathbf{C}^*)$ образует комплексное $(2g-2)$–мерное векторное пространство $\Gamma(F_\mu,\mathcal{H}^1(\rho))$ при $\rho\notin L_g\cup\overline{L_g}$, так как

$$\Gamma(F_\mu,\mathcal{H}^1(\rho))=\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))\oplus\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho)),$$

где $\overline{L_g}$ — образ L_g при отображении $\rho\to\overline{\rho}$. Выберем базис $\{\phi_j(z;\rho,[\mu])dz\}_{j=1}^{g-1}$ для $\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))$, голоморфно зависящий от ρ в достаточно малой окрестности $U(\rho_0)\subset Hom(\Gamma_\mu,\mathbf{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})$ и голоморфно зависящий от $[\mu]$ в достаточно малой окрестности $U([\mu_0])\subset\mathbf{T}_g$ [3, с. 105; 4]. Одновременно выберем базис $\{\phi_j(z;\overline{\rho},\overline{[\mu]})dz\}_{j=1}^{g-1}$ в $\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\overline{\rho}))$, голоморфно зависящий от $\overline{\rho}$ в $\overline{U(\rho_0)}$ (образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho\to\overline{\rho}$, это отображение будет автоморфизмом на $L_g\cup\overline{L_g}$) и голоморфно зависящий от $\overline{[\mu]}$ в достаточно малой окрестности $\overline{U([\mu_0])}$. Здесь класс $[\mu]$ имеет модули $(c_1,c_2,...,c_{3g-3})\in\mathbf{C}^{3g-3}$, а класс $\overline{[\mu]}$ имеет модули $(\overline{c_1},\overline{c_2},...,\overline{c_{3g-3}})\in\mathbf{C}^{3g-3}$.

Поэтому набор гармонических дифференциалов Прима

$$\phi_1(z;\rho,[\mu])dz,\ ...,\ \phi_{g-1}(z;\rho,[\mu])dz;$$

$$\overline{\phi_1(z;\overline{\rho},\overline{[\mu]})dz},\ ...,\ \overline{\phi_{g-1}(z;\overline{\rho},\overline{[\mu]})dz}$$

образует базис, голоморфно зависящий от $\rho\in U(\rho_0)$ и от $[\mu]$.

Таким образом, на комплексном векторном расслоении (это есть так называемое гармоническое расслоение Прима)

$$\mathbf{HP}=\cup_{[\mu],\rho\notin L_g\cup\overline{L_g}}\Gamma(F_\mu,\mathcal{H}^1(\rho))=\mathbf{P}_{1,0}\oplus\mathbf{P}_{0,1}$$

ранга $2g-2$ над $\mathbf{T}_g\times Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение на слое $\Gamma(F_\mu,\mathcal{H}^1(\rho))$ определено по формуле:

$$(\phi_1,\phi_2)=i\int\int_{w^{s([\mu])}(\Delta)}(u_1\overline{u_2}+v_1\overline{v_2})dz\wedge d\overline{z},$$

где Δ — фиксированная фундаментальная область для Γ в U; $\phi_j=u_j(z)dz+v_j(z)d\overline{z}$, $j=1,2$. Здесь $s([\mu)]$ – локально голоморфное сечение Эрла над пространством Тейхмюллера [6].

Скалярное произведение эрмитово, так как $(\phi_1,\phi_2)=\overline{(\phi_2,\phi_1)}$. Легко видеть, что $\mathbf{C}$–линейный оператор $*$ (звезда Ходжа) будет изометрией на слое $\Gamma(F_\mu,\mathcal{H}^1(\rho))$. Оператор $*$ также изометрия слоя $\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))$ на себя и изометрия слоя $\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))$ на себя.

Относительно этого скалярного произведения пространства $\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))$ и $\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))$ ортогональны, так как, если $\phi_1=u(z)dz\in\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho)),\phi_2=v(z)d\overline{z}\in\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))$, тогда $(\phi_1,\phi_2)=\int_i\int_{w^{s([\mu])}(\Delta)}udz\wedge*\overline{v(z)d\overline{z}}=0$. Векторные расслоения $\mathbf{P}_{1,0},\mathbf{P}_{0,1}$ и $\mathbf{HP}$ являются эрмитовыми голоморфными векторными расслоениями над $\mathbf{T}_g\times Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})$. Следовательно, доказана

Теорема 3.2. *Гармоническое расслоение Прима* $\mathbf{HP}=\bigcup_{([\mu],\rho)}\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))\oplus\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))$ *является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2$. Кроме того,* $\mathbf{HP}$ *является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных $*-$инвариантных векторных подрасслоений* $\mathbf{P}_{1,0}$ *и* $\mathbf{P}_{0,1}$ *ранга $g-1$ над*

$$\mathbf{T}_g\times Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})$$

при любом $g\geq 2$.

Зададим конечное покрытие для $Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash 1$ открытыми окрестностями $U_j=\{\rho:\rho(A_j)\neq 1\}$, $U_{g+j}=\{\rho:\rho(B_j)\neq 1\},j=1,...,g$. Рассмотрим характер $\rho\in[S^1]^{2g}\backslash 1\cap U_1$. Для других окрестностей $U_j,\ j=2,...,2g$ рассмотрения будут аналогичны.

Следствие 3.2. *Для любого $\rho_0\in[S^1]^{2g}\backslash 1$ существует окрестность $U(\rho_0)\subset\{[S^1]^{2g}\backslash 1\}$ такая, что для $\rho\in U(\rho_0)\cap U_1$ в $\Gamma(F,\mathcal{H}^1(\rho))$ существует базис гармонических дифференциалов Прима $\phi_1=\phi_1(\rho;z),...,\phi_{2g-2}=\phi_{2g-2}(\rho;z)$, вещественно-аналитически зависящий от ρ и имеющий матрицу периодов относительно $A_2,...,A_g,B_2,...,B_g$, вида I_{2g-2} (единичная матрица порядка $2g-2$).*

Доказательство. Над $U(\rho_0)$ выберем базис гармонических дифференциалов Прима

$$\widetilde{\phi}_1(\rho;z)dz,...,\widetilde{\phi}_{g-1}(\rho;z)dz,\overline{\widetilde{\phi}_1(\overline{\rho};z)dz},...,\overline{\widetilde{\phi}_{g-1}(\overline{\rho};z)dz}$$

на F для ρ, вещественно-аналитически зависящий от ρ. Составим блочную матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ классических периодов, относительно $A_2,...,A_g,B_1,B_2,...,B_g$ для этого базиса, где $A=(a_{mk}),B=(b_{ml}),C=(c_{mk}),D=(d_{ml})$, $m=1,...,g-1,k=2,3,...,g,l=1,2,...,g$, так как для $\rho\in U_1$ можно выбрать представитель в классе периодов такой, что период на A_1 будет 0. Если существует линейная зависимость над $\mathbf{C}$ для $2g-2$ строк, то существует гармонический дифференциал Прима с нулевыми базисными периодами, и, по теореме 3.1, он тождественно равен нулю, а это невозможно из-за выбора базиса в $\Gamma(F,\mathcal{H}^1(\rho))$. Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a_{mk} & b_{mk} \\ c_{mk} & d_{mk} \end{pmatrix}=M$, где $m=1,...,g-1,k=2,3,...,g$, имеет $2g-2$ линейно независимых над $\mathbf{C}$ строк и ее определитель не равен нулю. Сделав невырожденное линейное преобразование в $\Gamma(F,\mathcal{H}^1(\rho))$ с матрицей M^{-1}, получим требуемый базис гармонических дифференциалов Прима. Следствие доказано.

4. Когомологическое расслоение Ганнинга

Обозначим через $Z^1(\Gamma,\rho)$ при $\rho\in Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi:\Gamma\to\mathbf{C}$, таких, что $\phi(ST)=\phi(S)+\rho(S)\phi(T),\quad S,T\in\Gamma$.

Приведем основные свойства таких отображений:

1) $\phi(1)=0$, так как $\phi(S\cdot 1)=\phi(S)+\rho(S)\phi(1)$ и $\rho(S)\neq 0$;

2) $\phi(S^{-1})=-\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$, так как

$$0=\phi(1)=\phi(SS^{-1})=\phi(S)+\rho(S)\phi(S^{-1})$$

и $\phi(S^{-1})=-\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$;

3) $\phi([A,B]\cdot[C,D])=\phi([A,B])+\phi([C,D])$, так как $\rho([A,B])=1$;

4) $\phi([A,B])=\sigma(B)\phi(A)-\sigma(A)\phi(B)$ для любых $A,B\in\Gamma$, где $\sigma(T)=1-\rho(T),\quad T\in\Gamma$;

5)
$$\phi(ABA^{-1})=\phi([A,B]B)=$$
$$=\phi([A,B])+\phi(B),\quad A,B\in\Gamma;$$

6) $\phi(ABA^{-1})=\rho(A)\phi(B),\quad A\in\Gamma,B\in[\Gamma,\Gamma]$.

Теорема 4.1. *Когомологическое расслоение Ганнинга G является голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2$ над*

$$\mathbf{T}_g(F)\times(Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash 1).$$

Доказательство. При $\rho_\mu\neq 1$ существует изоморфизм векторного пространства $H^1(\Gamma_\mu,\rho_\mu)$ и векторного пространства $Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu,\Gamma_\mu],\mathbf{C})$, состоящего из гомоморфизмов $\phi_0:[\Gamma_\mu,\Gamma_\mu]\to(\mathbf{C},+)$, таких, что $\phi_0(S^\mu T^\mu(S^\mu)^{-1})=\rho_\mu(S^\mu)\phi_0(T^\mu)$, где $T^\mu\in[\Gamma_\mu,\Gamma_\mu],S^\mu\in\Gamma_\mu,[\Gamma,\Gamma]$ — коммутант группы Γ. Таким образом, расслоение G над

$$\mathbf{T}_g(F)\times(Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash 1)$$

изоморфно расслоению со слоем $Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu,\Gamma_\mu],\mathbf{C})$, над $([\mu],\rho)$, где

$$\rho(A_j)=\rho_\mu(A_j^\mu),\rho(B_j)=\rho_\mu(B_j^\mu),j=1,...,g.$$

Зададим карту $\Theta(U_l,\{A_j,B_j\}_{j=1}^g)$ над $\mathbf{T}_g(F)\times U_l$ биективно отображающую $G\mid_{\mathbf{T}_g(F)\times U_l}$ на $\mathbf{T}_g(F)\times U_l\times\mathbf{C}^{2g-2}$ по правилу: элементу $\phi_0([\mu],\rho_\mu)\in Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu,\Gamma_\mu],\mathbf{C})$ сопоставляется набор

$$([\mu],\rho;\xi_1^l,...,\xi_{g-1}^l,\eta_1^l,...,\eta_{g-1}^l).$$

Здесь над U_l имеем:

$$\xi_j^l=\phi_0([\mu],\rho_\mu)([A_{\tilde{j}}^\mu,A_l^\mu]),\eta_j^l=\phi_0([\mu],\rho_\mu)([B_{\tilde{j}}^\mu,A_l^\mu]),$$

а над U_{g+l} —

$$\xi_j^{g+l}=\phi_0([\mu],\rho_\mu)([A_{\tilde{j}}^\mu,B_l^\mu]),\eta_j^{g+l}=$$
$$=\phi_0([\mu],\rho_\mu)([B_{\tilde{j}}^\mu,B_l^\mu]),$$

где $\tilde{j}=j$, при $1\leq j\leq l-1$, и $\tilde{j}=j+1$, при $l\leq j\leq g-1$. Для $\rho\in U_1$, например, будет $\sigma_\mu(A_1^\mu)=1-\rho_\mu(A_1^\mu)\neq 0$ и любой элемент $\phi_0=\phi_0([\mu],\rho_\mu)\in Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu,\Gamma_\mu],\mathbf{C})$ можно задать как $\phi_0=\phi_1\mid[\Gamma_\mu,\Gamma_\mu]$ для $\phi_1=\phi_1([\mu],\rho_\mu)\in Z^1(\Gamma_\mu,\rho_\mu)$, такого, что $\phi_1(A_1^\mu)=0$,

$$\phi_1(T^\mu)=\sigma_\mu(A_1^\mu)^{-1}\phi_0([T^\mu,A_1^\mu]),T^\mu\in\Gamma_\mu.$$

Отсюда получаем соотношения:

$$\xi_j^1=\phi_0([A_{j+1}^\mu,A_1^\mu])=\phi_1([A_{j+1}^\mu,A_1^\mu])=$$
$$=\sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(A_{j+1}^\mu),$$
$$\eta_j^1=\phi_0([B_{j+1}^\mu,A_1^\mu])=\phi_1([B_{j+1}^\mu,A_1^\mu])=$$
$$=\sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(B_{j+1}^\mu),\quad j=1,...,g-1.$$

Кроме того, из основного коциклического соотношения и задания координат над U_1 следует, что

$$\phi_1(B_1^\mu)=\sigma_\mu(A_1^\mu)^{-2}\sum_{j=1}^{g-1}[\sigma_\mu(B_{j+1}^\mu)\xi_j^1-\sigma_\mu(A_{j+1}^\mu)\eta_j^1].$$

Таким образом, $\phi_1(A_j^\mu),\phi_1(B_j^\mu),j=1,...,g$, выражаются через $\xi_j^1,\eta_j^1,j=1,...,g-1$, и последние можно взять в качестве координат для ϕ_0 в слоях над $\mathbf{T}_g(F)\times U_1$. Аналогично можно поступить для остальных окрестностей.

Координаты ξ_j^l,η_j^l являются линейными комбинациями от $\phi_l(A_j),\phi_l(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0])\times U_l$, а также линейными комбинациями от $\phi_k(A_j),\phi_k(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0])\times U_k\cap U_l$, так как

$\phi_l|_{[\Gamma,\Gamma]} = \phi_0 = \phi_k|_{[\Gamma,\Gamma]}$ над $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$ (здесь ϕ_k и ϕ_l определяются аналогично как ϕ_1 над U_1, над U_k и U_l соответственно). Далее, $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ — линейные комбинации от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k$. Поэтому координаты ξ_j^l, η_j^l будут линейными комбинациями от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$. Таким образом, получим, что матрицы перехода $T_{k,l}$ голоморфны на

$$\mathbf{T}_g(F) \times (U_l \cap U_k)$$

для всех $k, l = 1, ..., 2g$. Следовательно, такие карты $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g)$, $l = 1, ..., 2g$ задают структуру голоморфного векторного расслоения на G над $\mathbf{T}_g(F) \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1)$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Векторные расслоения Ганнинга $G = \bigcup_{([\mu],\rho)} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ и Прима* **HP** *над* $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$ *будут вещественно-аналитично изоморфными, и расслоение Ганнинга G над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$ равно прямой сумме двух вещественно-аналитических комплексных векторных подрасслоений ранга $g-1$ для любого $g \geq 2$.*

Доказательство. Имеем включения

$$[S^1]^{2g}\backslash 1 \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g}) \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1,$$

что сразу следует из теоремы Farkas–Kra [5, с.130], по которой любой нормированный несущественный характер будет тривиальным. На $[S^1]^{2g}\backslash 1$ есть естественная вещественно-аналитическая структура, согласованная с комплексно-аналитической структурой на $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$. Поэтому голоморфные векторные расслоения G и **HP** над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$, ограниченные на $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$, будут вещественно-аналитическими комплексными векторными расслоениями [3; 4], а послойный $\mathbf{C}$–линейный изоморфизм p будет также вещественно-аналитическим изоморфизмом расслоений G и **HP** над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$.

Второе утверждение следует из теорем 3.1, 3.3, и 4.1, а также из теоремы 3.1.3 [3, с. 140]. Теорема доказана.

Литература

[1] Appell, P. *Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application an developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques* / P. Appell // Acta Math. – 1890. – Vol. 13: 3/4. – P. 1 – 174.

[2] Чуешев, В. В. *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности.* / В. В.Чуешев. — Кемерово: КемГУ, 2005.

[3] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч. 2.* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.

[4] Gunning, R. C. *On the period classes of Prym differential* / R. C. Gunning // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 319. – P. 153 – 171.

[5] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – Vol. 71, New-York: Springer, 1992.

6. Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties*/ C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – Vol. 107. – P. 255 – 286.

УДК 517.54: 517.862

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР БЕРСА В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МЕРОМОРФНЫХ (q,ρ)-ФОРМ

О. А. Сергеева

THE INTEGRAL BERS OPERATOR IN THE NORMED SPACES OF MEROMORPHIC (q,ρ)-FORMS

O. A. Sergeeva

В пространствах мультипликативных мероморфных автоморфных форм для произвольного характера вводятся интегральная норма, билинейное спаривание и интегральный оператор Берса. Получены аналог неравенства Шварца для билинейного спаривания, универсальная оценка нормы и свойство самосопряженности для интегрального оператора Берса в случае мероморфных (q,ρ)-форм.

In spaces of multiplicative meromorphic automorphic forms the integral norm, bilinear pairing and the integral Bers operator for any character are entered. Under study an universal estimation of norm, selfadjointness for Bers operator in case of meromorphic (q,ρ) - forms and an analog of an inequality of Schwarz are received.

Ключевые слова: интегральный оператор Берса, мультипликативная мероморфная автоморфная форма, билинейное спаривание, двойственность.

Keywords: Integral Bers operator, multiplicative meromorphic automorphic form, bilinear pairing, duality.

Работа поддержана грантом ФЦП № 02.740. 11. 0457.

1. Предварительные сведения

Пусть D – ограниченное открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, конформно эквивалентное единичному кругу Δ; G – отмеченная конечнопорожденная разрывная группа конформных преобразований множества D на себя, такая, что $D/G = F$ – отмеченная компактная риманова поверхность рода $h \geq 2$.

Пусть $\lambda = \lambda_D$ задаёт метрику Пуанкаре на D по правилу: для конформного отображения $f : \Delta \to D \quad \lambda_D(f(z))|f'(z)| = \lambda_\Delta(z),\ z \in \Delta$, где $\lambda_\Delta(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ – коэффициент метрики Пуанкаре в единичном круге Δ. Известно [1], что для любого конформного преобразования множества D справедливо равество $\lambda_{A(D)}(Az)|A'(z)| = \lambda_D(z), z \in D$.

Обозначим через $Hom(G, \mathbb{C}^*)$ группу всех одномерных комплексных характеров (гомоморфизмов) ρ из G в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ с естественной операцией умножения.

Определение 1. *Измеримой (мероморфной, голоморфной) мультипликативной автоморфной формой порядка q с характером ρ на F ((q,ρ)-формой) называется однозначная измеримая (мероморфная, голоморфная) функция φ на D с условием:*

$$\varphi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\varphi(z), A \in G, z \in D, D/G = F.$$

При этом (q,ρ)-форма и $(q, \frac{1}{\rho})$- форма считаются *ρ-двойственными*, а (q_1,ρ)-форма и (q_2,ρ)-форма – *q-двойственными* формами для $q = q_1+q_2$. Формы одновременно q- и ρ-двойственные называются *(q,ρ)-двойственными* формами.

Мультипликативная автоморфная форма f нулевого порядка с характером ρ называется мультипликативной функцией для ρ. Если f_1 – мультипликативная функция для ρ_1 без нулей и полюсов на D, то характер ρ_1 называется несущественным ([2, 3]), а сама такая функция f_1 называется мультипликативной единицей для ρ_1.

Ключевая роль в развитии мультипликативной теории измеримых автоморфных форм принадлежит разложению Фаркаша-Кра ([2, 3]): для произвольного характера $\rho \in Hom(G, \mathbb{C}^*)$ существует и единственно представление в виде $\rho = \rho_0 \cdot \rho_1$, где ρ_0 – нормированный характер, т. е. $|\rho_0(A)| = 1$ для любого $A \in G$, а ρ_1 – несущественный характер с мультипликативной единицей f_1.

Определение 2.([1]) *Измеримая на $\mathbb{C}$ функция $\nu_q(z)$, $2 \leq q \in \mathbb{N}$ называется обобщённым коэффициентом Бельтрами для разрывной группы G преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с множеством разрывности $\Omega(G)$, если*

$$\nu_q(Az)A'(z)^{1-q}\overline{A'(z)} = \nu_q(z), \ \ A \in G, \ \ z \in \Omega(G),$$

$$\nu_q \mid_{\Lambda(G)} = 0, \ \ \Lambda(G) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega(G),$$

и почти всюду на $\mathbb{C}$ верна оценка

$$|\nu_q(z)| \leq K\lambda(z)^{2-q}, \ \ \text{где} \ \ K = const. \qquad (1)$$

Замечание 1. При $q = 2$ обобщенные коэффициенты Бельтрами являются обычными коэффициентами Бельтрами, возникающими в теории квазиконформных отображений.

Лемма 1.([1]) *Если $\psi \in \mathcal{L}_q^\infty(D,G)$, т. е. ψ – измеримая ограниченная автоморфная форма, то $\lambda(z)^{2-2q} \cdot \overline{\psi(z)}$ является обобщенным коэффициентом Бельтрами для q, у которого коэффициент K из оценки (1) равен*

$$K = \|\psi\|_{q,\infty} = \sup_{z\in D}\left\{\lambda(z)^{-q}|\psi(z)|\right\} < \infty.$$

Кроме того, любой обобщенный коэффициент Бельтрами получается таким способом из измеримой ограниченной автоморфной формы.

Отсюда получаем важную в последующем лемму

Лемма 2. *Пусть ν_{q_1} и ν_{q_2} – два обобщенных коэффициента Бельтрами для q_1 и q_2 соответственно. Тогда*

$$\mu_q(z) = \frac{\nu_{q_1}(z)\cdot\nu_{q_2}(z)}{\lambda(z)^2}, z \in D \qquad (2)$$

тоже обобщенный коэффициент Бельтрами для $q = q_1 + q_2$ на D. Кроме того, таким способом можно получить любой обобщенный коэффициент Бельтрами для $q = q_1 + q_2$.

2. Нормы в пространствах голоморфных и мероморфных (q,ρ)-форм

В работах [4, 5, 6] рассмотрены нормированные пространства $A^p_{q,\rho}(D,G)$ голоморфных (q,ρ)-форм ϕ, интегрируемых со степенью p, с нормой

$$\|\phi\|_0^p = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-pq}\left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\bar{z}| < \infty \qquad (3)$$

для некоторого p, $1 \leq p \in \mathbb{R}$, где f_1 – мультипликативная единица для несущественного характера ρ_1 в разложении Фаркаша-Кра $\rho = \rho_0\rho_1$, $|\rho_0(A)| = 1, A \in G$.

Для голоморфных (q,ρ)-форм ϕ на D, интегрируемых со степенью p, зададим другую норму по правилу:

$$\|\phi\|_1^p = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2(1-p)}\left|\frac{\nu_q(z)\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\bar{z}| < \infty, \qquad (4)$$

где ν_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для q.

Выражение, стоящее под знаком интеграла в (4), инвариантно относительно преобразований из группы G:

$$\lambda(Az)^{2(1-p)}\left|\frac{\nu_q(Az)\phi(Az)}{f_1(Az)}\right|^p |d(Az)\wedge d(\overline{Az})| =$$
$$= \lambda(z)^{2(1-p)}|A'(z)|^{-2(1-p)}\times$$
$$\times\left|\frac{\nu_q(z)\,A'(z)^{q-1}\overline{A'(z)}^{\,-1}\,\phi(z)A'(z)^{-q}\rho(A)}{f_1(z)\rho_1(A)}\right|^p\times$$
$$\times|A'(z)|^2|dz\wedge d\overline{z}| =$$
$$= \lambda(z)^{2(1-p)}\left|\frac{\nu_q(z)\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p\left|\frac{\rho_1(A)\rho_0(A)}{\rho_1(A)}\right|^p|dz\wedge d\overline{z}| =$$
$$= \lambda(z)^{2(1-p)}\left|\frac{\nu_q(z)\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\overline{z}|.$$

Следовательно, $\|\phi\|_1$ не зависит от выбора конкретной фундаментальной области ω для G в D, реализующей на плоскости компактную риманову поверхность $D/G=F$. Ясно, что при фиксированном ν_q, непрерывном в D, выражение для $\|\phi\|_1$ удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Нетрудно установить, что для голоморфных (q,ρ)-форм ϕ на D

$$\|\phi\|_1^p \le K\cdot\|\phi\|_0^p, \qquad (5)$$

где K – константа из оценки обобщенного коэффициента Бельтрами ν_q: $|\nu_q|\le K\lambda^{2-q}$. Действительно:

$$\|\phi\|_1^p = \iint\limits_{D/G}\lambda(z)^{2(1-p)}\left|\frac{\nu_q(z)\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\overline{z}| =$$
$$= \iint\limits_{D/G}\lambda(z)^{2(1-p)}|\nu_q(z)|^p\left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\overline{z}| \le$$
$$\le K^p\iint\limits_{D/G}\lambda(z)^{2(1-p)}\lambda(z)^{(2-q)p}\left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\overline{z}| =$$
$$= K^p\iint\limits_{D/G}\lambda(z)^{2-pq}\left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\overline{z}| = K^p\|\phi\|_0^p.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы

$$\nu_q(a_i)=0,\ \ a_i\in D,\ \ i=1,\ldots,s, \qquad (6)$$

то (4) будет задавать норму и для мероморфных (q,ρ)-форм, кратных дивизору $\left(\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_s}\right)$ (имеющих в качестве возможных особенностей только простые полюса в точках $a_1,\ldots,a_s$) и интегрируемых со степенью p. Пространство таких форм будем обозначать $\Omega^p_{q,\rho}\left(D,G;\left(\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_s}\right)\right)$.

Для голоморфных форм $\phi_1\in A^p_{q,p}(D,G)$ и $\phi_2\in A^{p'}_{q,p}(D,G)$, с условием $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, определено билинейное спаривание [4, 5]:

$$(\phi_1,\phi_2)_{q,p,G,D} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G}\lambda(z)^{2-2q}\frac{\phi_1(z)\overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2}dz\wedge d\overline{z},$$

которое работает только с голоморфными (q,ρ)-формами, имеющими общий порядок q и общий характер ρ.

Для случая (q,ρ)-двойственных форм на D рассмотрим соответствующее билинейное спаривание:

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G}\mu_q(z)\varphi(z)\psi(z)dz\wedge d\overline{z}, \quad (7)$$

где μ_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для $q=q_1+q_2$.

Теорема 1. *Пусть $1\le p<\infty$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Тогда симметричное билинейное спаривание (7) задает линейное отображение между пространствами $\Omega^p_{q_1,\rho}(D,G;\mathrm{A})$ и $\left(\Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}(D,G;\frac{1}{\mathrm{A}})\right)^*$, где $\left(\Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}(D,G;\frac{1}{\mathrm{A}})\right)^*$ – пространство, сопряженное к $\Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}(D,G;\frac{1}{\mathrm{A}})$, A – произвольный дивизор на D.*

Кроме того, если $\varphi\in A^p_{q_1,p}(D,G;(a_1\cdot\ldots\cdot a_s))$ и $\psi\in\Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}\left(D,G;\left(\frac{1}{a_1\ldots a_s}\right)\right)$, то

$$\left|\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G}\right| \le \frac{K_1}{2}\|\varphi\|_0\cdot\|\psi\|_1, \qquad (8)$$

где коэффициенты Бельтрами $\mu_{q_1+q_2}$ и ν_{q_1} (в задании билинейного спаривания (7) и нормы (4) в пространстве мероморфных (q,ρ)-форм соответственно) связаны формулой (2), причем $\nu_{q_2}(a_i)$=0, $a_i\in D, i=1,\ldots,s$, а K_1 – константа из оценки ν_{q_1}.

Доказательство. Первая часть теоремы очевидно следует из задания билинейного спаривания (7). Докажем оценку (8):

$$\left|\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G}\right| = \left|\frac{i}{2}\iint\limits_{D/G}\mu_{q_1+q_2}(z)\varphi(z)\psi(z)dz\wedge d\overline{z}\right|$$
$$\le\frac{1}{2}\iint\limits_{D/G}|\mu_{q_1+q_2}(z)||\varphi(z)|\,|\psi(z)||dz\wedge d\overline{z}| =$$
$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D/G}\frac{|\nu_{q_1}(z)|\,|\nu_{q_2}(z)|}{\lambda(z)^2}|\varphi(z)|\,|\psi(z)||dz\wedge d\overline{z}| \le$$
$$\frac{K_1}{2}\iint\limits_{D/G}\frac{\lambda(z)^{2-q_1}\,|\nu_{q_2}(z)|}{\lambda(z)^2}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|\,|\psi(z)\,f_1(z)|\,|dz\wedge d\overline{z}|.$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\iint\limits_{D/G}|U(z)\,V(z)|\,d\sigma \le$$
$$\le\left(\iint\limits_{D/G}|U(z)|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\iint\limits_{D/G}|V(z|^{p'}d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, для случая, когда мера $d\sigma=\lambda(z)^2|dz\wedge d\overline{z}|$ и функции $U(z)=\lambda(z)^{-q_1}\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}$, $V(z)=\frac{\nu_{q_2}(z)}{\lambda(z)^2}\,\psi(z)\,f_1(z)$. Получим

$$\left|\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G}\right|\le$$
$$\le\frac{K_1}{2}\left(\iint\limits_{D/G}\lambda(z)^2\left|\lambda(z)^{-q_1}\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\overline{z}|\right)^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\times\left(\iint\limits_{D/G}\lambda(z)^2\left|\frac{\nu_{q_2}(z)}{\lambda(z)^2}\,\psi(z)\,f_1(z)\right|^{p'}|dz\wedge d\overline{z}|\right)^{\frac{1}{p'}}=$$
$$=\frac{K_1}{2}\left(\iint\limits_{D/G}\lambda(z)^{2-pq_1}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\overline{z}|\right)^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\times\left(\iint\limits_{D/G}\lambda(z)^{2(1-p')}\left|\frac{\nu_{q_2}(z)\psi(z)}{\frac{1}{f_1(z)}}\right|^{p'}|dz\wedge d\overline{z}|\right)^{\frac{1}{p'}}=$$
$$=\frac{K_1}{2}\,\|\varphi\|_0\cdot\|\psi\|_1.$$

3. Модифицированный оператор Берса $\mathcal{B}_C^{ord}$ в пространстве мероморфных (q,ρ)-форм

Пусть C – квазиокружность в $\overline{\mathbb{C}}$, то есть ориентируемая замкнутая жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, которая является образом единичной окружности по квазиконформному отображению. Обозначим $D_1=IntC$, $D_2=ExtC$, $\lambda_{D_j}(z)|dz|$ – метрику Пуанкаре в D_j, $j=1,2$. Далее там, где это не может привести к путанице, будем опускать обозначение области, принимая $\lambda(z)|dz|$ за метрику Пуанкаре, заданную в $D_1\cup D_2$.

Пусть G – отмеченная конечнопорожденная квазифуксова группа первого рода дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с инвариантной кривой C, такая, что D_1/G – компактная риманова поверхность рода $h\ge 2$.

Для дальнейших оценок по норме рассматриваемых пространств полезными оказываются следующие факты:

Лемма 3.([1, 7]) *Если D – односвязная жорданова область, ∞ не принадлежит D и $\lambda=\lambda_D$ задаёт метрику Пуанкаре на D, то для любой $z\in D$*

$$\lambda(z)|z-\partial D|\ge\frac{1}{4},\tag{9}$$

где ∂D – граница D, $|z-\partial D|=\inf\limits_{z_1\in\partial D}|z-z_1|$.

Для вышеопределённых C, D_1 и D_2 ясно, что $\partial D_1=C=\partial D_2$ и для любых $\zeta\in D_1, z\in D_2$ верно $|z-C|\le|z-\zeta|$, $|\zeta-C|\le|z-\zeta|$.

Лемма 4.([7]) *Для каждого целого $q\ge 2$ и фиксированного $z\in D_2$ функция ${}_q\omega_z=\frac{1}{(\zeta-z)^{2q}}$, $\zeta\in D_1$, голоморфна на D_1 и верна оценка*

$$\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda_{D_1}(\zeta)^{2-q}}{|\zeta-z|^{2q}}\frac{|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|}{2}\le\frac{4^{q-2}2\pi}{q}\frac{1}{|z-C|^q}.\tag{10}$$

Введём $k_q=\frac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}$ — константу для целого $q\ge 2$.

Так как фундаментальная область ω_2 для группы G в D_2 всегда может быть выбрана односвязной и не содержащей ∞ (без ограничения общности можно считать, что $\infty\in\partial\omega$), то, ввиду свойства (9) метрики Пуанкаре и интегральной оценки (10), получаем:

$$\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda_{D_1}(\zeta)^{2-q}}{|\zeta-z|^{2q}}\frac{|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|}{2}\le k_q\lambda_{D_2}(z)^q\tag{11}$$

для $z\in\omega_2\subset D_2$, $q\in\mathbb{Z}$, $q\ge 2$. Отметим также, что функция ${}_q\omega_z=\frac{1}{(\zeta-z)^{2q}}$, как функция двух переменных $\zeta\in D_1, z\in D_2$, симметрична и обладает свойством инвариантности относительно группы G:

$$\frac{1}{(A\zeta-Az)^{2q}}=\frac{1}{(\zeta-z)^{2q}\,A'(\zeta)^q\,A'(z)^q}$$

для любых $A\in G$, $2\le q\in\mathbb{N}$.

Докажем теперь, что для каждого целого $q\ge 2$ и фиксированного $\zeta\in\omega_1$ также верна оценка

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda_{D_2}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\le k_q\lambda_{D_1}(\zeta)^q.\tag{12}$$

Действительно, так как для любого фиксированного $A\in G$ область $A(\omega_2)\subset D_2$ односвязна и не содержит ∞, то, взяв ограничение λ с большей области на подмножества, получим:

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda_{D_2}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}=$$
$$=\sum_{A\in G}\left[\iint\limits_{A(\omega_2)}\frac{\lambda_{A(\omega_2)}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\right]\le$$
$$\le 4^{q-2}\sum_{A\in G}\left[\iint\limits_{A(\omega_2)}\frac{|z-\partial A(\omega_2)|^{q-2}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\right]\le$$
$$\le 4^{q-2}\iint\limits_{\sum\limits_{A\in G}A(\omega_2)}\frac{|z-C|^{q-2}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\le$$
$$\le 4^{q-2}\iint\limits_{D_2}|z-\zeta|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\le$$
$$\le 4^{q-2}\iint\limits_{|z-\zeta|>|\zeta-C|}|z-\zeta|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}=$$
$$=4^{q-2}\iint\limits_{|z|>|\zeta-C|}|z|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}=\frac{4^{q-2}2\pi}{q}\frac{1}{|\zeta-C|^q}\le$$
$$\le\frac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}\lambda_{D_1}(\zeta)^q=k_q\lambda_{D_1}(\zeta)^q.$$

В работе [5] в пространстве голоморфных (q,ρ)-форм был введен и изучен модифицированный оператор Берса $\mathcal{B}_C^{ord}$, который отражает область определения голоморфных форм относительно квазиокружности C и при этом q-двойственно меняет порядок формы, но не изменяет её характер:

$$(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_q(\zeta)f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \tag{13}$$

где $z \in D_2$, $\varphi \in A^p_{q_1,\rho}(D_1, G)$, μ_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D_1)$ для $q = q_1 + q_2$.

Оператор $\mathcal{B}_{-C}^{ord}$ определяется аналогично для форм на D_2 путем замены в (13) D_1 на D_2.

Рассмотрим оператор $\mathcal{B}_C^{ord}$ в пространстве $\Omega^p_{q_1,\rho}\left(D_1, G; \left(\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_s}\right)\right)$ с дополнительным условием на обобщенный коэффициент Бельтрами в его задании.

Теорема 2. *Пусть μ_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D_1 \cup D_2)$ для $q = q_1 + q_2$, $q_1 \geq 2$, $q_2 \geq 2$, с условием*

$$\mu_q(z) = \frac{\nu_{q_1}(z)\cdot\nu_{q_2}(z)}{\lambda^2(z)},\ z \in D_1,$$

где ν_1, ν_2 – обобщенные коэффициенты Бельтрами для q_1 и q_2 соответственно, причем $\nu_{q_1}(a_i) = 0, a_i \in D_1, i = 1, \ldots, s$.

Тогда для произвольного характера ρ модифицированный оператор Берса

$$(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_q(\zeta)f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

$$z \in D_2,\ \varphi \in \Omega^p_{q_1,\rho}\left(D_1, G; \left(\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_s}\right)\right),$$

является ограниченным линейным отображением из $\Omega^p_{q_1,\rho}\left(D_1, G; \left(\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_s}\right)\right)$ в $A^p_{q_2,\rho}(D_2, G)$, $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty, q_1 \geq 2, q_2 \geq 2$, с нормой

$\|\mathcal{B}_C^{ord}\| \leq K_2 k_{q_2}$ *(K_2 – константа из оценки ν_{q_2}')*

и удовлетворяет условию самосопряженности относительно билинейного спаривания (7), а именно: для любых $\varphi \in \Omega^p_{q_1,\rho}\left(D_1, G; \left(\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_s}\right)\right)$ и $\psi \in A^{p'}_{q_1,\frac{1}{\rho}}(D_2, G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, верно

$$\left\langle\varphi, \mathcal{B}_{-C}^{ord}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G} = \left\langle\mathcal{B}_C^{ord}\varphi, \psi\right\rangle_{q_2,q_1,D_2,G}. \tag{14}$$

Замечание 2. В задании интегрального оператора $\mathcal{B}_C^{ord}$ и билинейного спаривания (7) используется один и тот же обобщенный коэффициент Бельтрами μ_q, $q = q_1 + q_2$.

Доказательство. Если φ является мероморфной (q_1, ρ)-формой на D_1, кратной дивизору $\left(\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_s}\right)$, то её образ – форма $\mathcal{B}_C^{ord}\varphi$ будет голоморфной (q_2, ρ)-формой на $D_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$. Действительно, в силу инвариантности D_1 относительно действия группы G имеем:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(Az)A'(z)^{q_2} = \\
&= \frac{i}{2}A'(z)^{q_2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)f_1(Az)}{(\zeta - Az)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \\
&= \frac{i}{2}A'(z)^{q_2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(A\zeta_1)f_1(Az)}{(A\zeta_1 - Az)^{2q_2}f_1(A\zeta_1)} \times \\
&\times\varphi(A\zeta_1)|A'(\zeta_1)|^2 d\zeta_1 \wedge d\overline{\zeta_1} = \\
&= \frac{i}{2}A'(z)^{q_2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta_1)A'(\zeta_1)^{q_1+q_2}}{(\zeta_1 - z)^{2q_2}A'(\zeta_1)^{q_2}A'(z)^{q_2}} \times \\
&\times\frac{f_1(z)\rho_1(A)}{f_1(\zeta_1)\rho_1(A)}\frac{\varphi(\zeta_1)\rho(A)}{A'(\zeta_1)^{q_1}}d\zeta_1 \wedge d\overline{\zeta_1} = \\
&= \frac{i}{2}\rho(A)\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \\
&= \rho(A)(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z).
\end{aligned}$$

Докажем, что для мероморфной формы φ на D_1 форма $\mathcal{B}_C^{ord}(\varphi)$ будет голоморфной на D_2. Для этого сначала докажем голоморфность частного

$$\frac{(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)}{f_1(z)} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)}{(\zeta - z)^{2q_2}}\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \tag{15}$$

для $z \in D_2$. При этом, используя теорему Римана и обычные свойства инвариантности, можно предположить, что $D_1 = \Delta = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\right\}$, $D_2 = \Delta^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta \cup \partial\Delta)$. В этом случае имеем оценку:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)}{f_1(z)}\right| \leq \iint\limits_{\Delta} \frac{|\mu_{q_1+q_2}(\zeta)|}{|\zeta - z|^{2q_2}}\left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right|\frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2} \leq \\
&\leq K\iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}}\left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right|\frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2},
\end{aligned}$$

где K – константа из оценки (1) для $q = q_1 + q_2$.

Функция $\frac{\varphi}{f_1}$ голоморфна и однозначна в Δ (она становится мультипликативной для нормированного характера при проектировании на Δ/G). В силу ограниченности ω и того, что для любой $\zeta \in \Delta$ существует $\zeta_1 \in \omega$ с условием $\left|\frac{\varphi}{f_1}(\zeta)\right| = \left|\frac{\varphi}{f_1}(\zeta_1)\right|$, заключаем, что модуль $\left|\frac{\varphi}{f_1}\right|$ достигает своего максимума η в Δ. Отсюда:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}}\left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right|\frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2} \leq \\
&\leq \eta\iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}}\frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2}.
\end{aligned}$$

Применяя к последнему выражению оценки $|\zeta - z| \geq |\zeta - \partial\Delta|$, $|\zeta - z| \geq |z - \partial\Delta|$, $\zeta \in \Delta$, $z \in \Delta^*$, и $\frac{1}{|\zeta-\partial\Delta|} \leq 4\lambda(\zeta) = \frac{4}{1-|\zeta|^2}$, $\zeta \in \Delta$, $\frac{1}{|z-\partial\Delta|} \leq \frac{1}{|z-\partial\omega_2|} \leq 4\lambda_{\omega_2}(z)$, $z \in \omega_2 \subset \Delta^*$, получаем

$$\left|\frac{(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)}{f_1(z)}\right| \leq$$

$$\leq \eta K \iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta - \partial\Delta|^{q_2}|z - \partial\Delta|^{q_2}} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leq$$

$$\leq 4^{2q_2}\eta K \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \iint\limits_{\Delta} \lambda(\zeta)^{2-q_1} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} =$$

$$= 4^{2q_2}\eta K \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 r(1-r^2)^{q_1-2}dr =$$

$$= 4^{2q_2}\eta K \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \frac{\pi}{q_1 - 1},\ z \in \omega_2 \subset \Delta^*.$$

Так как $\lambda_{\omega_2}(z)^{q_2}$ ограничена на любом компакте $Q \Subset \Delta^*$, $Q \cap \omega_2 \neq \emptyset$, то интеграл в (15) сходится абсолютно и равномерно по параметру z на любом компакте $Q \Subset \Delta^*$. Кроме того, подынтегральная функция в (15) при любом фиксированном $\zeta \in \Delta$ аналитична по z и вместе со своей производной по z, равной $2q_2 \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)}{(\zeta-z)^{2q_2+1}} \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}$, является непрерывной по совокупности переменных $(\zeta, z) \in \Delta \times \Delta^*$. Поэтому (15) определяет голоморфную форму $\frac{(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)}{f_1(z)}$ для $z \in \Delta^*$ и, следовательно, для $z \in D_2$.

Покажем теперь, что множитель $f_1(z)$, $z \in D_2$, не влияет на сходимость интеграла в (13), а значит, из доказанной голоморфности частного $\frac{(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)}{f_1(z)}$ следует голоморфность формы $(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)$, $z \in D_2$. Для этого сначала зафиксируем некоторую локально конечную фундаментальную область $\omega \Subset D_2$. Тогда для любой $z_0 \in \omega$ всегда найдётся окрестность $U(z_0)$, целиком содержащаяся в ω и такая, что функция $f_1(z)$ в этой окрестности отграничена от нуля и бесконечности, т. е. существуют константы m и M, $0 < m \leq M < \infty$, такие, что

$$m \leq |f_1(z)| \leq M \ \text{ для всех } \ z \in U(z_0). \qquad (16)$$

Действительно, если предположить, что для любой окрестности $U(z_0)$ точки z_0 и для любого $m > 0$ существует $z \in U(z_0)$, для которой $|f_1(z)| < m$, то существует последовательность точек $z_n \in \omega$, такая, что $z_n \to z_0$, $n \to \infty$, и $f_1(z_n) \to 0$, $n \to \infty$. Но, в силу непрерывности функции f_1, получаем, что $f_1(z_0) = 0$. А это противоречит отсутствию нулей у функции f_1. Аналогично доказывается, что f_1 отграничена от ∞ на ω. Таким образом, f_1 локально на ω отграничена от нуля и бесконечности. Пусть теперь $\widetilde{z_0} \in D_2$ – произвольная точка на D_2. По свойствам фундаментальной области существуют преобразование $T \in G$ и точка $z_0 \in \omega$, такие, что $\widetilde{z_0} = T(z_0)$. Рассмотрим окрестность точки $\widetilde{z_0}$ в виде $V(\widetilde{z_0}) = T(U(z_0))$, где $U(z_0)$ – окрестность точки z_0, в которой выполняется условие (16). Для каждой $\widetilde{z} \in V(\widetilde{z_0})$ существует $z' \in U(z_0)$, такое, что $\widetilde{z} = T(z')$. Следовательно, $f_1(\widetilde{z}) = \rho(T)f_1(z')$. Так как $0 < m \leq |f_1(z')| \leq \leq M < \infty$ и $0 < |\rho(T)| < \infty$ для каждого фиксированного T, то $f_1(\widetilde{z})$ отграничена от 0 (и от ∞). В силу произвольности $\widetilde{z_0}$ значения $f_1(z)$ отграничены от 0 (и от ∞) в некоторой окрестности любой точки z из D_2. Поэтому $f_1(z)$ (и $\frac{1}{f_1(z)}$) локально на D_2 принимает конечные значения и, следовательно, после умножения обеих частей в (15) на $f_1(z)$ получим интеграл, определяющий голоморфную мультипликативную форму $\mathcal{B}_C^{ord}\varphi$ (умножение на локально ограниченную аналитическую функцию не нарушает голоморфности).

Оценим норму формы $\mathcal{B}_C^{ord}\varphi$ в пространстве голоморфных (q_2, ρ)-форм, интегрируемых со степенью p на D_2:

$$\|\mathcal{B}_C^{ord}\varphi\|_0^p = \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \left|\frac{\mathcal{B}_C^{ord}\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\bar{z}| =$$

$$= \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq_2}}{|f_1(z)|^p} \left|\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2}} \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{2}\right|^p |dz \wedge d\bar{z}| \leq$$

$$\leq \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq_2}}{|f_1(z)|^p} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{|\mu_{q_1+q_2}(\zeta)||f_1(z)|}{|\zeta - z|^{2q_2}} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|f_1(\zeta)|} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}\right)^p |dz \wedge d\bar{z}| =$$

$$= \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{|\nu_{q_1}(\zeta)||\nu_{q_2}(\zeta)|}{|\zeta - z|^{2q_2}\lambda(\zeta)^2} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|f_1(\zeta)|} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}\right)^p |dz \wedge d\bar{z}| \leq$$

$$\leq K_2^p \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}|\nu_{q_1}(\zeta)|}{\lambda(\zeta)^2|\zeta - z|^{2q_2}} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|f_1(\zeta)|} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}\right)^p |dz \wedge d\bar{z}|.$$

В последнем неравенстве воспользовались оценкой (1) для обобщённого коэффициента Бельтрами ν_{q_2}. Затем, последовательно применяя неравенство Гёльдера для меры $d\sigma = \lambda(\zeta)^{2-q_2}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}$ и функций $U(\zeta) = \frac{\lambda(\zeta)^{-2}\nu_{q_1}(\zeta)}{(\zeta-z)^{\frac{2q_2}{p}}}\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}, V(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-z)^{\frac{2q_2}{p'}}} = \frac{1}{(\zeta-z)^{2q_2\frac{p-1}{p}}}$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, и неравенства (11), (12), получаем:

$$\|\mathcal{B}_C^{ord}\varphi\|_0^p \le K_2^p \iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-pq_2}\left[\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}\lambda(\zeta)^{-2p}|\nu_{q_1}(\zeta)|^p}{|\zeta-z|^{2q_2}}\frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\right]\times$$

$$\times\left(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}}{|\zeta-z|^{2q_2}}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\right)^{\frac{p}{p'}}|dz\wedge d\bar z| \le$$

$$\le K_2^p k_{q_2}^{p-1}\iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-pq_2}\lambda(z)^{(p-1)q_2}\left[\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-2p}|\nu_{q_1}(\zeta)|^p}{|\zeta-z|^{2q_2}}\frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\right]|dz\wedge d\bar z| =$$

$$= K_2^p k_{q_2}^{p-1}\iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-q_2}\left[\sum_{A\in G}\iint\limits_{A^{-1}(\omega_1)}\frac{\lambda(A\zeta)^{2-q_2-2p}|A'(\zeta)|^{2-q_2-2p}|\nu_{q_1}(A\zeta)|^p|A'(\zeta)|^{(1-q_1)p}|\overline{A'(\zeta)}|^p}{|A\zeta-Az|^{2q_2}|A'(\zeta)|^{-q_2}|A'(z)|^{-q_2}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{|\varphi(A\zeta)|^p|A'(\zeta)|^{pq_1}|\rho(A)|^{-p}}{|f_1(A\zeta)|^p|\rho_1(A)|^{-p}}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\right]|dz\wedge d\bar z| =$$

$$= K_2^p k_{q_2}^{p-1}\iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-q_2}\left[\sum_{A\in G}\iint\limits_{A^{-1}(\omega_1)}\frac{\lambda(A\zeta)^{2-q_2-2p}|\nu_{q_1}(A\zeta)|^p}{|A\zeta-Az|^{2q_2}|A'(z)|^{-q_2}}\frac{|\varphi(A\zeta)|^p}{|f_1(A\zeta)|^p|\rho_0(A)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\right]|dz\wedge d\bar z| =$$

$$= K_2^p k_{q_2}^{p-1}\sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega_2}\frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|A'(z)|^{-q_2}}\left[\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-2p}|\nu_{q_1}(\zeta)|^p|}{|\zeta-Az|^{2q_2}}\frac{\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\right]|dz\wedge d\bar z| =$$

$$= K_2^p k_{q_2}^{p-1}\sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega_1}\lambda(\zeta)^{2-q_2-2p}\left|\frac{\nu_{q_1}(\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right|^p\left[\iint\limits_{\omega_2}\frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|\zeta-Az|^{2q_2}|A'(z)|^{-q_2}}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}\right]|d\zeta\wedge d\bar\zeta| =$$

$$= K_2^p k_{q_2}^{p-1}\iint\limits_{\omega_1}\lambda(\zeta)^{2-q_2-2p}\left|\frac{\nu_{q_1}(\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right|^p\left[\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|\zeta-z|^{2q_2}}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}\right]|d\zeta\wedge d\bar\zeta| \le$$

$$\le K_2^p k_{q_2}^p\iint\limits_{\omega_1}\lambda(\zeta)^{2-q_2-2p+q_2}\left|\frac{\nu_{q_1}(\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right|^p|d\zeta\wedge d\bar\zeta| = (K_2k_{q_2})^p\,\|\varphi\|_1^p.$$

Таким образом, доказали, что $\|\mathcal{B}_C^{ord}\| \le K_2k_{q_2}$.

Докажем равенство (14). Так как в случае обратного характера $\frac{1}{\rho}$ мультипликативной единицей для его несущественной составляющей $\frac{1}{\rho_1}$ является $\frac{1}{f_1}$ ([2]), то, с помощью теоремы Фубини, имеем равенства:

$$\left\langle\varphi,\mathcal{B}_{-C}^{ord}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G} = \iint\limits_{\omega_1}\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)(\mathcal{B}_{-C}^{ord}\psi)(\zeta)\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\bar\zeta =$$

$$= \iint\limits_{\omega_1}\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)\left(\iint\limits_{D_2}\frac{\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)1/f_1(\zeta)}{(z-\zeta)^{2q_2}1/f_1(z)}\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z\right)\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\bar\zeta =$$

$$= \iint\limits_{\omega_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\left(\sum_{A\in G}\iint\limits_{A^{-1}(\omega_2)}\frac{\mu_{q_1+q_2}(Az)A'(z)^{1-q_1-q_2}\overline{A'(z)}}{(Az-A\zeta)^{2q_2}A'(z)^{-q_2}A'(\zeta)^{-q_2}}\psi(Az)A'(z)^{q_1}\times\right.$$

$$\left.\times\rho(A)\frac{f_1(Az)}{\rho_1(A)}\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z\right)\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\bar\zeta = \sum_{A\in G}\rho_0(A)\iint\limits_{\omega_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)A'(\zeta)^{-q_2}}\times$$

$$\times\left(\iint\limits_{\omega_2}\frac{\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z)}{(z-A\zeta)^{2q_2}}\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}\right)\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}=$$

$$=\iint\limits_{\omega_2}\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z)\left(\sum_{A\in G}\rho_0(A)\iint\limits_{\omega_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)}{f_1(\zeta)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\varphi(\zeta)A'(\zeta)^{q_2}}{(z-A\zeta)^{2q_2}}\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right)\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}=\iint\limits_{\omega_2}\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z)\left(\sum_{A\in G}\rho_0(A)\times\right.$$

$$\left.\times\iint\limits_{\omega_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(A\zeta)A'(\zeta)^{1-q_1}\overline{A'(\zeta)}}{f_1(A\zeta)\rho_1(A)^{-1}}\frac{\varphi(A\zeta)A'(\zeta)^{q_1}\rho(A)^{-1}}{(z-A\zeta)^{2q_2}}\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right)\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}=$$

$$=\iint\limits_{\omega_2}\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)\left(\iint\limits_{D_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)}{(z-\zeta)^{2q_2}}\frac{f_1(z)}{f_1(\zeta)}\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right)\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}=$$

$$=\iint\limits_{\omega_2}\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}=\left\langle\mathcal{B}_C^{ord}\varphi,\psi\right\rangle_{q_2,q_1,D_2,G}.$$

Литература

[1] Кра, И. *Автоморфные формы и клейновы группы* / И. Кра. – М.: Мир, 1975.

[2] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ. – 2003. – Ч. 2.

[3] Farkas, H. M. *Riemann Surfaces*/ H. M. Farkas, I. Kra // Graduate Texts in Mathematics. – Vol. 71. – New-York: Springer-Verlag, 1992.

[4] Сергеева, О. А. *Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм* / О. А. Сергеева // Вестник НГУ. – 2005. – Т. V. – Вып. 4. – С. 45 – 63.

[5] Сергеева, О. А. *Модифицированные операторы Берса и двойственность голоморфных мультипликативных автоморфных форм* / О. А. Сергеева // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50, № 4. – С. 902 – 914.

[6] Сергеева, О. А. *Билинейные спаривания для голоморфных (q,ρ)-форм* / О. А. Сергеева // Журнал СФУ. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 128 – 139.

[7] Bers, L. *A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings* / L. Bers // Acta Mathematica. – Vol. 116. – 1966. – P. 115 – 134.

УДК 515.17 + 517.545

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. Чуешев

PRYM DIFFERENTIALS ON COMPACT RIEMANN SURFACE

V. V. Chueshev

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности нашла приложения в геометрической теории функций комплексного переменного, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики [1-9]. В [8] начато построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеров.

В данном обзоре представлены результаты по теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях рода $g > 1$, полученные в работах В.В. Чуешева, М.И. Головиной и Т.А. Пушкаревой [15–19].

Аналогичные результаты есть для дифференциалов Прима на торах (Т.С. Крепицина) и на конечных римановых поверхностях (А.А. Казанцева). Эти три случая существенно отличаются друг от друга и по результатам, и по методам.

The theory of multiplicative functions and Prym differentials for case special characters on a compact Riemann surface has found numerous applications in geometrical theory function complex variable, analytic number theory and equations of mathematical physics [1–9]. In [8] is begun construction a general theory of multiplicative functions and Prym differentials on a compact Riemann surface for arbitrary characters.

In this survey is represented results on theory of multiplicative functions and Prym differentials on a variable compact Riemann surfaces of genus $g > 1$, which obtained in papers V.V. Chueshev, M.I. Golovina and T.A. Pushkareva.

There are analogous results for Prym differentials on torus (T.S. Krepizina) and on finite Riemann surfaces (A.A. Kazanzeva). These three cases essentially differ from each other and by results, and by methods.

Ключевые слова: дифференциал Прима, дивизоры, абелевы дифференциалы, переменная риманова поверхность, переменные характеры, мероморфные дифференциалы, гармонический дифференциал Прима, пространство Тейхмюллера.

Keywords: Prym differential, divisors, abelians differentials, variable Riemann surfaces, variable characters, meromorphic differentials, harmonic Prym differential, Teichmueller space.

Работа поддержана грантами: АВЦП, 2.1.1.3707; ФЦП, №-02.740.11.0457; РФФИ 09 - 01 - 00255; НШ - 7347.2010.1; РФФИ 11 - 01 - 90709.

1. Предварительные сведения

Пусть F – фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 – риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге

$$U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\},$$

такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0, Γ изоморфна $\pi_1(F)$. Эта группа имеет представление $\Gamma = \langle A_1, ..., A_g, B_1, ..., B_g : \prod_{j=1}^{g} C_j = I\rangle$, где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}, j = 1, ..., g$, а I – тождественное отображение [10; 11] .

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, где $\mu(z)$ – комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0. Пусть $M(F)$ – множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0, $Diff^+(F)$ – группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, а $Diff_0(F)$ – нормальная подгруппа в $Diff^+(F)$, состоящая из всех диффеоморфизмов гомотопных тождественному диффеоморфизму на F_0. Группа $Diff^+(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in Diff^+(F), \mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/Diff_0(F)$ [10; 11].

Так как отображение $U \to F_0 = U/\Gamma$ локальный диффеоморфизм, то любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до Γ-дифференциала Бельтрами μ на U, т. е.

$\mu \in L_\infty(U), \|\mu\|_\infty = esssup_{z\in U}|\mu(z)| < 1$ и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z), z \in U, T \in \Gamma$.

Если Γ-дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbf{C}}\backslash U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\overline{z}} = \mu(z)w_z$. Отображение $T \to T^\mu = w^\mu T(w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу
$\Gamma_\mu = w^\mu\Gamma(w^\mu)^{-1} = \langle A_1^\mu, ..., B_g^\mu : \prod_{j=1}^{g}[A_j^\mu, B_j^\mu] = I\rangle$.

Классические результаты Л. Альфорса, Л. Берса [10] и других авторов утверждают, что: 1) $\mathbf{T}_g(F)$ является комплексно аналитическим многообразием размерности $3g-3$ при $g \geq 2$; 2) $\mathbf{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение $\Phi : M(F) \to M(F)/Diff_0(F) = \mathbf{T}_g(F)$ будет голоморфным и при этом Φ имеет только локальные голоморфные сечения; 3) элементы из Γ_μ голоморфно зависят от $[\mu]$.

Два Γ-дифференциала Бельтрами μ и ν будут конформно эквивалентными, если и только если $w^\mu T(w^\mu)^{-1} = w^\nu T(w^\nu)^{-1}, T \in \Gamma$. Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F)$ эквивалентен выбору системы образующих $\{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F_\mu)$, и $\{A_j^\mu, B_j^\mu\}_{j=1}^g$ в Γ_μ для любого $[\mu]$ из $\mathbf{T}_g$. Отсюда получим отождествления $M(F)/Diff_0(F) = \mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(\Gamma)$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $[F_\mu; \{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g]$ и отмеченными квазифуксовыми группами Γ_μ [11].

Универсальное многообразие Якоби рода g есть расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, слой которого над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ есть якобиан $J(F_\mu)$ для поверхности F_μ [12].

В работе Л. Берса [10, с. 99] построены голоморфные формы $\zeta_1[\mu] = \zeta_1([\mu], \xi)d\xi, ...,$
$\zeta_g[\mu] = \zeta_g([\mu], \xi)d\xi$, удовлетворяющие условиям:

$$\zeta_j([\mu], \xi) = \zeta_j(T([\mu], \xi))\tfrac{\partial T}{\partial \xi}([\mu], \xi),$$
$$\int_{\xi}^{A_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w)dw = \delta_{jk},$$

для всех $T \in \Gamma, [\mu] \in \mathbf{T}_g$, $\xi \in w^\mu(U)$, $j, k = 1, ..., g$, где интеграл берется по любому пути в $w^\mu(U)$ от ξ до $A_k^\mu(\xi)$. Для любого фиксированного $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ эти формы являются поднятиями на $w^\mu(U)$ голоморфных на F_μ абелевых дифференциалов $\zeta_1[\mu], ..., \zeta_g[\mu]$, которые образуют канонический базис на F_μ, двойственный к каноническому гомотопическому базису $\{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g$ на F_μ. Указанный базис голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной компактной римановой поверхности F_μ. Кроме того, матрица $b-$периодов $\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^g$ на F_μ состоит из комплексных чисел $\pi_{jk}[\mu] = \int_{\xi}^{B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w)dw$, $\xi \in w^\mu(U)$ и голоморфно зависит от $[\mu]$.

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi : w^\mu(U) \to \mathbf{C}^g$ по правилу:
$\varphi_j(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w)dw, j = 1, ..., g$. Тогда φ индуцирует послойное голоморфное вложение из F_μ в $J(F_\mu)$.

Далее, для любого натурального числа $n > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на компактной римановой поверхности F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n, который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_n из этого расслоения на универсальное расслоение Якоби ($n \geq 1$) ограничение которого на слои является продолжением классического отображения Якоби $\varphi : F_\mu \to J(F_\mu)$. Известно, что для $n = g$ отображение $\varphi : F_g[\mu]\backslash F_g^1[\mu] \to W_g[\mu]\backslash W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu]$ – $g-$кратное симметрическое произведение поверхности F_μ и $W_g^1[\mu] = \varphi(F_g^1[\mu])$ имеет комплексную размерность, не превышающую $g-2$ [6; 13]. Локальные голоморфные сечения этих расслоений над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ можно получить (для любого $n \geq 1$) из локальных голоморфных сечений К. Эрла s для $\Phi : M(F) \to \mathbf{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [12].

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to (\mathbf{C}^*, \cdot)$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), ..., \rho(a_g^\mu),$
$\rho(b_g^\mu)) \in (\mathbf{C}^*)^{2g}$.

Определение 1.1. *Мультипликативной функцией* f на F_μ для характера ρ назовем мероморфную на $w^\mu(U)$ функцию f, такую, что $f(Tz) = \rho(T)f(z), z \in w^\mu(U), T \in \Gamma_\mu$.

Определение 1.2. *$m-$дифференциалом Прима* относительно фуксовой группы Γ для ρ, или (ρ, m)-дифференциалом, называется дифференциал $\phi = \phi(z)dz^m$, такой, что
$\phi(Tz)(T'z)^m = \rho(T)\phi(z), z \in U, T \in \Gamma$, $\rho : \Gamma \to \mathbf{C}^*$. В частности, при $m = 0$ это мультипликативная функция относительно Γ для ρ.

Если f_0 – мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то $\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\zeta_j([\mu])$ и

$$f_0([\mu], P) = \exp \int_{P_0[\mu]}^{P} 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu],\rho) \in \mathbf{C}$, $j = 1,...,g$, c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ. При этом интегрирование от фиксированной $P_0[\mu]$ до текущей P на переменной поверхности F_μ, и $s[\mu]$ – сечение К. Эрла [12] над $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$. Получим, что характер ρ для f_0 имеет вид:

$\rho(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k([\mu],\rho)$,

$\rho(b_k^\mu) = \exp(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\pi_{jk}([\mu]))$,

$k = 1,...,g$.

Будем называть такие характеры ρ *несущественными*, а f_0 (с таким характером) – *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)$. Обозначим через $[S^1]^{2g}$ подгруппу нормированных характеров на F, т. е. эти характеры принимают свои значения только на единичной окружности S^1.

Лемма 1.1. [8, с. 106]. *Голоморфное главное $Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)$-расслоение E биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению $\mathbf{T}_g(F) \times Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ над $\mathbf{T}_g(F)$.*

Определение 1.3. Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на $F = U/\Gamma$ для ρ называется *мультипликативно точным*, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z), T \in \Gamma, z \in U$, т. е. f – мультипликативная функция на F класса C^2 для ρ.

Обозначим через $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ для $\rho \in Hom(\Gamma_\mu,\mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma_\mu \to \mathbf{C}$, таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S,T \in \Gamma_\mu$ [4].

Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ будет единственно определяться упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1),...,\phi(A_g),\phi(B_1),...,\phi(B_g)$, удовлетворяющих уравнению $\sum\limits_{j=1}^{g}[\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)] = 0$, которое получается из соотношения $\prod\limits_{j=1}^{g} C_j = I$ в Γ_μ, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T), T \in \Gamma_\mu$. Тогда $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ – комплексное векторное $(2g-1)$-мерное пространство для $\rho \neq 1$ и $2g$-мерное пространство для $\rho = 1$. Пусть $B^1(\Gamma_\mu,\rho)$ – одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$, порожденное элементом σ. Тогда $H^1(\Gamma_\mu,\rho) = Z^1(\Gamma_\mu,\rho)/B^1(\Gamma_\mu,\rho)$ – комплексное векторное $(2g-2)$-мерное пространство для $\rho \neq 1$. Будем называть множество $G = \bigcup\limits_{\rho\neq 1,[\mu]} H^1(\Gamma_\mu,\rho)$ когомологическим расслоением Ганнинга над $\mathbf{T}_g \times (Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash\{1\})$ [4].

Пусть ϕ – замкнутый дифференциал Прима на $F = F_0$ для ρ. Проинтегрировав этот дифференциал от фиксированной точки z_0 до $z \in U$, получим, что $f(Tz) - f(Tz_0) = \rho(T)(f(z) - f(z_0))$, где $\phi = df(z), z \in U$, $f(z)$ – интеграл Прима на круге U для дифференциала Прима ϕ, определенный с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T \in \Gamma$ верно равенство $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi_{f,z_0}(T)$, где $\phi_{f,z_0}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$. Таким образом, каждому $T \in \Gamma$ соответствует число $\phi_{f,z_0}(T)$, а значит, определено отображение $\phi_{f,z_0} : \Gamma \to \mathbf{C}$. Это отображение называется отображением периодов для ϕ. Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на U и базисной точки z_0. Если $f_1(z) = f(z) + c$ – другой интеграл Прима для того же дифференциала Прима ϕ, то $\phi_{f_1,z_0}(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0) = \phi_{f,z_0}(T) + c\sigma(T)$, $T \in \Gamma$. Легко проверить, что оба отображения ϕ_{f,z_0} и ϕ_{f_1,z_0} удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S,T \in \Gamma$. Это означает, что они принадлежат пространству $Z^1(\Gamma,\rho)$ и представляют один и тот же класс периодов $[\phi]$ из $H^1(\Gamma,\rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F.

Для замкнутого дифференциала Прима ϕ можно определить так называемые классические периоды. Для $T \in \Gamma$ соответствующий ему классический период $\phi_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0}\phi$ и верно равенство $\phi_{z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T)$.

Следовательно, отображения вида $T \to \phi_{f,z_0}(T)$ (периоды по Р. Ганнингу) и вида $T \to \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды [8]) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma,\rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F для ρ. Поэтому корректно определено $\mathbf{C}$-линейное отображение $p : \phi \to [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима ϕ на F для ρ в векторное пространство $H^1(\Gamma,\rho)$.

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ пространство дифференциалов Прима второго рода на F_μ для характера ρ [8; 13].

Лемма 1.2. *Если $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu,\rho)$, то ω – мультипликативно точный дифференциал на F_μ для ρ.*

Доказательство. Достаточно доказать это для фиксированных поверхности и характера. Будем рассматривать классические периоды $\omega_{z_0}(\gamma_1),...,\omega_{z_0}(\gamma_m)$, которые получаются при обходе по петлям $\gamma_1,...,\gamma_m$ вокруг отдельных полюсов $P_1,...,P_m$ для дифференциала ω соответственно. Число этих полюсов конечно ввиду компактности F_μ. Периоды $\omega_{z_0}(\gamma_1),...,\omega_{z_0}(\gamma_m)$ все обращаются в нуль, так как эти периоды равны вычетам для ветвей нашего многозначного дифференциала, а эти полюса второго или большего порядка.

Если класс периодов $[\omega] = 0$, то отсюда классический период $\omega_{z_0}(T) = c\sigma(T), c \neq 0$ для любого T, где $\omega_{z_0}(T) = f(Tz_0) - f(z_0) = c(1-\rho(T))$, а f – некоторый интеграл Прима для дифференциала ω. Тогда $\widetilde{f} = (f - c)$ будет мультипликативной функцией для ρ и $\omega = d\widetilde{f} = d(f-c)$. Поэтому периоды $\widetilde{\omega}_{z_0}(a_1),...,\widetilde{\omega}_{z_0}(b_g)$ все равны нулю для некоторого представителя из класса $[\omega]$. Следовательно,

ω является мультипликативно точным дифференциалом для ρ на F_μ. Лемма доказана.

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1}...P_k^{n_k}, P_j \in F_\mu, n_j \in \mathbf{Z}, j = 1, ..., k$. Имеет место следующая

Теорема (Римана-Роха для характеров) [6; 8]. *Пусть F – компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство*

$$r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D).$$

Теорема (Абеля для характеров) [6; 8]. *Пусть D – дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $[F_\mu, \{a_1(\mu), ..., a_g(\mu), b_1(\mu), ..., b_g(\mu)\}]$ рода $g \geq 1$ и ρ – характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера $\rho \Leftrightarrow \deg D = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} \log\rho(b_j(\mu))e^{(j)}[\mu] - \\ - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} \log\rho(a_j(\mu))\pi^{(j)}[\mu] (= \psi(\rho, [\mu]))$$

в $\mathbf{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu],..., e^{(g)}[\mu]$, $\pi^{(1)}[\mu],..., \pi^{(g)}[\mu]$ матрицы $a(\mu)-$периодов и $b(\mu)$ – периодов на F_μ, где $\varphi[\mu]$ – отображение Якоби из F_μ в многообразие Якоби $J(F_\mu)$.

Отметим, что, по теореме Л. Берса [10, с. 99], отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$.

Теорема 1.1. *Для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ существуют $g-1$ различных точек $P_1, ..., P_{g-1}$, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ, таких, что не существует мультипликативных функций для ρ на F_μ, чьи особенности в этих точках – полюса порядка не выше 1, т.е. $r_\rho(\frac{1}{P_1...P_{g-1}}) = 0$ или $i_{\rho^{-1}}(P_1...P_{g-1}) = 0$.*

Теорема 1.2. *Для любого несущественного характера $\rho \neq 1$ на компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ существует g различных точек $P_1, ..., P_g$, голоморфно зависящих от ρ и от $[\mu]$, таких, что не существует мультипликативных функций для ρ на F_μ, чьи особенности в этих точках – полюса порядка не выше 1, т.е. $r_\rho(\frac{1}{P_1...P_g}) = 1$ или $i_{\rho^{-1}}(P_1...P_g) = 0$.*

Определение 1.4. Точка P на компактной римановой поверхности F рода $g > 1$ называется мультипликативной точкой Вейерштрасса для существенного (несущественного) характера ρ, если в ней можно задавать единственный полюс, мероморфной мультипликативной функции для ρ, порядка, не превышающего $g-1$ (порядка, не превышающего g).

Определение 1.5. Точка $P \in F$ называется мультипликативной $q-$точкой Вейерштрасса ($q \geq 1$) для существенного характера ρ на F, если строго положителен ее вес $\tau_{\rho,q}(P)$, относительно пространства $\Omega^q_{\rho^{-1}}(1)$ голоморфных $q-$дифференциалов Прима для ρ^{-1} на F.

Последнее условие при $g \geq 2$ эквивалентно тому, что существует нетривиальный голоморфный $q-$дифференциал Прима ϕ для ρ^{-1} на F, такой, что $ord_P\phi \geq dim\Omega^q_{\rho^{-1}}(1) = d$, причем $d = g-1$ при $q = 1$ и $d = (2q-1)(g-1)$ при $q > 1$.

Э. Арбарелло [14] доказал, что (классические) точки Вейерштрасса на переменной компактной римановой поверхности F_μ локально голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ для поверхности. Установим аналог этого результата для мультипликативных точек Вейерштрасса

Теорема 1.3. *Для любого $q \geq 1$, $q \in \mathbf{N}$, мультипликативные $q-$точки Вейерштрасса для переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g > 1$ локально голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ и от характеров ρ, а пробелы в мультипликативных 1-точках Вейерштрасса и вес мультипликативных q-точек Вейерштрасса являются локально постоянными функциями от $[\mu]$ и от ρ со значениями в $\mathbf{N}$.*

Доказательство . По заданному базису [8, с. 105] голоморфных (ρ, q)-дифференциалов Прима на F_μ составим вронскиан W_q, который также локально голоморфно зависит от $[\mu]$ и от ρ. Его нули есть мультипликативные $q-$точки Вейерштрасса на F_μ.

Для несущественного характера ρ числа $n_1 - 1, n_2 - 1, ..., n_g - 1$ являются порядками нулей, а для существенного характера ρ числа $n_1 - 1, n_2 - 1, ..., n_{g-1} - 1$ являются порядками нулей, адаптированного базиса 1-дифференциалов, где числа n_j – мультипликативные пробелы в 1-точках Вейерштрасса на F_μ.

По теореме о неявной функции, нули вронскиана, а значит и мультипликативные $q-$точки Вейерштрасса на F_μ, порядки нулей вронскиана (веса мультипликативных q-точек Вейерштрасса) локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и от ρ. В силу целочисленности пробелов и целочисленности весов в 1-точках Вейерштрасса, числа пробелы n_j, а также все веса q-точек Вейерштрасса будут локально постоянными функциями от $[\mu]$ и от ρ. Теорема 1.3 доказана.

2. Элементарные дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют так называемые элементарные дифференциалы [6; 13] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса, и голоморфно зависящие от характеров ρ и от модулей $[\mu]$ отмеченных компактных римановых поверхностей.

В этом параграфе будет найден общий вид элементарных (ρ, q)-дифференциалов Прима на F_μ.

Сначала найдем общий вид (ρ, q)-дифференциалов второго рода $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ с единственным полюсом $Q = Q[\mu]$ точно порядка $m \geq 2$ на F_μ, где $q \geq 1$.

При $m \geq 2$, по теореме Римана-Роха, для (ρ, q)-дифференциалов на F_μ найдем размерность

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^m}) = dim_{\mathbf{C}}\Omega^q_\rho(\frac{1}{Q^m}) =$$

$$= (g-1)(2q-1) - \deg D + r(\frac{(f[\mu])Z^{q-1}_\mu}{D}),$$

где $D = \frac{1}{Q^m}$, Z^{q-1}_μ – канонический класс дивизоров абелевых $(q-1)$-дифференциалов на F_μ, $f[\mu]$ – любая мультипликативная функция для ρ на F_μ голоморфно зависящая от $[\mu]$ и ρ [8, с.43]. Отсюда

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^m}) = (g-1)(2q-1) + m \geq 3.$$

Здесь $r(\frac{(f[\mu])Z^{q-1}_\mu}{D}) = 0$, так как $\deg \frac{(f[\mu])Z^{q-1}_\mu}{D} > 0$ при наших условиях. Действительно, $\deg(f[\mu]) = 0$, $\deg Z^{q-1}_\mu = (q-1)(2g-2) \geq 0$ и $\deg(\frac{1}{D}) = m > 0$. Это же можно доказать другим способом. От противного, предположим, что существует функция g на F_μ с условием $(g) \geq Q^m(f[\mu])Z^{q-1}_\mu$, тогда

$$0 = \deg(g) \geq \deg Q^m(f[\mu])Z^{q-1}_\mu \geq 3.$$

Противоречие.

Так как

$$\deg(f[\mu])Z^{q-1}_\mu Q^m = 0 + (q-1)(2g-2) + m - 1 \geq 1 > 0,$$

то

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^m}) = (g-1)(2q-1) -$$

$$- \deg(\frac{1}{Q^m}) + r((f[\mu])Z^{q-1}_\mu Q^m) =$$

$$= (g-1)(2q-1) + m$$

и

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^{m-1}}) = (g-1)(2q-1) + m - 1.$$

Следовательно, $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^m}) = i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^{m-1}}) + 1$. Значит, существует (ρ, q)-дифференциал $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ с полюсом точно порядка m в точке Q на F_μ, т. е. $(\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}) = \frac{R_1...R_N}{Q^m}$ на $F_\mu, R_j \neq Q, j = 1, ..., N$, где $N = (2g-2)q + m$.

Из [8, с. 67] получаем уравнение $\varphi_{P_0}[\mu](R_1...R_N) - \varphi_{P_0}[\mu](Q^m) = -2K[\mu]q + \psi(\rho)$ в многообразии Якоби $J(F_\mu)$, где $K[\mu]$ – вектор констант Римана, голоморфно зависящий от модулей римановых поверхностей и от выбора базисной точки, а также зависящий от выбора канонического базиса $a_j(\mu), b_j(\mu)$ петель на F_μ. Уравнение $\varphi_{P_0}[\mu](R_1...R_N) - \varphi_{P_0}[\mu](Q^m) = -2K[\mu]q + \psi(\rho)$ понимаем как равенство в переменном якобиане $J(F_\mu)$, т. е. в слое из универсального расслоения Якоби, лежащем над отмеченной поверхностью $F_\mu \equiv [\mu]$. Отсюда,

$$\varphi(R_1...R_N) == -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) + \psi(\rho) = a,$$

или

$$\varphi(R_1...R_g) = a - \varphi(R_{g+1}...R_N). \qquad (1)$$

Таким образом, для определения нулей дифференциала $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ имеем

$$N - g = m + (2g-2)q - g \geq g(\geq 2)$$

свободных параметров, которые можно выбирать произвольно на F_μ, и локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ. По теореме К. Эрла [12], можно выбрать дивизор $R_{g+1}...R_N$ на F_μ как локально голоморфное сечение для расслоения дивизоров степени $N - g$ над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$.

Решая проблему обращения Якоби в универсальном расслоении Якоби над $\mathbf{T}_g$, найдем дивизор $R_1...R_g$ на F_μ, который будет единственным решением уравнения (1), если его правая часть равенства не принадлежит $W^1_g[\mu] \subset J(F_\mu)$ [6]. Размерность этого подмножества не превышает $g-2$, но $N - g > g - 2$ при наших условиях, и при этом $R_1, ..., R_g$ голоморфно зависят от наших параметров, так как правая сторона (1) была выбрана голоморфно зависящей от $[\mu]$ и ρ. Следовательно, доказана

Теорема 2.1. *Для любого характера ρ на F_μ рода $g, g \geq 2$ и любых натуральных чисел $m > 1$, $q > 0$ существует элементарный (ρ, q)-дифференциал $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ второго рода с полюсом в любой точке $Q = Q[\mu] \in F_\mu$ точно порядка m, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $(\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}) = \frac{R_1...R_N}{Q^m}$, где*

$$\varphi(R_1...R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1}...R_N) + \psi(\rho).$$

При этом точки $R_{g+1}, ..., R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение дивизоров степени $N - g$ над $\mathbf{T}_g$, $N = (2g-2)q + m$ и $Q = Q[\mu]$ – локально голоморфное сечение дивизоров степени 1 на F_μ для любого $[\mu]$ из односвязной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbf{T}_g$ и для любого $\rho \in U(\rho_0) \subset Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$.

Рассуждая аналогично, как в доказательстве теоремы 2.1, получим :

Теорема 2.2. *Для любого характера ρ на F_μ рода $g, g \geq 2$ и любого натурального числа $q \geq 1$ существует элементарный (ρ, q)-дифференциал*

$\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}$ третьего рода точно с простыми полюсами $Q_1 = Q_1[\mu], Q_2 = Q_2[\mu] \in F_\mu$, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $(\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}) = \frac{R_1...R_N}{Q_1Q_2}$, где

$$\varphi(R_1...R_g) =$$

$$= -2K[\mu]q + \varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1}...R_N) + \psi(\rho).$$

При этом точки $R_{g+1}, ..., R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение дивизоров степени $N-g$ над $\mathbf{T}_g$, $N = (2g-2)q+2$, и $Q_1 = Q_1[\mu]$, $Q_2 = Q_2[\mu]$ – локально голоморфные сечения дивизоров степени 1 на F_μ для любого $[\mu]$ из односвязной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbf{T}_g$ и для любого $\rho \in U(\rho_0) \subset Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$.

Теорема 2.3. *1) Для любого существенного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$, натурального числа $q \geq 1$ и несущественного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$, натурального числа $q > 1$ существует элементарный (ρ, q)-дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом $Q_1 = Q_1[\mu]$ на F_μ, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$;*

2) Для любого несущественного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$ при $q = 1$ не существует элементарный $(\rho, 1)$-дифференциал $\tau_{\rho;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом Q_1 на F_μ.

Доказательство. 1) Если ρ — существенный характер и $q = 1$, то, по теореме Римана-Роха, для характеров имеем равенство :

$$i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = -1 + g + 1 + r_{\rho^{-1}}(Q_1),$$

$i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = g$ и $i_\rho(1) = g - 1$. Отсюда следует, что $i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = i_\rho(1) + 1$. Поэтому существует дифференциал Прима $\tau_{\rho;Q_1}$ для ρ на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один.

Если ρ — произвольный характер и $q > 1$, то, по теореме Римана-Роха, для (ρ, q)-дифференциалов [8, с. 43] имеем :

$$i_{\rho,q}(D) = (2q-1)(g-1) - \deg D + r((f)\frac{Z^{q-1}}{D})$$

и $i_{\rho,q}(1) = (2q-1)(g-1)$, где f — мультипликативная функция для ρ и Z — канонический класс для абелевых дифференциалов на F_μ. Поэтому

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1}) = i_{\rho,q}(1) + 1 + r((f)Z^{q-1}Q_1).$$

Таким образом, имеем равенство

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1}) = i_{\rho,q}(1) + 1,$$

так как $\deg((f)Z^{q-1}Q_1) = 0 + (q-1)(2g-2) + 1 > 0$. Следовательно, существует (ρ, q)-дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ для ρ на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один.

Построим конструктивно такие дифференциалы, локально голоморфно зависящие от ρ и $[\mu]$:

a) такой (ρ, q)-дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ можно задать в виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f\omega_0^q$, где f — мультипликативная функция для существенного характера ρ на F_μ, $q \geq 1$ и ω_0 — любой голоморфный абелев дифференциал на F_μ. Дивизор

$$(\tau_{\rho,q;Q_1}) = \frac{R_1...R_N}{(\omega_0)^q Q_1}(\omega_0)^q,$$

где $N = q(2g-2)+1$ и точка Q_1 не принадлежит дивизору (ω_0). Отсюда получаем равенство

$$\varphi(R_1...R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1) -$$
$$-\varphi(R_{g+1}...R_N) + -\psi(\rho) = a \qquad (*)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$ для F_μ;

b) в случае $\rho = 1$ или ρ — несущественный характер при $q > 1$ такой дифференциал ищем в следующем виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f_0 f_1 \omega_0^q$, где f_1 — однозначная мероморфная функция с дивизором $(f_1) = \frac{R_1...R_N}{(\omega_0)^q Q_1}$ и f_0 — мультипликативная единица для ρ на F_μ. Здесь $\psi(\rho) = 0$ и, по теореме Абеля, имеем равенство :

$$\varphi(R_1...R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1) - \varphi(R_{g+1}...R_N) = a. \qquad (**)$$

При наших условиях в обоих случаях a) и b) верно неравенство $N - g \geq g - 1$ и $\dim W_g^1 \leq g - 2$. Шевелением дивизоров $R_{g+1}...R_N$ можно добиться, что a не принадлежит W_g^1 и уравнения $(*)$ и $(**)$, в многообразии Якоби, имеют единственные решения $R_1...R_g$.

Выбирая локально голоморфное сечение по $[\mu]$ и ρ дивизоров $R_{g+1}...R_N$ над $\mathbf{T}_g$, получим дивизор $R_1...R_g$ (как единственное решение предыдущих уравнений в $J(F_\mu)$), тоже голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$. Причем малым шевелением дивизоров $R_{g+1}...R_N$ можно добиться, чтобы точка Q_1 не совпадала с точками $R_1, ..., R_N$.

2) Если существует дифференциал $\tau_{\rho;Q_1}$ для несущественного характера ρ с вычетом $res_{Q_1}\tau_{\rho;Q_1} = c_{Q_1} \neq 0$ для некоторой его ветви, то $f_0^{-1}\tau_{\rho;Q_1}$ — абелев дифференциал с единственным простым полюсом в Q_1 и f_0 — мультипликативная функция для ρ на F_μ. По теореме о вычетах $f_0^{-1}(\widetilde{Q}_1)c_{Q_1} = 0$, где $\widetilde{Q}_1 \neq Q_1$. Противоречие.

Это утверждение также следует из теоремы Римана-Роха так как $i_\rho(Q_1^{-1}) = g = i_\rho(1)$ для несущественного характера ρ. Действительно,
$0 = r_{\rho^{-1}}(Q_1) = \deg(\frac{1}{Q_1}) - g + 1 + i_\rho(\frac{1}{Q_1}) =$
$= -1 - g + 1 + i_\rho(\frac{1}{Q_1})$. Теорема 2.3 доказана.

Ясно, что (ρ, m)-дифференциал ω имеет единственный дивизор $D = (\omega)$ из своих нулей и полюсов, с учетом кратности, на F рода $g \geq 2$, и $\deg D = (2g-2)m$, $m \geq 1$.

Выясним будет ли по заданному дивизору D на F рода $g \geq 2$, $\deg D = (2g-2)m$ определяться (ρ, m)-дифференциал ω с точностью до умножения на ненулевую константу на F.

Известно из [8, с. 23], что любой дивизор D на F рода $g \geq 2$ степени $(2g-2)m$, $g \geq 1$, $m \geq 1$ есть дивизор единственного (с точностью до умножения на ненулевую константу) (ρ, m)-дифференциала, принадлежащего к единственному нормированному характеру ρ.

Теорема 2.4. *Пусть D — дивизор, $\deg D = (2g-2)m$, $m \geq 0$ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, тогда:*

1) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для одного и того же характера ρ, то $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = const \neq 0$ на F;

2) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1 \neq \rho_2$, то $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F, где $\rho_1 = \rho_2\rho_0$;

3) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1 = \rho_2$ и $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = const \neq 0$ на F.

3. Однозначные мероморфные дифференциалы на переменной компактной римановой поверхности

Обозначим через $\Omega_2(F_\mu)$ пространство однозначных (абелевых) дифференциалов второго рода с конечным числом полюсов на F_μ, а через $\Omega_{2,e}(F_\mu)$ — подпространство всех точных дифференциалов второго рода на переменной поверхности F_μ.

Рассмотрим $\widetilde{E}_1 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$, векторное расслоение у которого над точкой $[\mu]$ из базы $\mathbf{T}_g$ лежит слой $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$.

Теорема 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g$ над базой $\mathbf{T}_g$ при $g \geq 2$. При этом наборы классов смежности дифференциалов*

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{\widetilde{P}_1}^{(n_1+1)}, ..., \tau_{\widetilde{P}_1}^{(n_g+1)} \qquad (*)$$

и

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{\widetilde{P}_1}^{(2)}, ..., \tau_{\widetilde{P}_g}^{(2)} \qquad (**)$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $n_1, ..., n_g$ — пробелы Вейерштрасса в $\widetilde{P}_1$ на F_μ и $r(\frac{1}{\widetilde{P}_1 ... \widetilde{P}_g}) = 1$ на F_μ.

Доказательство. Зададим отображение Φ_1 из пространства $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$ на $\mathbf{C}^{2g}$ по правилу: сопоставляем ω его базисные периоды, т. е.

$$\Phi_1 : \omega \to (\int\limits_{a_1} \omega, ..., \int\limits_{a_g} \omega, \int\limits_{b_1} \omega, ..., \int\limits_{b_g} \omega) \in \mathbf{C}^{2g}.$$

Ядро отображения Φ_1 совпадает с $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Действительно, если все указанные периоды для дифференциала ω равны нулю, то и все остальные периоды тоже равны нулю. Поэтому дифференциал ω будет точным на F_μ, а значит, принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Ясно также, что если дифференциал принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$, то все его периоды равны нулю. Так как отображение Φ_1 взаимнооднозначно и линейно на фактор пространстве, то $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \leq 2g$.

Докажем обратное неравенство

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \geq 2g$$

и построим базис этого фактор-пространства.

Возьмем мероморфные дифференциалы из набора $(*)$ на поверхности F_μ. Покажем, что классы смежности с такими дифференциалами будут линейно независимы над $\mathbf{C}$ на F_μ. От противного. Предположим, что существует линейная комбинация, у которой не все коэффициенты нули, равная нулевому классу, тогда верно равенство $C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g + \widetilde{C}_1\tau_{\widetilde{P}_1}^{(n_1+1)} + ... + \widetilde{C}_g\tau_{\widetilde{P}_1}^{(n_g+1)} = df$, где df — точный дифференциал второго рода, а f – однозначная мероморфная функция на F_μ.

Выберем среди коэффициентов $\widetilde{C}_j \neq 0$ коэффициент с максимальным номером, например, $j = j_0$. Тогда f будет иметь в качестве особенностей только один полюс $\widetilde{P}_1$ порядка n_{j_0}. Это противоречит выбору пробелов в точке $\widetilde{P}_1$ на F_μ. Поэтому $\widetilde{C}_1 = ... = \widetilde{C}_g = 0$.

Осталось равенство $C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g = df$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $C_1, ..., C_g$. Так как $\zeta_1, ..., \zeta_g$ — канонический базис, то a_j−период левой части будет равен C_j, а для правой части все периоды равны нулю. Отсюда $C_1 = ... = C_g = 0$. Таким образом, доказали линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора $(*)$.

Рассмотрим набор $(**)$. Если существует линейная комбинация

$$C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g + \widetilde{C}_1\tau_{\widetilde{P}_1}^{(2)} + ... + \widetilde{C}_g\tau_{\widetilde{P}_g}^{(2)} = df,$$

то все коэффициенты $\widetilde{C}_j = 0$, $j = 1, ..., g$, так как в противном случае функция f будет иметь дивизор $(f) \geq \frac{1}{\widetilde{P}_1 ... \widetilde{P}_g}$, что противоречит выбору точек $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ на F_μ. Аналогично, как для набора $(*)$, показывается, что $C_k = 0$, $k = 1, ..., g$.

Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) = 2g$.

Известно, что дифференциалы $\tau_{\widetilde{P}_1}^{(n_j+1)}$ можно выбрать голоморфно зависящими от $[\mu]$ [10; 11]. Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. *Расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным (глобально) тривиальным над пространством Тейхмюллера и существуют глобальные сечения для $\widetilde{E}_1$ над $\mathbf{T}_g$, т.е. существуют $2g$ абелевых дифференциалов первого и второго рода, которые являются глобальными функциями от $[\mu]$ на $\mathbf{T}_g$.*

Доказательство. Это следует из теоремы Грауэрта, в силу односвязности базы $\mathbf{T}_g$, о том, что над такой базой расслоение становится глобально тривиальным или комплексно аналитически эквивалентным $\mathbf{T}_g \times \mathbf{C}^{2g}$. Следствие 3.1 доказано.

Обозначим через $\Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}, F_\mu)$ пространство абелевых дифференциалов с дивизорами кратными $\frac{1}{Q_1...Q_s}$, где $Q_1...Q_s$ — локально голоморфное сечение в пространстве дивизоров степени s над $\mathbf{T}_g$, где $s \geq 2$.

Пусть $\widetilde{E}_2 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{Q_1\cdots Q_s}, F_\mu)$ — векторное расслоение над $\mathbf{T}_g$. По теореме Римана-Роха, $r(Q_1...Q_s) = -s - g + 1 + i(\frac{1}{Q_1...Q_s})$. Отсюда $i(\frac{1}{Q_1...Q_s}) = s + g - 1$, так как $r(Q_1...Q_s) = 0$.

Рассмотрим набор дифференциалов

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{Q_2Q_1}, ..., \tau_{Q_sQ_1}, \qquad (1)$$

которые, по теореме Берса и по классическим результатам, локально голоморфно зависят от $[\mu]$.

Этот набор линейно независим над $\mathbf{C}$. Если $C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g + \widetilde{C}_1\tau_{Q_2Q_1} + ... + \widetilde{C}_{s-1}\tau_{Q_sQ_1} = 0$ на F_μ, то $\widetilde{C}_1 = ... = \widetilde{C}_{s-1} = 0$, так как нет особенностей в правой части. Коэффициенты $C_1 = ... = C_g = 0$ в силу независимости $\zeta_1, ..., \zeta_g$ над $\mathbf{C}$ на F_μ. Таким образом, доказано предложение.

Предложение 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ ранга $g + s - 1$ при $s \geq 2$ является голоморфным векторным расслоением над $\mathbf{T}_g$, а набор дифференциалов (1) дает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Следствие 3.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbf{T}_g \times \mathbf{C}^{g+s-1}$ и существуют $g+s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbf{T}_g$.*

Обозначим через $\widetilde{E}_3 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu)$ векторное расслоение над $\mathbf{T}_g$, $s \geq 2$, где $\Omega(1, F_\mu)$ — пространство голоморфных абелевых дифференциалов на F_μ.

По теореме Римана-Роха, $i(\frac{1}{Q_1...Q_s}) = g + s - 1$ и $i(1) = g$ поэтому

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu) = s - 1.$$

Докажем, что набор классов смежности дифференциалов

$$\tau_{Q_2Q_1}, ..., \tau_{Q_sQ_1} \qquad (2)$$

будет линейно независим над $\mathbf{C}$ на F_μ. Если $C_1\tau_{Q_2Q_1} + ... + C_{s-1}\tau_{Q_sQ_1} = \omega$, где ω — голоморфный дифференциал, то все коэффициенты $C_1 = ... = C_{s-1} = 0$, так как особые точки правой и левой сторон различны. Таким образом, доказали предложение.

Предложение 3.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_3$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $s - 1$ над $\mathbf{T}_g$, и классы смежности дифференциалов набора (2) образуют базис локально голоморфных сечений этого расслоения. Кроме того, $\widetilde{E}_3$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbf{T}_g \times \mathbf{C}^{s-1}$ и существуют $s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbf{T}_g$.*

4. Пространства дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов второго рода для характера ρ на F_μ, а через $\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ – подпространство всех мультипликативно точных дифференциалов для ρ. Пусть ω_j – абелев дифференциал второго рода на F_μ с единственным полюсом в точке P_j точно второго порядка с нулевыми a-периодами, $j = 1, ..., g$. Пусть $\widetilde{\zeta}_1, ..., \widetilde{\zeta}_{g-1}$ – любой базис пространства голоморфных дифференциалов Прима для существенного характера ρ на F_μ, которые голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ и характера ρ [8, с. 105].

Введем наборы дифференциалов, представляющих классы смежности в фактор пространстве $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$:

(i) для несущественных характеров

$$f_0\zeta_1, ..., f_0\zeta_g, f_0\omega_1, ..., f_0\omega_g, \qquad (1)$$

$$f_0\zeta_1, ..., f_0\zeta_g, f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}, ..., f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)}, \qquad (2)$$

где $\tau_{P_1}^{(m)}$ – абелев дифференциал, $n_1, ..., n_g$ – мультипликативные пробелы Вейерштрасса в точке P_1 на F_μ и $r_\rho(\frac{1}{P_1...P_g}) = 1$;

(ii) для существенных характеров

$$\widetilde{\zeta}_1, ..., \widetilde{\zeta}_{g-1}, \widetilde{\tau}_{P_1}^{(2)}, ..., \widetilde{\tau}_{P_{g-1}}^{(2)}, \qquad (3)$$

$$\widetilde{\zeta}_1, ..., \widetilde{\zeta}_{g-1}, \widetilde{\tau}_{\widetilde{P}_1}^{(\widetilde{n}_1+1)}, ..., \widetilde{\tau}_{\widetilde{P}_1}^{(\widetilde{n}_{g-1}+1)}, \qquad (4)$$

где $\widetilde{\tau}_P^{(m)}$ – дифференциал Прима, $\widetilde{n}_j$ – мультипликативные пробелы Вейерштрасса на F_μ в точке $\widetilde{P}_1$, и $r_\rho(\frac{1}{P_1...P_{g-1}}) = 0$.

Обозначим через $E_1 = \bigcup\limits_{[\mu],\rho} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash 1)$, а $E_2 = \bigcup\limits_{[\mu],\rho} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ – векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus L_g$. В силу леммы 1.1, указанные расслоения корректно определены над такими базами.

Для любого характера $\rho \neq 1$ определим отображение из $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, сопоставляя дифференциалу ω его класс периодов $[\omega] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ [4]. При $\rho \neq 1$ пространство $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ является комплексным векторным пространством размерности $2g - 2$.

Поднимем $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ на U, где $F_\mu = U/\Gamma'$. Найдем классические периоды

$\omega_{z_0}(T) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} \omega + m_1 \int\limits_{\gamma_1} \omega + ... + m_k \int\limits_{\gamma_k} \omega$, где обозначили через γ_j петлю обходящую только вокруг полюса Q_j и не обходящую вокруг остальных полюсов для ω на F_μ и $m_j \in \mathbf{Z}, j = 1, ..., k$. При этом интеграл $\int\limits_{z_0}^{Tz_0} \omega$ берется по некоторому специальному пути в круге U, не проходящему через полюса дифференциала ω.

Так как ω – дифференциал Прима второго рода, то все вычеты для всех ветвей ω в полюсах равны нулю. Поэтому существует первообразная мероморфная функция $f(z)$ на U такая, что $\omega = df$ на $F_\mu \backslash \{Q_1, ..., Q_k\}$ и $\omega_{z_0}(T) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} df(z)$ для любого $T \in \Gamma'$.

Зададим отображение

$$\Omega_{2,\rho}(F_\mu) \ni \omega \to [\omega] = \\ = \{\omega_{z_0}(A_1), ..., \omega_{z_0}(B_g), \omega_{z_0}(\gamma_1), ..., \omega_{z_0}(\gamma_k)\} \in \\ \in H^1(\Gamma'', \rho'),$$

где $\rho'(\gamma_j) = 1, j = 1, ..., k$, $\rho' = \rho$ на $\pi_1(F_\mu) \cong \Gamma'$. Здесь Γ'' – фуксова группа первого рода униформизирующая поверхность $F_\mu \backslash \{Q_1, ..., Q_k\}$ в круге U. Так как все $\omega_{z_0}(\gamma_j), j = 1, ..., k$, равны нулю, то класс $[\omega]$ выражается только через $\omega_{z_0}(A_1), ..., \omega_{z_0}(B_g)$, которые удовлетворяют уравнению $0 = \sum\limits_{j=1}^{g} [\sigma(B_j)\omega_{z_0}(A_j) - \sigma(A_j)\omega_{z_0}(B_j)]$, и для $\rho \neq 1$ существует такое k, что при $\rho(A_k) \neq 1$ период $\omega_{z_0}(A_k) = 0$ и при $\rho(B_k) \neq 1$ период $\omega_{z_0}(B_k) = 0$ [4].

Значит, отображение $\Omega_{2,\rho}(F_\mu) \ni \omega \to [\omega] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ корректно определено, хотя сначала $[\omega] \in H^1(\Gamma'', \rho')$.

По лемме 1.2, если класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ для некоторого $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$, то дифференциал ω является мультипликативно точным для ρ на F_μ, а значит, $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$.

Если $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$, то как раньше все $\omega_{z_0}(\gamma_j) = 0$, $j = 1, ..., k$. По условию $\omega = df$, где f – мультипликативная мероморфная функция на F_μ. Отсюда все периоды, по Р. Ганнингу, для ω принадлежат пространству $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$. Следовательно, $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$.

Поэтому для любого $\rho \neq 1$ отображение периодов из $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, задаваемое по правилу $\omega + \Omega_{e,\rho} \to [\omega + \Omega_{e,\rho}] = [\omega]$ будет корректно определено, взаимнооднозначно и линейно. Следовательно, $dim_{\mathbf{C}}\Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) \leq 2g - 2$ для любого $\rho \neq 1$.

Теорема 4.1. *Векторное расслоение E_1 над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash \{1\})$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2$, причем сокращенные наборы (1) и (2) из $2g-2$ классов смежности дифференциалов будут базисами локально голоморфных сечений векторного расслоения E_1. Кроме того, E_1 аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash \{1\})$ ранга $2g-2$.*

Доказательство. Покажем, что верно обратное неравенство для размерностей и построим базис в нашем фактор-пространстве.

Рассмотрим наборы (1) и (2). Нужно показать, что два класса из перечисленных будут линейно зависеть от $2g-2$ остальных классов. Вместо одного из дифференциалов $f_0\zeta_1, ..., f_0\zeta_g$ можно взять df_0, который представляет нулевой класс смежности. Действительно, если $\rho_0 \neq 1$ на F_{μ_0}, то существует $A_k \in \Gamma_\mu$, такое, что $\exp 2\pi i c_k = \rho_0(A_k) \neq 1$. Поэтому $c_k \neq 0$ для любого ρ из достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset L_g \backslash \{1\}$ и для любого $[\mu] \in U[\mu_0]$. Так как $df_0 = 2\pi i c_1 f_0\zeta_1 + ... + 2\pi i c_g f_0 \zeta_g$, то $f_0\zeta_k$ выражается линейно через остальные.

Заметим, что верно неравенство $(f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}) \geq \frac{1}{P_1^{n_1+1}} \geq \frac{1}{P_1^{n_j+1}}$ для любого $j = 2, ..., g$ и первый дифференциал $f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}$ лежит во всех пространствах $\Omega_\rho(\frac{1}{P_1^{n_j+1}}), j = 2, ..., g$, а значит, выражается как линейная комбинация через $g-1$ остальных дифференциалов.

Покажем, что сокращенный набор (1) классов смежности для дифференциалов $f_0\zeta_1, ..., \widehat{f_0\zeta_k}, ..., f_0\zeta_g, f_0\omega_2, ..., f_0\omega_g$ будет линейно независим над $\mathbf{C}$.

Предположим, что существует линейная комбинация, с коэффициентами не всеми равными нулю, вида

$$C_1 f_0\zeta_1 + ... + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + ... + C_g f_0 \zeta_g + \\ + \widetilde{C}_2 f_0\omega_2 + ... + \widetilde{C}_g f_0 \omega_g = df,$$

где f – (мероморфная) функция для ρ и $df \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$, а $\rho(A_k) \neq 1$. Верно неравенство $(f) \geq \frac{1}{P_2 ... P_g} \geq \frac{1}{P_1 ... P_g}$, но в силу выбора точек $P_1, ..., P_g$ не существует таких функций f на F_μ для ρ. Поэтому коэффициенты $\widetilde{C}_2 = ... = \widetilde{C}_g = 0$.

Оставшееся равенство влечет, что f является мультипликативной единицей и $f = C_1' f_0$. Если $C_1' = 0$, то $\zeta_1, ..., \widehat{\zeta_k}, ..., \zeta_g$ будут линейно зависимы на F_μ. Противоречие.

Если $C_1' \neq 0$, то $C_1' df_0 = df = \sum\limits_{j \neq k} C_j f_0 \zeta_j$. Для $\rho_0 \neq 1, \rho_0(A_k) \neq 1$, имеем

$$C_1' df_0 = (\sum_{j \neq k} C_1' 2\pi i c_j f_0 \zeta_j) + C_1' 2\pi i c_k f_0 \zeta_k$$

на F_μ, где $C_1' c_k \neq 0$. Отсюда получаем на F_μ равенство вида $(\sum\limits_{j \neq k} (C_1' 2\pi i c_j - C_j)\zeta_j) + C_1' 2\pi i c_k \zeta_k = 0$. Противоречие с линейной независимостью абелевых дифференциалов $\zeta_1, ..., \zeta_g$. Поэтому $C_j = 0$ для всех $j \neq k$.

Покажем, что сокращенный набор (2) классов смежности для дифференциалов $f_0\zeta_1, ..., \widehat{f_0\zeta_k}, ..., f_0\zeta_g, f_0\tau_{P_1}^{(n_2+1)}, ..., f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)}$ будет линейно независим над $\mathbf{C}$. Предположим, что существует линейная комбинация, с коэффициентами не всеми равными нулю, вида

$$C_1 f_0\zeta_1 + ... + \widehat{C_k f_0 \zeta_k} + ... + C_g f_0 \zeta_g +$$

$$+\widetilde{C}_2 f_0 \tau_{P_1}^{(n_2+1)} + ... + \widetilde{C}_g f_0 \tau_{P_1}^{(n_g+1)} = df,$$

где f – мероморфная функция для ρ и $df \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$.

Выберем среди коэффициентов $\widetilde{C}_j \neq 0$ коэффициент с максимальным номером, например, $j = j_0$. Тогда f будет иметь в качестве особенностей только один полюс P_1 порядка n_{j_0}. Это противоречит выбору мультипликативных пробелов в точке P_1 на F_μ. Поэтому $\widetilde{C}_2 = ... = \widetilde{C}_g = 0$. Обращение в нуль коэффициентов $C_1, ..., \widehat{C_k}, ..., C_g$ доказывается также, как для предыдущего набора.

Таким образом, построили два вида наборов классов смежности, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ, которые являются линейно независимыми над $\mathbf{C}$. Следовательно, верно обратное неравенство $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) \geq 2g - 2$. Поэтому $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) = 2g - 2$.

По теореме Грауэрта [4; 11], в силу односвязности базы $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$, это расслоение аналитически эквивалентно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ ранга $2g - 2$. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Из теоремы 4.1 следует, что для расслоения E_1 существуют $2g - 2$ глобальных голоморфных сечений над базой $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$.

Теорема 4.2. *Векторное расслоение E_2 над $\mathbf{T}_g \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus L_g)$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$. При этом наборы (3) и (4) классов смежности дифференциалов будут базисами локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Доказательство. Нужно только доказать, что верно обратное неравенство для размерностей и построить базис в нашем фактор-пространстве. По теореме 1.1 существует $g - 1$ различных точек $P_1, ..., P_{g-1}$ на F_μ, голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ, таких, что $r_\rho(\frac{1}{P_1 ... P_{g-1}}) = 0$, или не существует мультипликативных функций f для ρ на F_μ, чьи особенности только полюса порядка не выше 1 в этих точках.

Кроме того, по теореме 1.3 о мультипликативных пробелах Вейерштрасса для существенного характера ρ в точке $\widetilde{P}_1$ на F_μ, голоморфно зависящей от $[\mu]$ и ρ, имеется ровно $g - 1$ мультипликативных пробелов $\widetilde{n}_1, ..., \widetilde{n}_{g-1}$, удовлетворяющих условию $1 \leq \widetilde{n}_1 < \widetilde{n}_2 < \cdots < \widetilde{n}_{g-1} < 2g$ [8, с. 76].

Покажем, что классы смежности, задаваемые дифференциалами Прима из набора (3) или (4) для ρ, будут линейно независимы над $\mathbf{C}$ на F_μ.

Докажем от противного. Если набор (3) линейно зависим, то верно равенство

$$C_1\widetilde{\zeta}_1 + ... + C_{g-1}\widetilde{\zeta}_{g-1} + C'_1\widetilde{\tau}_{P_1}^{(2)} + ... + C'_{g-1}\widetilde{\tau}_{P_{g-1}}^{(2)} = df,$$

в котором не все коэффициенты равны нулю, где f – мероморфная функция для ρ на F_μ. Коэффициенты $C'_1 = C'_2 = ... = C'_{g-1} = 0$, так как не существует функции f для ρ, у которой только точки $P_1, ..., P_{g-1}$ будут простыми полюсами.

Если числа $C_1, ..., C_{g-1}$ не все равны нулю, то ввиду голоморфности левой части получим, что f – единица для ρ и характер ρ – несущественный. Получили противоречие с условием. Поэтому $C_1 = ... = C_{g-1} = 0$.

Таким образом, показали, что набор (3) дает линейно независимые над $\mathbf{C}$ классы смежности нашего фактор пространства.

Покажем, что набор (4) представляет линейно независимые классы смежности. Предположим, что есть линейная зависимость и верно равенство

$$C_1\widetilde{\zeta}_1 + ... + C_{g-1}\widetilde{\zeta}_{g-1} +$$

$$+C'_1\widetilde{\tau}_{\widetilde{P}_1}^{(\widetilde{n}_1+1)} + ... + C'_{g-1}\widetilde{\tau}_{\widetilde{P}_1}^{(\widetilde{n}_{g-1}+1)} = df,$$

где f – мероморфная функция для ρ на F_μ. Если не все коэффициенты $C'_1, ..., C'_{g-1}$ равны нулю, то существует коэффициент $C'_{j_0} \neq 0$ с максимальным номером, а значит, функция f имеет полюс только в точке $\widetilde{P}_1$ точно порядка $\widetilde{n}_{j_0}$. Противоречие, так как $\widetilde{n}_{j_0}$ – мультипликативный пробел Вейерштрасса в $\widetilde{P}_1$ на F_μ для ρ. Равенство нулю коэффициентов $C_1, ..., C_{g-1}$ доказывается также, как выше. Таким образом, $\dim \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) \geq 2g-2$ для существенных характеров ρ на F_μ. Теорема 4.2 доказана.

Обозначим через $\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 ... Q_s}; F_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов Прима для ρ с полюсами не выше первого порядка в точках $Q_1, ..., Q_s$, $s \geq 2$, а через $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$ – подпространство мультипликативно точных голоморфных дифференциалов для ρ, где дивизор $Q_1 ... Q_s$ на F_μ понимается как глобальное вещественно аналитическое сечение К. Эрла [12] расслоения целых дивизоров степени s над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$ [8].

Введем наборы дифференциалов, представляющих классы смежности нашего фактор пространства: для несущественных характеров

$$f_0\zeta_1, ..., \widehat{f_0\zeta_k}, ..., f_0\zeta_g, f_0\tau_{Q_2Q_1}, ..., f_0\tau_{Q_sQ_1}; \qquad (*)$$

для существенных характеров

$$\widetilde{\zeta}_1, ..., \widetilde{\zeta}_{g-1}, \widetilde{\tau}_{\rho;Q_2Q_1}, ..., \widetilde{\tau}_{\rho;Q_sQ_1}, \widetilde{\tau}_{\rho;Q_1}. \qquad (**)$$

Для несущественного $\rho \neq 1$ дифференциал $df_0 \neq 0$ порождает одномерное подпространство в $\Omega_\rho(1; F_\mu)$, т.е. $\Omega_\rho(1; F_\mu) =< df_0 > \oplus H$, где H будет $(g - 1)-$мерным подпространством. Так если

$\rho_0 \neq 1$, то существует a_k такое, что $\exp 2\pi i c_k = \rho_0(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0 (mod\ \mathbf{Z})$. Далее

$$\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i(c_1\zeta_1 + ... + c_g\zeta_g).$$

Отсюда $2\pi i c_k f_0 \zeta_k = df_0 - \sum\limits_{j\neq k} 2\pi i c_j f_0 \zeta_j$ и $H = \bigoplus\limits_{j\neq k} \langle f_0\zeta_j\rangle$. В достаточно малых окрестностях $U([\mu_0])$ и $U(\rho_0)$ для такого характера ρ_0 для всех $\rho \in U(\rho_0)$ верно $\rho(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0$.

Обозначим через

$$E_3 = \bigcup_{[\mu],\rho} \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_s}; F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$$

векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash \{1\})$.

Используя формулу Римана-Роха, для любого характера найдем размерность $\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_s}; F_\mu)$. Имеем

$$r_{\rho^{-1}}(Q_1...Q_s) = \deg(\frac{1}{Q_1...Q_s}) - g + 1 + i_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_s}).$$

Предположим, что существует $f \neq 0, f \in L_{\rho^{-1}}(Q_1...Q_s)$, т. е. f для ρ^{-1}, такая, что $(f) \geq Q_1...Q_s, s \geq 1$. Следовательно,

$$0 = \deg(f) \geq s \geq 1 > 0.$$

Противоречие. Поэтому $r_{\rho^{-1}}(Q_1...Q_s) = 0$ и $i_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_s}) = g + s - 1$.

Теорема 4.3. *Векторное расслоение E_3 над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash \{1\})$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $g + s - 2$, причем сокращенный набор $(*)$ из $g + s - 2$ классов смежности дифференциалов будет базисом локально голоморфных сечений этого векторного расслоения, где $s \geq 2$. Кроме того, E_3 аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash \{1\})$ ранга $g + s - 2$.*

Доказательство. Пусть ρ – несущественный характер и $\rho \neq 1$. Тогда существует f_0 мультипликативная единица, т. е. $(f_0) = 1$ такая, что $0 \neq df_0 \in \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Покажем, что нет других базисных элементов, кроме $cdf_0, c \neq 0$, в $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Предположим противное, пусть существует $\omega \neq 0$ и $\omega \neq cdf_0$, принадлежащий $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Тогда $\omega = df$ – мультипликативно точный голоморфный дифференциал, и существует голоморфная функция f для ρ и $\deg(f) = 0$. Так как у f нет полюсов, то нет и нулей, и f – мультипликативная единица для ρ на F_μ. Поделив f на f_0, получим функцию $g = \frac{f}{f_0}$, такую, что $(g) = (\frac{f}{f_0}) = (f) = 1$, где g – однозначная голоморфная функция на F_μ, а значит, g константа, отличная от нуля. Тогда $f = cf_0$, и $\omega = df = cdf_0, c \neq 0$. Противоречие. Поэтому $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) =< df_0 >$ и $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) = 1$.

Отсюда получаем, что

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_s}; F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) = g + s - 2.$$

Для несущественного характера ρ построим базис в этом фактор пространстве. Возьмем для $\rho_0 \neq 1, \rho_0(a_k) = \exp 2\pi i c_k$ следующие дифференциалы : $f_0\zeta_1, ..., \widehat{f_0\zeta_k}, ..., f_0\zeta_g, f_0\tau_{Q_2Q_1}, ..., f_0\tau_{Q_sQ_1}$, где $2\pi i c_k f_0\zeta_k = df_0 - 2\pi i \sum\limits_{j\neq k} c_j f_0 \zeta_j,\ c_k \neq 0$. Пусть существует линейная комбинация, у которой не все нулевые коэффициенты, такая, что

$$C_1 f_0\zeta_1 + ... + \widehat{C_k f_0 \zeta_k} + ... + C_g f_0 \zeta_g +$$

$$\widetilde{C}_2 f_0 \tau_{Q_2Q_1} + ... + \widetilde{C}_s f_0 \tau_{Q_sQ_1} = df$$

на F_μ, где f – голоморфная мультипликативная функция на F_μ. Тогда коэффициенты $\widetilde{C}_2 = 0, ..., \widetilde{C}_s = 0$, так как дифференциалы в правой и левой частях имеют разные особые точки.

Теперь, как в доказательстве теоремы 4.1, получим, что $C_j = 0$ для всех $j \neq k$.

Таким образом, набор классов смежности $[f_0\zeta_1], ..., \widehat{[f_0\zeta_k]}, ..., [f_0\zeta_g], [f_0\tau_{Q_2Q_1}], ..., [f_0\tau_{Q_sQ_1}]$ будет базисом в нашем фактор пространстве для несущественного характера $\rho \neq 1$, который голоморфно зависит от $[\mu] \in U[\mu_0]$ и от $\rho \in U(\rho_0)$. Теорема 4.3 доказана.

Заметим, что для $\rho \equiv 1, s > 1$, дифференциалы $\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{Q_2Q_1}, ..., \tau_{Q_sQ_1}$ образуют базис в пространстве $\Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}; F_\mu)$ и $\Omega_e(1; F_\mu) = \{0\}$, так как, по классической теореме Римана-Роха,

$$i(\frac{1}{Q_1...Q_s}) = s + g - 1 + r(Q_1...Q_s) = s + g - 1.$$

Теорема 4.4. *Векторное расслоение E_4 над $\mathbf{T}_g \times (Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \setminus L_g)$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $g + s - 1$. При этом набор $(**)$ классов смежности дифференциалов будет базисом локально голоморфных сечений этого векторного расслоения, где $s \geq 1, g > 1$.*

Доказательство. Пусть ρ — существенный характер. Рассмотрим пространство $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Предположим, что существует $\omega \neq 0, \omega \in \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$, тогда $\omega = df$ — голоморфный мультипликативно точный дифференциал для ρ. Следовательно, f — глобальная голоморфная мультипликативная функция для существенного ρ. Известно, что $deg(f) = 0$, поэтому f — мультипликативная единица для ρ, а значит ρ — несущественный. Получили противоречие. Поэтому $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) = \{0\}$.

Таким образом :

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \cdots Q_s}; F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) =$$
$$= \dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \cdots Q_s}; F_\mu) = g + s - 1.$$

С учетом теоремы 2.3, для существенного характера ρ имеем $g + s - 1$ линейно независимых дифференциалов $\widetilde{\zeta}_1, ..., \widetilde{\zeta}_{g-1}, \widetilde{\tau}_{\rho;Q_2Q_1}, ..., \widetilde{\tau}_{\rho;Q_sQ_1}, \widetilde{\tau}_{\rho;Q_1}$.

Действительно, если существует линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами вида

$$c_1\widetilde{\zeta}_1+...+c_{g-1}\widetilde{\zeta}_{g-1}+c_1^{'}\widetilde{\tau}_{\rho;Q_1}+ \\ +c_2^{'}\widetilde{\tau}_{\rho;Q_2Q_1}+...+c_s^{'}\widetilde{\tau}_{\rho;Q_sQ_1}=df,$$

где df — голоморфный мультипликативно точный дифференциал Прима для ρ, то коэффициенты $c_2^{'}=...=c_s^{'}=0$, поскольку точки $Q_2,...,Q_s$ не являются особыми для правой части. Затем $c_1^{'}=0$, так как в противном случае функция f не будет локально однозначна в проколотой окрестности точки Q_1, что противоречит условию $\rho(\gamma_1)=1$, где γ_1 — петля, обходящая точку Q_1. Остается равенство $c_1\widetilde{\zeta}_1+...+c_{g-1}\widetilde{\zeta}_{g-1}=df$. В нашем случае $df=0$, а значит, коэффициенты $c_1=...=c_{g-1}=0$. Теорема 4.4 доказана.

Теорема 4.5. *На компактной римановой поверхности F_μ рода $g\geq 2$ для первой голоморфной группы когомологий де Рама*

$$H^1_{hol,\rho}(F_\mu)=\Omega_\rho(1;F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1;F_\mu)$$

для характеров верно, что $\dim_{\mathbf{C}} H^1_{hol,\rho}(F_\mu)=g-1$, если $\rho\neq 1$. В этих фактор пространствах на F_μ :

(i) для несущественного характера $\rho_0\neq 1,\rho_0(a_k)\neq 1$, классы смежности $[f_0\zeta_1],...,\widehat{[f_0\zeta_k]},...,[f_0\zeta_g]$ дифференциалов образуют базис, которые локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ;

(ii) для существенного характера ρ классы смежности $[\widetilde{\zeta}_1],...,[\widetilde{\zeta}_{g-1}]$ дифференциалов образуют базис, где $\widetilde{\zeta}_1,...,\widetilde{\zeta}_{g-1}$ — любой базис голоморфных дифференциалов в пространстве $\Omega_\rho(1;F_\mu)$, которые локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и от ρ.

5. Гармонические дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности

Гармоническим дифференциалом Прима ϕ на F для $\rho\in Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма

$$\phi=\phi_1(z)dz+\phi_2(\overline{z})d\overline{z}$$

на U, такая, что $\phi_1(Tz)dTz+\phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz}=\rho(T)(\phi_1(z)dz+\phi_2(\overline{z})d\overline{z})$, $T\in\Gamma, z\in U$.

Гармонический дифференциал Прима ϕ на U представляется в виде $\phi=\phi_1(z)dz+\phi_2(\overline{z})d\overline{z}$, где $\phi_1(z)dz=df_1(z),\phi_2(\overline{z})d\overline{z}=d\overline{f_2(z)}, f_j(z)$ — голоморфные функции на $U, j=1,2$, которые определяются с точностью до аддитивных комплексных констант. Поэтому $\phi=df(z)$, где $f(z)=f_1(z)+\overline{f_2(z)}$ — комплекснозначная гармоническая функция на U (гармонический интеграл Прима для дифференциала ϕ). Также получаем следующие соотношения:

$$f(Tz)=\rho(T)f(z)+\phi(T), \phi(ST)=\phi(S)+\rho(S)\phi(T),$$

где

$$\phi(T)=f(Tz_0)-\rho(T)f(z_0)=\phi_1(T)+\phi_2(T),$$

$$\phi_1(T)=f_1(Tz_0)-\rho(T)f_1(z_0),$$

$$\phi_2(T)=\overline{f_2(Tz_0)}-\rho(T)\overline{f_2(z_0)}.$$

Здесь $\phi_1(Tz)dTz=\rho(T)\phi_1(z)dz,\phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz}=\rho(T)\phi_2(\overline{z})d\overline{z}, T\in\Gamma, z\in U$. Следовательно, отображение периодов $\phi:T\rightarrow\phi(T)$ или $\phi:\Gamma\rightarrow\mathbf{C}$, относительно гармонического интеграла Прима $f(z)$, есть элемент из $Z^1(\Gamma,\rho)$. Если $\widehat{f_1}(z)=f_1(z)+c_1,\widehat{f_2}(z)=f_2(z)+c_2$ — другие интегралы Прима для $\phi_1(z)dz,\phi_2(\overline{z})d\overline{z}$ соответственно, то

$$\widehat{\phi_1}(T)=\phi_1(T)+c_1\sigma(T),$$

$$\widehat{\phi_2}(T)=(\overline{f_2(Tz_0)+c_2})-\rho(T)(\overline{f_2(z_0)+c_2})= \\ =\phi_2(T)+\overline{c_2}\sigma(T).$$

Таким образом,

$$\widehat{\phi}(T)=\phi(T)+(c_1+\overline{c_2})(1-\rho(T)),T\in\Gamma,$$

и отображения периодов при различных гармонических интегралах Прима для одного и того же гармонического дифференциала Прима будут отличаться на элемент из $B^1(\Gamma,\rho)$. Поэтому $\mathbf{C}$-линейное отображение $p:\phi\rightarrow[\phi]\in H^1(\Gamma,\rho)$, которое гармонический дифференциал Прима ϕ переводит в его класс периодов $[\phi]$, корректно определено.

Обозначим через $\Gamma(F,\mathcal{H}^1(\rho))$ пространство всех гармонических дифференциалов Прима для ρ на F.

Теорема 5.1. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g\geq 2$, ϕ — гармонический дифференциал Прима на F для $\rho\in[S^1]^{2g}$ и $[\phi]=0$ в $H^1(\Gamma,\rho)$. Тогда $\phi=0$ на F.*

Доказательство 1. [8, с. 155]. По лемме 3.2.1 [8] дифференциал $\phi=\varpi+\overline{\varphi}$, где ϖ и φ — голоморфные дифференциалы Прима для ρ и $\overline{\rho}$ соответственно на F. Из условия $[\phi]=0$ и леммы 3.2.2 [8] следует существование мультипликативной функции f на F для ρ, такой, что $\varpi+\overline{\varphi}=df(z)$ на U. Покажем, что $\varpi=0=\varphi$ на U. От противного. Предположим, что $\varphi\neq 0$ на фундаментальной области Δ для группы Γ (или на F). Тогда, положив $\varphi=g(z)dz$ на Δ, имеем :

$$\frac{i}{2}\int\int_\Delta\varphi\wedge\overline{\varphi}=\int\int_\Delta|g(z)|^2dx\wedge dy>0.$$

С другой стороны,

$$\varphi\wedge\overline{\varphi}=\varphi\wedge\varpi+\varphi\wedge\overline{\varphi}= \\ =\varphi\wedge df=-d(f\varphi).$$

Отсюда

$$\int\int_\Delta\varphi\wedge\overline{\varphi}=\int\int_\Delta\varphi\wedge df=-\int_{\partial\Delta}f\varphi=0$$

по теореме 3.2.3 [8, с. 155], так как $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \overline{\rho}$, $\rho\overline{\rho} = 1$ и для дифференциала df все $a-$периоды и $b-$периоды равны 0. Получили противоречие. Поэтому $\phi = \varpi$.

Повторяя предыдущие рассуждения с ϖ, получим, что $\varpi = 0$ на U.

Доказательство 2. Используя обозначения предыдущего доказательства, получим, что

$$0 \le (\phi, \phi) = \int\int_{\Delta} \phi \wedge *\overline{\phi} = \int_{\partial\Delta} f(z)(*\overline{\phi}) = 0.$$

Последнее равенство снова выводится из теоремы 3.2.3 [8]. Отсюда, $(\phi, \phi) = 0$ на Δ и $\phi = 0$ на Δ. Следовательно, $\phi = 0$ на F. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Гармонический дифференциал Прима ϕ на F для $\rho \in [S^1]^{2g}\backslash 1$ единственно определяется своим классом периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ и $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1(\Gamma, \rho)$.*

Множество всех гармонических дифференциалов Прима ϕ для $\rho \in Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$ образует комплексное $(2g-2)$-мерное векторное пространство $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ при $\rho \notin L_g \cup \overline{L_g}$, так как

$$\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho)),$$

где $\overline{L_g}$ — образ L_g при отображении $\rho \to \overline{\rho}$. Выберем базис $\{\phi_j(z; \rho, [\mu])dz\}_{j=1}^{g-1}$ для $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, голоморфно зависящий от ρ в достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$ и голоморфно зависящий от $[\mu]$ в достаточно малой окрестности $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ [8, с. 105; 4]. Одновременно выберем базис $\{\phi_j(z; \overline{\rho}, \overline{[\mu]})dz\}_{j=1}^{g-1}$ в $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\overline{\rho}))$, голоморфно зависящий от $\overline{\rho}$ в $\overline{U(\rho_0)}$ (образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho \to \overline{\rho}$, это отображение будет автоморфизмом на $L_g \cup \overline{L_g}$) и голоморфно зависящий от $\overline{[\mu]}$ в достаточно малой окрестности $\overline{U([\mu_0])}$. Здесь класс $[\mu]$ имеет модули $(c_1, c_2, ..., c_{3g-3}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$, а класс $\overline{[\mu]}$ имеет модули $(\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_{3g-3}}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$.

Поэтому набор гармонических дифференциалов Прима

$$\phi_1(z; \rho, [\mu])dz, \ \ldots, \ \phi_{g-1}(z; \rho, [\mu])dz,$$

$$\overline{\phi_1(z; \overline{\rho}, \overline{[\mu]})dz}, \ \ldots, \ \overline{\phi_{g-1}(z; \overline{\rho}, \overline{[\mu]})dz}$$

образует базис, голоморфно зависящий от $\rho \in U(\rho_0)$ и от $[\mu]$.

Таким образом, на комплексном векторном расслоении (это есть так называемое гармоническое расслоение Прима)

$$\mathbf{HP} = \cup_{[\mu], \rho \notin L_g \cup \overline{L_g}} \Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \mathbf{P}_{1,0} \oplus \mathbf{P}_{0,1}$$

ранга $2g-2$ над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ определено по формуле:

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int\int_{w^{s([\mu])}(\Delta)} (u_1 \overline{u_2} + v_1 \overline{v_2}) dz \wedge d\overline{z},$$

где Δ — фиксированная фундаментальная область для Γ в U; $\phi_j = u_j(z)dz + v_j(z)d\overline{z}$, $j = 1, 2$. Здесь $s([\mu])$ – локально голоморфное сечение Эрла над пространством Тейхмюллера [12].

Скалярное произведение эрмитово, так как $(\phi_1, \phi_2) = \overline{(\phi_2, \phi_1)}$. Легко видеть, что $\mathbf{C}-$линейный оператор $*$ (звезда Ходжа) будет изометрией на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$. Оператор $*$ также изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ на себя и изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ на себя.

Относительно этого скалярного произведения пространства $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ и $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ ортогональны, так как, если $\phi_1 = u(z)dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)), \phi_2 = v(z)d\overline{z} \in \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$, тогда $(\phi_1, \phi_2) = \int_i \int_{w^{s([\mu])}(\Delta)} u dz \wedge *\overline{v(z)d\overline{z}} = 0$. Векторные расслоения $\mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{0,1}$ и $\mathbf{HP}$ являются эрмитовыми голоморфными векторными расслоениями над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$. Следовательно, доказана

Теорема 5.2. *Гармоническое расслоение Прима $\mathbf{HP} = \bigcup_{([\mu], \rho)} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2$. Кроме того, $\mathbf{HP}$ является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных $*-$инвариантных векторных подрасслоений $\mathbf{P}_{1,0}$ и $\mathbf{P}_{0,1}$ ранга $g-1$ над*

$$\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$$

при любом $g \ge 2$.

Зададим конечное покрытие для $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1$ открытыми окрестностями $U_j = \{\rho : \rho(A_j) \ne 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j) \ne 1\}, j = 1, ..., g$. Рассмотрим характер $\rho \in ([S^1]^{2g}\backslash 1) \cap U_1$. Для других окрестностей U_j, $j = 2, ..., 2g$ рассмотрения будут аналогичны.

Следствие 5.2. *Для любого $\rho_0 \in [S^1]^{2g}\backslash 1$ существует окрестность $U(\rho_0) \subset \{[S^1]^{2g}\backslash 1\}$, такая, что для $\rho \in U(\rho_0) \cap U_1$ в $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ существует базис гармонических дифференциалов Прима $\phi_1 = \phi_1(\rho; z), ..., \phi_{2g-2} = \phi_{2g-2}(\rho; z)$, вещественно-аналитически зависящий от ρ и имеющий матрицу периодов, относительно $A_2, ..., A_g, B_2, ..., B_g$, вида I_{2g-2} (единичная матрица порядка $2g-2$).*

Обозначим через $Z^1(\Gamma, \rho)$ при $\rho \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma \to \mathbf{C}$, таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma$.

Приведем основные свойства таких отображений:

1) $\phi(1) = 0$, так как $\phi(S \cdot 1) = \phi(S) + \rho(S)\phi(1)$ и $\rho(S) \ne 0$;

2) $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$, так как

$$0 = \phi(1) = \phi(SS^{-1}) = \phi(S) + \rho(S)\phi(S^{-1})$$

и $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$;

3) $\phi([A, B] \cdot [C, D]) = \phi([A, B]) + \phi([C, D])$, так как $\rho([A, B]) = 1$;

4) $\phi([A,B]) = \sigma(B)\phi(A) - \sigma(A)\phi(B)$ для любых $A, B \in \Gamma$, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $\quad T \in \Gamma$;

5)

$$\phi(ABA^{-1}) = \phi([A,B]B) =$$

$$\phi([A,B]) + \phi(B), \quad A, B \in \Gamma;$$

6) $\phi(ABA^{-1}) = \rho(A)\phi(B), \quad A \in \Gamma, B \in [\Gamma,\Gamma]$.

Теорема 5.3. *Когомологическое расслоение Ганнинга G является голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2$ над*

$$\mathbf{T}_g(F) \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1).$$

Доказательство. При $\rho_\mu \neq 1$ существует изоморфизм векторного пространства $H^1(\Gamma_\mu, \rho_\mu)$ и векторного пространства $Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$, состоящего из гомоморфизмов $\phi_0 : [\Gamma_\mu, \Gamma_\mu] \to (\mathbf{C}, +)$, таких, что $\phi_0(S^\mu T^\mu (S^\mu)^{-1}) = \rho_\mu(S^\mu)\phi_0(T^\mu)$, где $T^\mu \in [\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], S^\mu \in \Gamma_\mu, [\Gamma,\Gamma]$ — коммутант группы Γ. Таким образом, расслоение G над $\mathbf{T}_g(F) \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1)$ изоморфно расслоению со слоем $Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ над $([\mu], \rho)$, где

$$\rho(A_j) = \rho_\mu(A_j^\mu), \rho(B_j) = \rho_\mu(B_j^\mu), j = 1, ..., g.$$

Зададим карту $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g)$ над $\mathbf{T}_g(F) \times U_l$ биективно отображающую $G\mid_{\mathbf{T}_g(F)\times U_l}$ на $\mathbf{T}_g(F) \times U_l \times \mathbf{C}^{2g-2}$ по правилу: элементу $\phi_0([\mu], \rho_\mu) \in Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ сопоставляется набор :

$$([\mu], \rho; \xi_1^l, ..., \xi_{g-1}^l, \eta_1^l, ..., \eta_{g-1}^l).$$

Здесь над U_l имеем:

$$\xi_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([A_{\widetilde{j}}^\mu, A_l^\mu]), \eta_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([B_{\widetilde{j}}^\mu, A_l^\mu]),$$

а над U_{g+l} –

$$\xi_j^{g+l} = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([A_{\widetilde{j}}^\mu, B_l^\mu]),$$

$$\eta_j^{g+l} = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([B_{\widetilde{j}}^\mu, B_l^\mu]),$$

где $\widetilde{j} = j$, при $1 \leq j \leq l-1$, и $\widetilde{j} = j+1$, при $l \leq j \leq g-1$. Для $\rho \in U_1$, например, будет $\sigma_\mu(A_1^\mu) = 1 - \rho_\mu(A_1^\mu) \neq 0$ и любой элемент $\phi_0 = \phi_0([\mu], \rho_\mu) \in Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ можно задать как $\phi_0 = \phi_1\mid_{[\Gamma_\mu,\Gamma_\mu]}$ для $\phi_1 = \phi_1([\mu], \rho_\mu) \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho_\mu)$, такого, что

$$\phi_1(A_1^\mu) = 0, \phi_1(T^\mu) = \sigma_\mu(A_1^\mu)^{-1}\phi_0([T^\mu, A_1^\mu]), T^\mu \in \Gamma_\mu.$$

Отсюда получаем соотношения:

$$\xi_j^1 = \phi_0([A_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \phi_1([A_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \\ = \sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(A_{j+1}^\mu),$$

$$\eta_j^1 = \phi_0([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \phi_1([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \\ = \sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(B_{j+1}^\mu), \quad j = 1, ..., g-1.$$

Кроме того, из основного коциклического соотношения и задания координат над U_1 следует, что :

$$\phi_1(B_1^\mu) = \sigma_\mu(A_1^\mu)^{-2}\sum_{j=1}^{g-1}[\sigma_\mu(B_{j+1}^\mu)\xi_j^1 - \sigma_\mu(A_{j+1}^\mu)\eta_j^1].$$

Таким образом, $\phi_1(A_j^\mu), \phi_1(B_j^\mu), j = 1, ..., g$, выражаются через $\xi_j^1, \eta_j^1, j = 1, ..., g-1$, и последние можно взять в качестве координат для ϕ_0 в слоях над $\mathbf{T}_g(F) \times U_1$. Аналогично можно поступить для остальных окрестностей.

Координаты ξ_j^l, η_j^l являются линейными комбинациями от $\phi_l(A_j), \phi_l(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_l$, а также линейными комбинациями от $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$, так как $\phi_l|_{[\Gamma,\Gamma]} = \phi_0 = \phi_k|_{[\Gamma,\Gamma]}$ над $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$ (здесь ϕ_k и ϕ_l определяются, аналогично, как ϕ_1 над U_1, над U_k и U_l соответственно). Далее, $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ — линейные комбинации от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k$. Поэтому координаты ξ_j^l, η_j^l будут линейными комбинациями от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$. Таким образом, получим, что матрицы перехода $T_{k,l}$ голоморфны на

$$\mathbf{T}_g(F) \times (U_l \cap U_k)$$

для всех $k, l = 1, ..., 2g$. Следовательно, такие карты $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g), l = 1, ..., 2g$, задают структуру голоморфного векторного расслоения на G над $\mathbf{T}_g(F) \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1)$. Теорема доказана.

Теорема 5.4. *Векторные расслоения Ганнинга $G = \bigsqcup_{([\mu],\rho)} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ и Прима* **HP** *над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$ будут вещественно-аналитично изоморфными, и расслоение Ганнинга G над*

$$\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$$

равно прямой сумме двух вещественно-аналитических комплексных векторных подрасслоений ранга $g-1$ для любого $g \geq 2$.

Доказательство. Имеем включения

$$[S^1]^{2g}\backslash 1 \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g}) \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1,$$

что сразу следует из теоремы Фаркаша–Кра [6, с.130], по которой любой нормированный несущественный характер будет тривиальным. На $[S^1]^{2g}\backslash 1$ есть естественная вещественно-аналитическая структура, согласованная с комплексно-аналитической структурой на $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$. Поэтому голоморфные векторные расслоения G и **HP** над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$, ограниченные на $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$, будут вещественно-аналитическими комплексными векторными расслоениями [8; 4], а послойный $\mathbf{C}-$линейный изоморфизм p будет также вещественно-аналитическим изоморфизмом расслоений G и **HP** над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \backslash 1$.

Второе утверждение следует из теорем 3.1, 3.3 и 4.1, а также из теоремы 3.1.3 [8, с. 140]. Теорема доказана.

Литература

[1] Prym, F. *Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann's* / F. Prym, G. Rost. – Leipzig: Teubner, 1911.

[2] Appell, P. *Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application an developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques*/ P. Appell // Acta Math. – 1890. – Vol. 13:3/4. – P. 1 – 174.

[3] Petersson, H. *Über eine metrisierung der automorphen Formen im die Theorie der Poincareschen Reinen* / H. Petersson // Math. Ann. – 1940. – Vol. 117:4. – P. 453 – 457.

[4] Gunning, R. C. *On the period classes of Prym differentials*/ R. C. Gunning // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 319. – P. 153 – 171.

[5] Fay, J. *Analytic Torsion and Prym differential* / J. Fay // Proc. of the 1978 Stony Brook Conf. – Princeton : Princeton Univ. Press. – 1980. – P. 107 – 122.

[6] Farkas, H. M. *Riemann surfaces*/ H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math.. – Vol. 71. – New-York: Springer, 1992.

[7] Дубровин, Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1* / Б. А. Дубровин – М.: МГУ, 1986.

[8] Чуешев, В.В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.

[9] Чуешев, В. В. *Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразия Якоби компактной римановой поверхности*/ В. В. Чуешев // Матем. заметки. – 2003 – Vol. 74:4. – С. 629 – 636.

[10] Альфорс Л. В., Берс, Л. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения*/ Л. В. Альфорс, Л. Берс. – М.:ИЛ, 1961.

[11] Чуешев, В. В. *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности*/ В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2005.

[12] Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties* / C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – Vol. 107. – P. 255 – 286.

[13] Спрингер, Дж. *Введение в теорию римановых поверхностей*/ Дж. Спрингер. – М.: ИЛ, 1960.

[14] Arbarello, E. *Weierstrass points and moduli of curves*/ E. Arbarello // Compositio Math. – **29** (1974). – P. 325 – 342.

[15] Головина, М. И. *Дивизоры дифференциалов Прима на римановой поверхности* / М. И. Головина // Вестник КемГУ. – 2011. – Vol. 3/1. – С. 193 – 199.

[16] Пушкарева, Т. А. *Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на переменной компактной римановой поверхности* / Т. А. Пушкарева, В. В. Чуешев // Вестник КемГУ. – 2011. – Vol. 3/1. – С. 211 – 216.

[17] Golovina, M. I. *Meromorphic Prym differentials on a variable Riemann surface* / M.I. Golovina // International conference ISAAK. – Moscow, August 2011. – 1 c.

[18] Пушкарева, Т.А. *Классы периодов гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности* / Т.А. Пушкарева // [Электронный ресурс]. Тезисы Международной школы-конференции по геометрии и анализу. Кемерово. – 2011. 2 с. Зарегистрировано в Депозитарии электронных изданий "Информрегистр". – № 0321102235. – Режим доступа: http://conference.kemsu.ru/conf/GA2011/tesis.zip, свободный.

[19] Казанцева, А. А., Чуешев, В. В. *Элементарные мероморфные дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности* / А. А. Казанцева, В. В. Чуешев // [Электронный ресурс]. Тезисы Международной школы-конференции по геометрии и анализу. Кемерово. – 2011. 4 с. Зарегистрировано в Депозитарии электронных изданий "Информрегистр". – № 0321102235. – Режим доступа: http://conference.kemsu.ru/conf/GA2011/tesis.zip, свободный.

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

УДК 514.76.2

ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ

С. К. Водопьянов, А. О. Молчанова

STOKES' THEOREM FOR DIFFERENTIAL FORMS OF AN ARBITRARY SUMMABILITY

S. K. Vodopyanov, A. O. Molchanova

Работа посвящена исчислению дифференциальных форм соболевского типа. В работах [2, 3] *в ситуации, аналогичной теореме вложения пространства* W_p^1 *в пространство непрерывных функций при условии* $p > n$, *определяется интеграл* $\int_X \omega$ *и устанавливается теорема Стокса* $\int_X \omega = \int_{\partial X} d\omega$.

В данной работе исследован случай, соответствующий вложению пространства Соболева W_p^1 *в пространство* L_q *при условии* $p \le n$. *В этом случае мы придаем смысл интегралу от* k*-формы по* k*-мерному ориентированному многообразию, чтобы он согласовывался с уже имеющейся теорией. Установлена справедливость формулы Стокса* $\int_X \omega = \int_{\partial X} d\omega$ *в модельном случае* $X \subset \mathbb{R}^n$, $\dim X = n$. *Существование интеграла справа понимается в смысле, описанном в данной работе.*

The work is devoted to the calculus of differential forms of Sobolev type. The authors of [2, 3] *investigated a situation similar to the embedding theorem of Sobolev space* W_p^1 *into the space of continuous functions provided* $p > n$, *defined* $\int_X \omega$ *and established the Stokes' theorem* $\int_X \omega = \int_{\partial X} d\omega$.

In this paper we study the case corresponding to the embedding of W_p^1 *into the* L_q *provided* $p \le n$. *In this case we give meaning to the integral of* k*-forms on* k*-dimensional oriented manifold, to be consistent with already existing theory. We set the Stokes' formula* $\int_X \omega = \int_{\partial X} d\omega$ *in the model case of* $X \subset \mathbb{R}^n$, $\dim X = n$. *The existence of the integral in the right hand side is understood in the sense described in this paper.*

Ключевые слова: дифференциальная форма, интеграл дифференциальной формы, теорема Стокса.

Keywords: differential form, integral of differential form, Stokes' theorem.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00662), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (НШ-6613.2010.1.)

1. Интегрирование форм класса $W_{p,q}^k$ по k-мерным многообразиям

1.1. Дифференциальные формы классов L_p и $W_{p,q}^k$

Дифференциальной формой степени k на n-мерном гладком многообразии D называется произвольное локально-интегрируемое сечение над D расслоения $\bigwedge^k T'D$ внешней степени кокасательного расслоения $T'D$. Две формы на D одинаковы, если они совпадают на D почти всюду. Множество всех дифференциальных форм степени k на D обозначим символом $F^k(D)$.

Дифференциальная форма ω степени k на D *обобщенно дифференцируема*, если существует дифференциальная форма θ степени $k+1$ на D, такая, что для каждой гладкой формы φ степени $n-k-1$, носитель которой компактен, не пересекается с краем многообразия D и содержится в ориентируемой области $V \subset D$, выполнено равенство:

$$\int_V \theta \wedge \varphi = (-1)^{k+1} \int_V \omega \wedge d\varphi.$$

Этим равенством форма θ определяется однозначно. Форма θ называется *внешним дифференциалом* $d\omega$ формы ω.

Предположпм теперь, что на D задана гладкая риманова метрика. Эта метрика порождает в каждом слое расслоения $\bigwedge^k T'D$ скалярное произведение. Поэтому для каждой формы ω почти всюду на D определена функция $|\omega(x)|$. Положпм

$$\|\omega\|_p = \left(\int_X |\omega(x)|^p \, d\mu_D\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|\omega\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|\omega(x)| : x \in D\}.$$

Здесь μ_D означает меру на D, порожденную римановой метрикой многообразия D.

Пространство $L_p^k(D)$ состоит из дифференциальных форм ω степени k, для которых $\|\omega\|_p < \infty$, пространство $W^k_{p,q}(D) = \{\omega : \omega \in L^k_p(D), d\omega \in L^{k+1}_q(D)\}$. Пространство $W^k_{p,q}(D)$ является банаховым относительно нормы $\|\omega\|_{p,q} = \|\omega\|_p + \|d\omega\|_q$.

Пусть X и Y — римановы многообразия. Рассмотрим отображение $\varphi : X \to Y$, дифференцируемое почти всюду и, кроме того, обладающее свойством: прообраз при отображении φ каждого множества меры 0 имеет меру 0. Пусть форма $\omega \in F^k(Y)$, $x \in X$, $e_i \in T_x X$, тогда $\varphi(x) \in Y$ и для почти всех x имеем $d\varphi(e_i) \in T_{\varphi(x)}Y$. Определим *перенесенную* форму $\varphi^*\omega \in F^k(X)$ равенством $\varphi^*\omega(x, e_1, \dots, e_k) = \omega(\varphi(x), d\varphi(e_1), \dots, d\varphi(e_k))$, которое выполнено почти всюду на X. При таком определении можно доказать, что $\varphi^*(\omega \wedge \theta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\theta$ для любых форм ω, $\theta \in F^k(Y)$.

Из [3, лемма 1] можно вывести следующее утверждение:

Лемма 1. *Если X, Y — римановы многообразия, X — компактно и $f : X \to Y$ — диффеоморфизм, то для любых $p \geq 1$, $q \geq 1$ отображение f^* переводит $L^k_p(Y)$ в $L^k_p(X)$, $W^k_{p,q}(Y)$ в $W^k_{p,q}(X)$, причем $\|f^*\omega\|_p \leq C_1\|\omega\|_p$, $f^*d\omega = df^*\omega$ и $\|f^*\omega\|_{p,q} \leq C_2\|\omega\|_{p,q}$.*

Лемма 2 [3]. *Если риманово многообразие D полно относительно метрики ρ_D, то гладкие на D формы, имеющие компактный носитель, плотны в $W^k_{p,q}(D)$ при $p < \infty$, $q < \infty$.*

1.2. Интегрирование дифференциальных форм

Пусть X — k-мерное подмногообразие в $(k+m)$-мерном римановом многообразии D. В [2] установлено, что для этой поверхности существуют такие дифференциальные формы τ степени m и φ степени $m-1$, заданные в D, что

$$\int\limits_X \omega = \int\limits_D \omega \wedge \tau + (-1)^k \int\limits_D d\omega \wedge \varphi$$

для гладких ограниченных форм ω на D.

Из этого интегрального представления в работе [3] (другим способом в [2]) получена оценка

$$\left|\int\limits_X \omega\right| \leq C\|\omega\|_{p,q}, \qquad p > m+1,\ q > m,$$

которая позволяет определить $\int\limits_X \omega$ для всех $\omega \in W^k_{p,q}(D)$.

В настоящей работе исследован другой случай, аналогичный теореме вложения W^1_p в пространство L_r, $1 \leq p \leq n$.

Пусть X — k-мерное компактное гладкое ориентируемое многообразие без края, B^m — единичный шар в $\mathbb{R}^m$, $D = X \times B^m$. В этом случае интегральное представление имеет вид:

$$\int\limits_X i^*\omega = \frac{1}{c_m}\int\limits_D \omega \wedge dy +$$

$$+(-1)^k \frac{1}{mc_m}\int\limits_D d\omega \wedge \left(\sum_{j=1}^m y_j(1-|y|^{-m})\right) d_j y, \quad (1)$$

где $d_j y = dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy_j} \wedge \dots \wedge dy_m$.

Лемма 3. *Пусть ω — гладкая k-форма с компактным носителем на D, $q \leq m$, $1 \leq p$, $1 \leq r \leq \frac{mq}{m-q}$. Тогда существует константа C, зависящая только от X, m, k, p, q, такая, что выполнено неравенство*

$$\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_{X\times\{y\}}\omega\right|^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\|\omega\|_{p,q}.$$

Доказательство. Используя интегральное представление (1) и неравенство Минковского для суммы, получаем:

$$\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_{X\times\{z\}}\omega\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{c_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_D \omega \wedge dy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+\frac{1}{mc_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\sum_{j=1}^m\int\limits_D (y_j - z_j) d\omega \wedge d_j y\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+\frac{1}{mc_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_D\sum_{j=1}^m |y-z|^{-m}(y_j - z_j) d\omega \wedge d_j y\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Используя неравенство Гёльдера и Минковского, теорему Фубини, а также оценки на потенциал Рисса (см., например, [5, глава 5, теорема 1]), имеем оценку для третьего слагаемого:

$$\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_D\sum_{j=1}^m |y-z|^{-m}(y_j - z_j) d\omega \wedge d_j y\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \leq$$

$$\leq C_1\left(\int\limits_{B^m}\left(\int\limits_X\int\limits_{B^m} |d\omega||y-z|^{1-m}\,dy\,dx\right)^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \leq$$

$$\leq C_2\int\limits_X\left(\int\limits_{B^m}\left(\int\limits_{B^m} |d\omega||y-z|^{1-m}\,dy\right)^r dz\right)^{\frac{1}{r}} dx \leq$$

$$\leq C_3\int\limits_X\left(\int\limits_{B^m}\left(\int\limits_{B^m} |d\omega||y-z|^{1-m}\,dy\right)^{q^*} dz\right)^{\frac{1}{q^*}} dx \leq$$

$$\leq C_4\int\limits_X\left(\int\limits_{B^m}|d\omega|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} dx \leq C_5\left(\int\limits_D |d\omega|^q\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Первые два слагаемых оцениваются также с помощью неравенства Гёльдера с учетом соотношения $|y_j - z_j| \leq |y - z| \leq 2$:

$$\frac{1}{c_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_D \omega\wedge dy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \le C_6\left(\int\limits_D |\omega|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{mc_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\sum_{j=1}^m\int\limits_D (y_j-z_j)d\omega\wedge d_jy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le C_7\left(\int\limits_D |d\omega|^q\,dz\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Неравенство данной леммы получается выбором подходящей константы C.

Если форма $\omega \in W^k_{p,q}(D)$, то в силу леммы 2 существует такая последовательность гладких k-форм с компактными носителями ω_j, что $||\omega_j-\omega||_{p,q}\to 0$. Лемма 3 дает, что

$$\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_{X\times\{y\}}\omega_j-\omega_i\right|^r dy\right)^{\frac{1}{r}}\to 0.$$

Таким образом, последовательность $\int_{X\times\{y\}}\omega_j$ фундаментальна в $L_r(B^m)$, предел этой последовательности обозначим $\int_{X\times\{y\}}\omega$. Тогда (вообще говоря, для некоторой подпоследовательности ω_{j_k}, но переобозначив, можно считать, что для ω_j), для почти всех $y\in B^m$ выполнено:

$$\int\limits_{X\times\{y\}}\omega=\lim_{j\to\infty}\int\limits_{X\times\{y\}}\omega_j<\infty.$$

Получаем, что для любой формы $\omega\in W^k_{p,q}(D)$ и для почти всех $y\in B^m$ интегралу $\int_{X\times\{y\}}\omega$ можно приписать определенное значение. Определить слои $X\times\{y\}$, для которых определен интеграл $\int_{X\times\{y\}}\omega$, можно с помощью теоремы Лебега о дифференцируемости интеграла (формулировку которой можно найти в [5, глава 1, теорема 1]).

Таким образом, если $\omega\in W^k_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ и $X\subset\mathbb{R}^n$ — k-мерное гладкое многообразие, то приведенные выше рассуждения позволяют определить интеграл $\int_X\omega$ следующим образом

Определение 1. *Интегралом от дифференциальной формы $\omega\in W^k_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ по k-мерному гладкому ориентируемому многообразию X будем называть совпадающие пределы*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B^m(r)|}\int\limits_{B^m(r)}\left(\int\limits_{X\times\{y\}}\omega\right)dy=\lim_{j\to\infty}\int\limits_X\omega_j \quad (2)$$

при условии, что они существуют и конечны. Общее значение пределов в (2) *называется интегралом* $\int_X\omega$.

2. Теорема Стокса для дифференциальных форм класса $W^k_{p,q}$

В этой главе установлена теорема Стокса для модельного случая: $X\subset\mathbb{R}^n$ — n-мерное гладкое компактное ориентируемое многообразие с краем ∂X, совпадающим с границей X, край обладает индуцированной ориентацией (другими словами, гладкая область с гладкой границей). Для такого многообразия X его край ∂X можно представить как поверхность уровня функции $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ класса C^1 такой, что $g^{-1}(0)=\partial X$, $\nabla g(x)\ne 0$ в точках $x\in\partial X$, $g<0$ на $X\setminus\partial X$ и $g>0$ вне X. Градиент $\nabla g(x)$ перпендикулярен касательной плоскости $T_x\partial X$, и направлен вне многообразия X. В силу непрерывности, градиент $\nabla g(x)$ будет также отличным от нуля и в некоторой окрестности многообразия ∂X. Для достаточно близких к нулю t обозначим

$$X_t=\{x:\ g(x)\le t,\ \nabla g(x)\ne 0 \text{ для } g(x)=t\},$$

при этом граница ∂X_t — многообразие размерности $n-1$.

В такой ситуации, если форма $\omega\in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, то интеграл $\int_X d\omega$ понимается в классическом смысле, а интеграл $\int_{\partial X}\omega$, определен формулой (2), которую следует понимать следующим образом:

$$\int\limits_{\partial X}\omega=\lim_{r\to 0}\frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^{r}\left(\int\limits_{\partial X_t}\omega\right)dt=\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\partial X}\omega_j, \quad (3)$$

где ω_j — последовательность гладких k-форм с компактными носителями, которая фигурирует в определении 1.

Используя формулу коплощади можно показать, что $\int_{\partial X_t}\omega$ не зависит от выбора функции g.

Для доказательства теоремы нам также понадобится следующее техническое условие. На ∂X выберем счетный набор координатных окрестностей. Потребуем для любой окрестности U из этого набора выполнение условия:

$$\int\limits_{U\cap\partial X}\omega=\lim_{r\to 0}\frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^{r}\left(\int\limits_{U\cap\partial X_t}\omega\right)dy=\lim_{j\to\infty}\int\limits_{U\cap\partial X}\omega_j. \quad (4)$$

Теорема Стокса. *Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$ — n-мерное гладкое компактное ориентируемое многообразие с краем ∂X, совпадающим с границей X, край обладает индуцированной ориентацией, форма $\omega\in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, и выполнены условия* (3) *и* (4). *Тогда*

$$\int\limits_X\omega=\int\limits_{\partial X}d\omega. \quad (5)$$

Доказательство. Для отрицательных t, достаточно близких к нулю, имеем

$$X_t \subset X,$$

где многообразие X_t определено выше. Рассмотрим форму $\omega \in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$d((g-t)\omega) = dg \wedge \omega + (g-t)d\omega. \qquad (6)$$

Лемма 4. *В условиях теоремы верно равенство*

$$\int\limits_{X_t} d((g-t)\omega) = 0. \qquad (7)$$

Доказательство. Форма $\omega \in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, для нее существует такая последовательность гладких $(n-1)$-форм с компактными носителями ω_j, что $\omega_j \to \omega$ в $W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\theta = (g-t)\omega$ и $\theta_j = (g-t)\omega_j$, возьмем компактно вложенную область $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\left|\int\limits_U d\theta - \int\limits_U d\theta_j\right| \le \int\limits_U |dg \wedge (\omega - \omega_j)| +$$

$$+ \int\limits_U |(g-t)(d\omega - d\omega_j)| \le C\|\omega - \omega_j\|_{p,q} \to 0.$$

Таким образом, $\int\limits_U d\theta_j \to \int\limits_U d\theta$. Остается заметить, что θ_j — гладкая форма и на X_t верна классическая теорема Стокса, то есть $\int\limits_{X_t} d\theta_j = 0$. Отсюда получаем утверждение леммы, положив $U = X_t$.

Из (6) и (7) выводим $\int\limits_X dg \wedge \omega = -\int\limits_X g\, d\omega = -\int\limits_X (g-t)\, d\omega - t\int\limits_X d\omega$ и $\int\limits_{X_t} dg \wedge \omega = -\int\limits_X (g-t)\, d\omega$.

Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$\int\limits_{X\setminus X_t} dg \wedge \omega = -\int\limits_{X\setminus X_t} (g-t)\, d\omega - t\int\limits_X d\omega. \qquad (8)$$

Запишем форму ω в следующем виде: $\omega = \sum\limits_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Тогда

$$dg \wedge \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_i \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Преобразуем левую часть (8) по формуле коплощади (см. [6, п. 3.2.12]), где $\mathcal{H}^n$ — n-мерная мера Хаусдорфа (подробнее см., например, [6, п. 2.10.2])

$$\int\limits_{X\setminus X_t} dg \wedge \omega = \int\limits_{g^{-1}(t,0)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_t^0 ds \int\limits_{g^{-1}(s)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x) \frac{d\mathcal{H}^{n-1}(x)}{|\nabla g(x)|} \qquad (9)$$

($|\nabla g(x)|$ не равен нулю на $X \setminus X_t$ при t, достаточно близком к 0).

Обозначая символом $\eta(x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)) = |\nabla g(x)|^{-1}\Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\Big)$ нормированный градиент, из (8) и (9) получаем:

$$-\frac{1}{t}\int\limits_t^0 ds \int\limits_{g^{-1}(s)} \sum_{i=1}^n \eta_i(x) a_i(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) =$$

$$= \int\limits_X d\omega + \frac{1}{t}\int\limits_{X\setminus X_t} (g-t)\, d\omega.$$

Переходя в последней формуле к пределу при $t \to 0$, имеем:

$$\int\limits_X d\omega = \int\limits_{g^{-1}(0)} \sum_{i=1}^n \eta_i(x) a_i(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x). \qquad (10)$$

Для доказательства теоремы остается проверить, что правая часть (10) совпадает с $\int_{\partial X} \omega$.

Если ω — непрерывная форма, то интеграл от формы ω по многообразию ∂X определяется с помощью разбиения единицы, подчиненного некоторому конечному покрытию многообразия ∂X, и равенству $\int\limits_{U\cap\partial X} \omega = \int\limits_{\varphi(U\cap\partial X)} \psi^*\omega$, для системы координат $(U \cap \partial X, \varphi)$ (см., например, [4]).

Равенство (10) устанавливается с помощью выбора подходящей системы координат на ∂X и свойств дифференциальных форм (подробнее см. [1]).

В случае произвольной формы $\omega \in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ по лемме 2 выберем последовательность $\{\omega_j\}$ гладких форм с компактными носителями, сходящуюся к ω в $W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Используя (4) и лемму 1 получаем:

$$\int\limits_{U\cap\partial X} \omega = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^r \Bigg(\int\limits_{U\cap(\partial X\times\{y\})} \omega\Bigg) dy =$$

$$= \lim_{r\to 0}\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^r \Bigg(\int\limits_{U\cap(\partial X\times\{y\})} \omega_j\Bigg) dy =$$

$$= \lim_{r\to 0}\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^r \Bigg(\int\limits_{\varphi(U\cap(\partial X\times\{y\}))} \psi^*\omega_j\Bigg) dy =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^r \Bigg(\int\limits_{\varphi(U\cap(\partial X\times\{y\}))} \psi^*\omega\Bigg) dy$$

$$= \int\limits_{\varphi(U\cap\partial X)} \psi^*\omega.$$

Таким образом, выбрав на ∂X конечное покрытие и разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, получаем (5). $\square$

Литература

[1] Водопьянов, С. К. *Интегрирование по Лебегу: учебное пособие* / С. К. Водопьянов. – Новосибирск: НГУ, 2011. – 144 с.

[2] Гольдштейн, В. М. *Дифференциальные формы на липшицевом многообразии* / В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов // Сиб. мат. жур. – 1982. – Т. 23, 2. – С. 16 – 30.

[3] Гольдштейн, В. М. *Интегральное представление интеграла дифференциальной формы* / В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов // Функциональный анализ и математическая физика.– Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. – С. 53 – 87.

[4] Спивак, М. *Математический анализ на многообразиях* / М. Спивак. – М.: Мир, 1968. – 164 с.

[5] Стейн, И. М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* / И. М. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

[6] Федерер, Г. *Геометрическая теория меры* / Г. Федерер. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 760 с.

УДК 517.988.2, 514.763.2

ИЗОМЕТРИИ НА ГРУППЕ ПОВОРОТОВ - СДВИГОВ

Д. В. Исангулова

ISOMETRIES ON ROTO - TRANSLATION GROUP

D. V. Isangulova

Описана группа C^2-гладких изометрий на контактном субримановом многообразии — группе поворотов-сдвигов. Найдены условия, при которых векторное поле порождает локальную однопараметрическую группу контактных или локально билипшицевых преобразований группы поворотов-сдвигов.

We describe the group of C^2-smooth isometries on contact sub-Riemannian manifold, precisely on roto-translation group. We find the conditions providing for a vector field to generate the local one-parameter group of contact or local biLipschitz transformations of roto-translation group.

Ключевые слова: группа поворотов-сдвигов, изометрия, однопараметрическая группа преобразований.

Keywords: roto-translation group, isometry, one-parameter group of transformations.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11–01–00819) и Совета по грантам Президента РФ по поддержке Ведущих научных школ (НШ–6613.2010.1).

1. Введение

В настоящей работе мы исследуем изометрические и билипшицевые отображения группы поворотов-сдвигов $\mathcal{RT}$ (roto-translation group). Группа поворотов-сдвигов — это трехмерное топологическое многообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^2 \times S^1$, с координатами (x, y, θ) и умножением

$$(x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) = \\ = (x_0 + x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0, y_0 + x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0, \\ \theta_0 + \theta).$$

Векторные поля

$$A = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$C = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

являются левоинвариантными. При этом выполняются следующие коммутационные условия:

$$[A, B] = -C, \quad [C, B] = A, \quad [A, C] = 0.$$

Заметим, что алгебра Ли группы $\mathcal{RT}$ не является нильпотентной.

На группе поворотов-сдвигов можно ввести субриманову структуру, то есть выделить горизонтальное подрасслоение $H = \operatorname{span}\{A, B\}$ в касательном расслоении, которое своими коммутаторами порождает все касательное расслоение и определяет субримановую метрику (метрику Карно — Каратеодори). Метрика Карно — Каратеодори d задается как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор принадлежит H почти всюду). Для измерения длин горизонтальных кривых введем такое внутреннее произведение на H, при котором векторные поля A и B ортонормированы.

Отметим, что локально геометрия группы поворотов-сдвигов близка к группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$, поскольку $\mathbb{H}^1$ является касательным конусом к $\mathcal{RT}$ в смысле Громова [3]. Подробное описание группы $\mathcal{RT}$ с явным видом геодезических можно найти в книге [1].

Группа поворотов-сдвигов возникает в вопросах моделирования неголономного движения и оптимального контроля. Рассмотрим простейший пример средства передвижения — одноколесный велосипед. Для моделирования его движения в плоскости введем стандартные координаты на плоскости: (x, y), и переменную θ, описывающую угол отклонения колеса от оси x. Пространство $\mathbb{R}^2 \times S^1$ описывает все возможные положения велосипеда. При прямолинейном движении без изменения угла, путь можно задать как $(x + t\cos\theta, y + t\sin\theta)$. Беря производную по переменной t, получаем одно из возможных направлений движения: $A = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$. Поскольку велосипедист может поворачивать колесо, стоя на месте, второе направление движения — это просто $B = \frac{\partial}{\partial\theta}$. Таким образом, мы получаем группу $\mathcal{RT}$ в качестве модели движения одноколесного велосипеда. Отметим, что мы не можем начинать движения в направлении векторного поля $C = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$, поскольку оно ортогонально оси колеса. Однако, комбинируя движение вперед и повороты, велосипедист может достичь любой точки на плоскости с любым наперед заданным углом θ. Таким образом, нахождение геодезических в метрике Карно — Каратеодори d эквивалентно задаче нахождения оптимального пути.

Геометрия группы поворотов-сдвигов возникает также в задаче визуализации при моделировании восприятия человеческим мозгом плоского черно-белого изображения (см. работы А. Сарти и Дж. Читти [2], Р. К. Хладки и С. Д. Полса [4]). В построенной модели (x, y) — координаты точки на плоскости, а θ — направление градиента изменения цвета. То есть предполагается, что человек видит не сам цвет, а изменение цвета, что находится в полном соответствии с физиологическими исследованиями (см., например, Ж. Петито [6]). Построен алгоритм [4] восстановления закрытой части изображения с использованием минимальных поверхностей в субримановой метрике.

Настоящая работа посвящена исследованию изометрий, контактных и билипшицевых отображений на группе $\mathcal{RT}$. Напомним, что гомеоморфизм $F\colon \Omega \to \Omega'$ областей $\Omega, \Omega' \subset \mathcal{RT}$ называется *изометрией*, если он сохраняет расстояние: $d(F(\xi), F(\eta)) = d(\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in \Omega$. В следующей теореме приведено описание группы C^2-гладких изометрий.

Теорема 1. *Всякая C^2-гладкая изометрия на группе $\mathcal{RT}$ есть композиция следующих отображений:*

$$l_{(x_0,y_0,\theta_0)}(x, y, \theta) = (x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta),$$

$$\left.\begin{array}{l}\iota(x, y, \theta) = (-x, y, -\theta)\\ \sigma(x, y, \theta) = (-x, -y, \theta)\end{array}\right. \quad \textit{— отражения.}$$

Заметим, что, в отличие от евклидового пространства или группы Гейзенберга, на группе $\mathcal{RT}$ не определены аналоги поворотов.

Пусть Ω — область в $\mathcal{RT}$. C^1-гладкое отображение $F\colon \Omega \to \mathcal{RT}$ называется *контактным*, если оно сохраняет горизонтальное пространство: $AF(\xi), BF(\xi) \in H_{F(\xi)}$ для всех $\xi \in \Omega$. Известно (см., например, [7]), что гладкие липшицевые отображения являются контактными. Приведенное понятие контактности совпадает с классическим, поскольку на $\mathcal{RT}$ определена контактная левоинвариантная форма $\omega = -\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy$. При этом контактная структура согласована с субримановой: $\ker\omega = H$.

Говорят, что векторное поле v *генерирует поток* отображений F_s, если $\frac{d}{ds}F_s = v \circ F_s$, $F_0 = id$. Поле v называется также *инфинитезимальным генератором* потока F_s, причем F_s будет (локальной) однопараметрической группой преобразований. В теореме 2 приведены условия на v, при которых генерируемый поток является группой контактных преобразований.

Теорема 2. *Векторное поле вида*

$$v = -Bq\,A + Aq\,B + q\,C$$

(здесь q — произвольная гладкая вещественнозначная функция) генерирует локальную однопараметрическую группу контактных преобразований. Обратно, всякое гладкое векторное поле v, которое генерирует локальную однопараметрическую группу контактных преобразований, имеет такой вид с $q = \langle\omega, v\rangle$.

Теорема 2 показывает, в частности, что пространство контактных отображений на группе $\mathcal{RT}$ бесконечномерно.

Далее мы исследуем следующий вопрос: когда контактный поток F_s будет потоком локально билипшицевых отображений? Напомним, что отображение $F\colon \Omega \to \mathcal{RT}$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ называется *локально L-билипшицевым*, $L \geqslant 1$, если для всякой точки $\xi \in \Omega$ определена окрестность $U \Subset \Omega$, такая, что $\frac{1}{L}d(\zeta, \eta) \leqslant d(F(\zeta), F(\eta)) \leqslant Ld(\zeta, \eta)$ для всех $\zeta, \eta \in U$. Ответ дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть q — гладкая функция и векторное поле $v = -Bq\,A + Aq\,B + q\,C$ порождает локальную однопараметрическую группу преобразований F_s. Если*

$$k = \sup\sqrt{(ABq)^2 + (BAq)^2 + \frac{1}{2}(A^2q - B^2q - q)^2} < +\infty,$$

то F_s — локально L_s-билипшицево с

$$\frac{1}{2}\Big(L_s^2+\frac{1}{L_s^2}\Big)\leqslant e^{2k\,|s|}.$$

При доказательстве теорем 2 и 3 мы будем опираться на работу [5], где доказаны сходные факты для контактных и квазиконформных потоков группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1$.

Несколько слов о структуре работы. Во втором параграфе доказывается теорема 1. Третий параграф посвящен доказательству теорем 2 и 3. Также в нем приведены два примера инфинитезимальных генераторов изометрических потоков.

2. Описание C^2-гладких изометрий

Нетрудно проверить, что левые сдвиги и отражения являются изометриями, причем

$$\iota^2=\sigma^2=id,\quad \iota\circ\sigma=\sigma\circ\iota,$$

$$\iota\circ l_{(x_0,y_0,\theta_0)}=l_{\iota(x_0,y_0,\theta_0)}\circ\iota,$$

$$\sigma\circ l_{(x_0,y_0,\theta_0)}=l_{\sigma(x_0,y_0,\theta_0)}\circ\sigma.$$

Покажем, что они порождают всю группу C^2-гладких изометрий на $\mathcal{RT}$.

Пусть C^2-гладкое отображение

$$F\colon(x,y,\theta)\mapsto(f,g,\varphi)$$

является изометрией. Тогда F будет дифференцируемым в субримановом смысле (hc-дифференцируемым, см., например, [7]) и, в частности, F будет контактным, то есть выполняется

$$AF(\xi)=a_{11}A(\zeta)+a_{21}B(\zeta),$$

$$BF(\xi)=a_{12}A(\zeta)+a_{22}B(\zeta),$$

где $\xi=(x,y,\theta)$, $\zeta=F(\xi)$, или, эквивалентно:

$$\begin{cases}Af=a_{11}\cos\varphi,\\ Ag=a_{11}\sin\varphi,\\ A\varphi=a_{21},\end{cases}\qquad \begin{cases}Bf=a_{12}\cos\varphi,\\ Bg=a_{12}\sin\varphi,\\ B\varphi=a_{22}.\end{cases}$$

Отсюда получаем так называемые *условия контактности*:

$$Af\sin\varphi=Ag\cos\varphi,\ \ Bf\sin\varphi=Bg\cos\varphi. \qquad (1)$$

Матрица $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ с элементами

$$a_{11}=\frac{Af}{\cos\varphi}=\frac{Ag}{\sin\varphi},\quad a_{21}=A\varphi,$$

$$a_{12}=\frac{Bf}{\cos\varphi}=\frac{Bg}{\sin\varphi},\quad a_{22}=B\varphi \qquad (2)$$

называется *горизонтальным дифференциалом* и обозначается символом D_hF. Применяя левые сдвиги, если требуется, всюду далее будем считать, что $\cos\varphi\neq0$ и $\sin\varphi\neq0$.

Если F — изометрия, то как и в евклидовом случае D_hF должен быть ортогональной матрицей. Очевидно, что

$$|a_{11}|=|a_{22}|,\quad |a_{12}|=|a_{21}|,$$

$$a_{11}^2+a_{12}^2=a_{21}^2+a_{22}^2=1.$$

Рассмотрим последнее равенство: $a_{21}^2+a_{22}^2=$ $=(A\varphi)^2+\ (B\varphi)^2=1$. Введем новую переменную функцию $\alpha:(x,y,\theta)\mapsto(-\pi,\pi]$, такую, что

$$A\varphi=-\cos\alpha,\qquad B\varphi=\sin\alpha.$$

Далее рассмотрим два возможных случая: $\det D_hF>0$ и $\det D_hF<0$.

1) $\det D_hF>0$. Тогда $a_{11}=a_{22}$, $a_{21}=-a_{12}$. Покажем, что все производные от f и g выражаются через φ и α. Действительно:

$$\begin{cases}a_{11}=a_{22},\\ a_{21}=-a_{12},\end{cases}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{Af}{\cos\varphi}=\dfrac{Ag}{\sin\varphi}=B\varphi,\\[2mm] \dfrac{Bf}{\cos\varphi}=\dfrac{Bg}{\sin\varphi}=-A\varphi,\end{cases}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}Af=\cos\varphi\sin\alpha,\\ Bf=\cos\varphi\cos\alpha,\\ Ag=\sin\varphi\sin\alpha,\\ Bg=\sin\varphi\cos\alpha.\end{cases}$$

Соответственно,

$$Cf=[B,A]f=\cos\varphi(B\alpha\cos\alpha+A\alpha\sin\alpha)-\sin\varphi$$

и

$$Cg=[B,A]g=\cos\varphi+\sin\varphi(B\alpha\cos\alpha+A\alpha\sin\alpha).$$

Для вычисления функции α мы воспользуемся соотношениями на коммутаторы: $[A,C]=0$ и $[B,C]=A$. Имеем:

$$\begin{aligned}
0 =&[A,C]f = ACf - CAf = \sin\varphi\, B\alpha + \\
&+\cos\varphi(\cos\alpha - A\alpha B\alpha\sin\alpha + 2AB\alpha\cos\alpha - BA\alpha\cos\alpha + (A\alpha)^2\cos\alpha + A^2\alpha\sin\alpha), \qquad (3)\\
0 =&[B,C]f - Af = BCf - CBf - Af = \\
&=\sin\varphi\, A\alpha + \cos\varphi(-A\alpha B\alpha\cos\alpha + AB\alpha\sin\alpha - 2BA\alpha\sin\alpha + (B\alpha)^2\sin\alpha - B^2\alpha\cos\alpha), \qquad (4)\\
0 =&[A,C]g = ACg - CAg = -\cos\varphi\, B\alpha - \\
&-\sin\varphi(\cos\alpha - A\alpha B\alpha\sin\alpha + 2AB\alpha\cos\alpha - BA\alpha\cos\alpha + (A\alpha)^2\cos\alpha + A^2\alpha\sin\alpha), \qquad (5)\\
0 =&[B,C]g - Ag = BCg - CBg - Ag = \\
&=\cos\varphi\, A\alpha - \sin\varphi(-A\alpha B\alpha\cos\alpha + AB\alpha\sin\alpha - 2BA\alpha\sin\alpha + (B\alpha)^2\sin\alpha - B^2\alpha\cos\alpha). \qquad (6)
\end{aligned}$$

Сравнивая (3) с (5), и (4) с (6), получаем, что

$$\begin{aligned}
&B\alpha = 0,\\
&\cos\alpha - A\alpha B\alpha\sin\alpha + 2AB\alpha\cos\alpha - BA\alpha\cos\alpha + (A\alpha)^2\cos\alpha + A^2\alpha\sin\alpha = 0,\\
&A\alpha = 0,\\
&-A\alpha B\alpha\cos\alpha + AB\alpha\sin\alpha - 2BA\alpha\sin\alpha + (B\alpha)^2\sin\alpha - B^2\alpha\cos\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Откуда очевидно следует, что

$$\begin{aligned}
&A\alpha = B\alpha = 0, \quad \cos\alpha = 0 \quad \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow \quad \alpha \equiv -\frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Если $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned}
F(x,y,\theta) = (&x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0 + x_0,\\
&x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0 + y_0, \theta + \theta_0) =\\
&= l_{(x_0,y_0,\theta_0)}(x,y,\theta).
\end{aligned}$$

Если $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned}
F(x,y,\theta) = (&-x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0 + x_0,\\
&-x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0 + y_0, \theta_0 - \theta) =\\
&= l_{(x_0,y_0,\theta_0)} \circ \iota(x,y,\theta).
\end{aligned}$$

2) $\det D_h F < 0$. Имеем $a_{11} = -a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$. Как и в предыдущем случае, производные от f и g можно выписать через α и φ:

$$\begin{aligned}
&Af = -\cos\varphi\sin\alpha, \quad Bf = -\cos\varphi\cos\alpha,\\
&Cf = \sin\varphi - \cos\varphi(B\alpha\cos\alpha + A\alpha\sin\alpha);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Ag = -\sin\varphi\sin\alpha, \quad Bg = -\sin\varphi\cos\alpha,\\
&Cg = -\cos\varphi - \sin\varphi(B\alpha\cos\alpha + A\alpha\sin\alpha).
\end{aligned}$$

Выписывая коммутационные соотношения $[A,C] = 0$ и $A = [C,B]$ для функций f и g, мы получим в точности те же самые уравнения (3)–(6), что и в предыдущем случае (с точностью до умножения на -1). Соответственно, функция α может быть равна только $-\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2}$.

Если $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned}
F(x,y,\theta) = (&-x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 + x_0,\\
&-x\sin\theta_0 - y\cos\theta_0 + y_0, \theta + \theta_0) =\\
&= l_{(x_0,y_0,\theta_0)} \circ \sigma(x,y,\theta).
\end{aligned}$$

Если $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned}
F(x,y,\theta) = (&x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 + x_0,\\
&x\sin\theta_0 - y\cos\theta_0 + y_0, \theta_0 - \theta) =\\
&= l_{(x_0,y_0,\theta_0)} \circ \iota \circ \sigma(x,y,\theta).
\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

3. Однопараметрические группы преобразований

3.1. Генератор контактного потока

В данном параграфе мы приведем доказательство теоремы 2.

Рассмотрим векторное поле

$$v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial\theta} = pA + cB + qC,$$

где

$$p = a\cos\theta + b\sin\theta, \quad q = -a\sin\theta + b\cos\theta,$$

и

$$a = p\cos\theta - q\sin\theta, \quad b = p\sin\theta + q\cos\theta.$$

Здесь мы воспользовались следующими простыми соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\, A - \sin\theta\, C, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\, A + \cos\theta\, C,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = B.$$

Шаг 1. Пусть a, b, c, p, q — гладкие функции и поле v задает однопараметрическую группу контактных отображений $F_s = (f_s, g_s, \theta_s)$ в виде решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{ds}F_s = v \circ F_s, \quad F_0 = id.$$

Поскольку F_s — контактные отображения, то выполнены условия (1). Продифференцируем их по переменной s и перейдем к пределу при $s \to 0$:

$$0 = \frac{d}{ds}(\sin\varphi_s Af_s - \cos\varphi_s Ag_s) = \cos\varphi_s \frac{d\varphi_s}{ds} Af_s + \sin\varphi_s A\frac{df_s}{ds} + \sin\varphi_s \frac{d\varphi_s}{ds} Ag_s - \cos\varphi_s A\frac{dg_s}{ds} \to$$
$$\underset{s\to 0}{\longrightarrow} \cos\theta cAx + \sin\theta Aa + \sin\theta cAy - \cos\theta Ab = c + \sin\theta Aa - \cos\theta Ab,$$

и

$$0 = \frac{d}{ds}(\sin\varphi_s Bf_s - \cos\varphi_s Bg_s) = \cos\varphi_s \frac{d\varphi_s}{ds} Bf_s + \sin\varphi_s B\frac{df_s}{ds} + \sin\varphi_s \frac{d\varphi_s}{ds} Bg_s - \cos\varphi_s B\frac{dg_s}{ds} \to$$
$$\underset{s\to 0}{\longrightarrow} \cos\theta cBx + \sin\theta Ba + \sin\theta cBy - \cos\theta Bb = \sin\theta Ba - \cos\theta Bb.$$

Отсюда выводим 2 соотношения:

$$c + \sin\theta Aa - \cos\theta Ab = 0$$

и

$$\sin\theta Ba - \cos\theta Bb = 0.$$

Следовательно,

$$Aq = A(-a\sin\theta + b\cos\theta) = \\ = -\sin\theta Aa + \cos\theta Ab = c$$

и

$$Bq = B(-a\sin\theta + b\cos\theta) = \\ = -\sin\theta Ba - a\cos\theta + \cos\theta Bb - b\sin\theta = -p.$$

Окончательно получаем, что v является инфинитезимальным генератором контактного потока, если

$$v = -Bq\,A + Aq\,B + q\,C,$$

где

$$\langle\omega, v\rangle = -a\sin\theta + b\cos\theta = \\ = -\sin\theta(p\cos\theta - q\sin\theta) + \cos\theta(p\sin\theta + q\cos\theta) = q.$$

Теорема 2 доказана в одну сторону.

Шаг 2. Обратно, пусть q — гладкая функция и векторное поле $v = -Bq\,A + Aq\,B + q\,C$ порождает локальную однопараметрическую группу преобразований $F_s = (f_s, g_s, \theta_s)$. Нам надо показать, что F_s удовлетворяют условиям контактности (1). Пусть $\xi = (x, y, \theta) \in \mathcal{RT}$, $F(\xi) = \zeta = (x_1, y_1, \theta_1) \in \mathcal{RT}$. Имеем:

$$\frac{d}{ds}(\sin\varphi_s Af_s - \cos\varphi_s Ag_s) = \cos\varphi_s c(\zeta) Af_s + \sin\varphi_s A(a\circ F_s) + \sin\varphi_s c(\zeta) Ag_s - \cos\varphi_s A(b\circ F_s) =$$
$$= \cos\varphi_s Aq(\zeta) Af_s + \sin\varphi_s \Big(\frac{\partial a}{\partial x_1} Af_s + \frac{\partial a}{\partial y_1} Ag_s + \frac{\partial a}{\partial \theta_1} A\varphi_s\Big) + \sin\varphi_s Aq(\zeta) Ag_s -$$
$$- \cos\varphi_s \Big(\frac{\partial b}{\partial x_1} Af_s + \frac{\partial b}{\partial y_1} Ag_s + \frac{\partial b}{\partial \theta_1} A\varphi_s\Big).$$

Выписывая функции a, b через функции p, q, а производные по x_1, y_1 через производные вдоль A, C, после несложных вычислений получаем, что

$$\frac{d}{ds}(\sin\varphi_s Af_s - \cos\varphi_s Ag_s) = \\ = Cq(\zeta)(\sin\varphi_s Af_s - \cos\varphi_s Ag_s).$$

Следовательно,

$$\sin\varphi_s Af_s - \cos\varphi_s Ag_s = \mathrm{const}\cdot e^{\int Cq(\zeta)\,ds}.$$

Подставляя начальные данные $(\sin\varphi_s Af_s - -\cos\varphi_s Ag_s)\big|_{s=0} = 0$ (так как $F_0 = \mathrm{id}$ является контактным), выводим, что $\sin\varphi_s Af_s - \cos\varphi_s Ag_s = 0$.

Аналогично проверяем, что

$$\frac{d}{ds}(\sin\varphi_s Bf_s - \cos\varphi_s Bg_s) = \\ = Cq(\zeta)(\sin\varphi_s Bf_s - \cos\varphi_s Bg_s),$$

$$(\sin\varphi_s Bf_s - \cos\varphi_s Bg_s)\big|_{s=0} = 0$$

и, следовательно, $\sin\varphi_s Bf_s - \cos\varphi_s Bg_s = 0$. Таким образом, F_s удовлетворяет системе (1) и является контактным.

Теорема 2 доказана.

3.2. Поток локально билипшицевых преобразований

Данный параграф посвящен доказательству теоремы 3. Прежде чем переходить к доказательству, приведем вспомогательную лемму.

Лемма. *Пусть q — гладкая функция и векторное поле $v = -Bq\,A + Aq\,B + q\,C$ порождает локальную однопараметрическую группу контактных преобразований F_s. Тогда*

$$\frac{d}{ds} D_h F_s = V \cdot D_h F_s,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} -ABq & -B^2q - q \\ A^2q & BAq \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Положим $F = (f, g, \varphi)$ (мы будем опускать нижний индекс s), $D_hF = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где элементы матрицы D_hF определяются соотношениями (2): $\xi = (x, y, \theta) \in \mathcal{RT}$, $F(\xi) = \zeta = (x_1, y_1, \theta_1) \in \mathcal{RT}$.

Проверим, что для любой C^1-гладкой функции h выполнено правило дифференцирования композиции:

$$\begin{aligned} A(h\circ F(\xi)) =& \frac{\partial h}{\partial x_1}(\zeta)Af(\xi) + \frac{\partial h}{\partial y_1}(\zeta)Ag(\xi) + \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\zeta)A\varphi(\xi) = \big(Ah(\zeta)\cos\varphi - Ch(\zeta)\sin\varphi\big)Af + \\ &+ \big(Ah(\zeta)\sin\varphi + Ch(\zeta)\cos\varphi\big)Af\operatorname{tg}\varphi + Bh\,A\varphi = Ah\,a_{11} + Bh\,a_{21}, \\ B(h\circ F(\xi)) =& \frac{\partial h}{\partial x_1}(\zeta)Bf(\xi) + \frac{\partial h}{\partial y_1}(\zeta)Bg(\xi) + \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\zeta)B\varphi(\xi) = \big(Ah(\zeta)\cos\varphi - Ch(\zeta)\sin\varphi\big)Bf + \\ &+ \big(Ah(\zeta)\sin\varphi + Ch(\zeta)\cos\varphi\big)Bf\operatorname{tg}\varphi + Bh\,B\varphi = Ah\,a_{12} + Bh\,a_{22}. \end{aligned}$$

Выпишем элементы матрицы $\frac{d}{ds}D_hF_s$ покомпонентно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}a_{11} &= \frac{d}{ds}\Big(\frac{Af}{\cos\varphi}\Big) = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{d}{ds}(Af) + \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds}Af = \frac{1}{\cos\varphi}A\Big(\frac{df}{ds}\Big) + \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}c(\zeta)\,Af = \\ &= \frac{1}{\cos\varphi}A(a\circ F) + \operatorname{tg}\varphi\, c(\zeta)\,a_{11} = \frac{1}{\cos\varphi}(Aa\,a_{11} + Ba\,a_{21}) + \operatorname{tg}\varphi\, c(\zeta)a_{11} = v_{11}a_{11} + v_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Вычислим v_{11} и v_{12}. Для этого вспомним, что $a(\xi) = p(\xi)\cos\theta - q(\xi)\sin\theta$, $c = Aq$ и $p = -Bq$. Следовательно,

$$Aa = Ap\cos\theta - Aq\sin\theta,$$

$$\begin{aligned} Ba = Bp\cos\theta - p\sin\theta - Bq\sin\theta - q\cos\theta = \\ = (-B^2q - q)\cos\theta. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} v_{11} =& \frac{1}{\cos\varphi}(Ap(\zeta)\cos\varphi - Aq(\zeta)\sin\varphi) + \\ &+ \operatorname{tg}\varphi\, Aq(\zeta) = -ABq(\zeta), \\ v_{12} =& \frac{1}{\cos\varphi}Ba(\zeta) = -B^2q(\zeta) - q(\zeta). \end{aligned}$$

Аналогично выводим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}a_{12} &= \frac{d}{ds}\Big(\frac{Bf}{\cos\varphi}\Big) = \\ &= \frac{1}{\cos\varphi}\frac{d}{ds}(Bf) + \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds}Bf = \\ &= \frac{1}{\cos\varphi}B\Big(\frac{df}{ds}\Big) + \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}c(\zeta)\,Bf = \\ &= \frac{1}{\cos\varphi}B(a\circ F) + \operatorname{tg}\varphi\, c(\zeta)\,a_{12} = \\ &= \frac{1}{\cos\varphi}(Aa\,a_{12} + Ba\,a_{22}) + \operatorname{tg}\varphi\, c(\zeta)a_{12} = \\ &= v_{11}a_{12} + v_{12}a_{22}. \end{aligned}$$

Осталось найти производные по s от a_{21} и a_{22}:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}a_{21} &= \frac{d}{ds}(A\varphi) = A\Big(\frac{d\varphi}{ds}\Big) = \\ &= A(c\circ F) = Ac(\zeta)\,a_{11} + Bc(\zeta)\,a_{21} = \\ &= v_{21}a_{11} + v_{22}a_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}a_{22} &= \frac{d}{ds}(B\varphi) = B\Big(\frac{d\varphi}{ds}\Big) = \\ &= B(c\circ F) = Ac(\zeta)\,a_{12} + Bc(\zeta)\,a_{22} = \\ &= v_{21}a_{12} + v_{22}a_{22}, \end{aligned}$$

где $v_{11} = Ac(\zeta) = A^2q(\zeta)$, $v_{22} = Bc(\zeta) = BAq(\zeta)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть поток $v = -Bq\,A + Aq\,B + q\,C$ порождает локальную однопараметрическую группу контактных преобразований F_s. Обозначим $M = D_hF_s$. В силу леммы 1 имеем $\frac{d}{ds}M = V\cdot M$. Отсюда:

$$\frac{d}{ds}\big(M^tM\big) = M^t(V^t + V)M = 2M^tSM,$$

где

$$S = \frac{V^t + V}{2} = \begin{pmatrix} -ABq & \frac{A^2q - B^2q - q}{2} \\ \frac{A^2q - B^2q - q}{2} & BAq \end{pmatrix}.$$

Получаем дифференциальное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\|M\|^2 = 2\operatorname{tr}\big(M^t\,S\,M\big) = 2\operatorname{tr}\big(S\,M\,M^t\big) \leqslant \\ \leqslant 2\|S\|\,\|M\|^2 \leqslant 2k\|M\|^2. \end{aligned}$$

Здесь $\|M\|^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 = \operatorname{tr}(M^tM)$, а $\|S\| = \sqrt{(ABq)^2 + (BAq)^2 + \frac{1}{2}(A^2q - B^2q - q)^2} \leqslant k < +\infty$ по условию теоремы.

Следовательно, $\|M\|^2$ можно оценить сверху:

$$\|M\|^2 \leqslant e^{2k|s|}.$$

Выведем из этой оценки, что F_s локально билипшицево. Обозначим через $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0$ собственные числа матрицы M^tM. Тогда $\frac{1}{\lambda_2} > \frac{1}{\lambda_1} > 0$

— собственные числа матрицы $(M^{-1})^t M^{-1}$. Для того чтобы отображение F_s было локально L-билипшицевым, необходима ограниченность величины $L^2 = \sup\max\{\lambda_1, \frac{1}{\lambda_2}\}$ на всей области определения.

Если $\lambda_1 \geqslant \frac{1}{\lambda_2}$, то

$$L^2 + \frac{1}{L^2} \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 2e^{2k|s|}.$$

Если $\lambda_1 < \frac{1}{\lambda_2}$, то для функции F_{-s} будет выполнено

$$L^2 + \frac{1}{L^2} \leqslant \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \|D_h F_{-s}\|^2 = \|M^{-1}\|^2 \leqslant 2e^{2k|s|}.$$

3.3. Примеры изометрических потоков

1) Рассмотрим $q = -x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta$. Тогда $Aq = 0$, $Bq = -x_0\cos\theta - y_0 \sin\theta$ и

$$v = (x_0\cos\theta + y_0\sin\theta)A + \\ + (-x_0\sin\theta + y_0\cos\theta)C = x_0\frac{\partial}{\partial x} + y_0\frac{\partial}{\partial y}.$$

Поле v порождает однопараметрическую группу левых сдвигов по переменным x, y:

$$F_s(x,y,z) = \\ = l_{(sx_0, sy_0, 0)}(x,y,z) = (sx_0 + x, sy_0 + y, \theta).$$

2) Пусть $q = \theta_0 x\cos\theta + \theta_0 y \sin\theta$. В этом случае $Aq = \theta_0$, $Bq = -\theta_0 x\sin\theta + \theta_0 y\cos\theta$ и векторное поле

$$v = (\theta_0 x\sin\theta - \theta_0 y\cos\theta)A + \theta_0 B + \\ + (\theta_0 x\cos\theta + \theta_0 y\sin\theta)C = \\ = -\theta_0 y\frac{\partial}{\partial x} + \theta_0 x\frac{\partial}{\partial y} + \theta_0\frac{\partial}{\partial\theta}$$

порождает однопараметрическую группу левых сдвигов по переменной θ:

$$F_s(x,y,z) = l_{(0,0,s\theta_0)}(x,y,z) = \\ = (\cos(s\theta_0)x - \sin(s\theta_0)y, \\ \sin(s\theta_0)x + \cos(s\theta_0)y, s\theta_0 + \theta).$$

Литература

[1] Capogna, L. *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem* / L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, J. T. Tyson // Basel; Boston;Berlin;Birkhäuser, 2007.

[2] Citti, G. *A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space* / G. Citti, A. Sarti // J. Math. Imaging Vision. – 2006. – Vol. 24, no. 3. – P. 307 – 326.

[3] Gromov, M. *Carnot — Carathéodory spaces seen from within* / M. Gromov// In: Sub-Reimannian Geometry. — Basel: Birkhäuser, 1996. — P. 79 – 323.

[4] Hladky, R. K. *Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model* / R. K. Hladky, S. D. Pauls // J. Math. Imaging Vision. — 2010. — Vol. 36, no. 1. — P. 1 – 27.

[5] Korányi, A. *Quasiconformal mappings on the Heisenberg group* / A. Korányi, H. M. Reimann // Invent. math. – 1985. – Vol. 80. – P. 309 – 338.

[6] Petitot, J. *The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure* / J. Petitot // Journal of Physiology. – Paris.: March, 2003. – Vol. 97, no. 2. – P. 265 – 309.

[7] Vodopyanov, S. K. *Geometry of Carnot – Carathéodory spaces and differentiability of mappings* / S. K. Vodopyanov, V. I. Burenkov (ed.) et al. // The interaction of analysis and geometry. International school-conference on analysis and geometry. Novosibirsk, Russia, August 23 – September 3, 2004. — Providence, RI: American Mathematical Society. Contemporary Mathematics. — 2007. – Vol. 424. – P. 247 – 301.

УДК 517.987+519.214

НЕРАВЕНСТВА, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОЦЕНИВАТЬ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ

А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев

INEQUALITIES FOR ESTIMATING CONVERGENCE RATES IN ERGODIC THEOREMS

A. G. Kachurovskii, V. V. Sedalishchev

Получены неравенства на скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана, вытекающие из эквивалентности друг другу степенной скорости сходимости в этой теореме, и степенной же (с тем же показателем степени) особенности в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы. Эта же скорость сходимости оценена также через корреляционные коэффициенты. Отдельно рассмотрены важные для возможных приложений частные случаи степенной и экспоненциальной скорости убывания корреляционных коэффициентов. Получены оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа по известной скорости сходимости в теореме фон Неймана. Все результаты работы имеют точные аналоги для стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Mean ergodic theorem convergence rate inequalities are obtained. The existence of such inequalities is implied by the equivalence between power-function convergence rate in this theorem and the presence of the power singularity (with the same exponent) of averaging function spectral measure at zero which is related with corresponding dynamical system. The same convergence rate was also estimated via correlation coefficients. Important for possible applications particular cases when correlation coefficients decay rate is power and exponential were considered apart. Estimates for pointwise ergodic theorem convergence rate were obtained for the case when mean ergodic theorem convergence rate is known. All results of the paper have their exact analogues for stationary in the wide sense stochastic processes.

Ключевые слова: эргодическая теорема фон Неймана, эргодическая теорема Биркгофа, скорости сходимости эргодических средних, спектральные меры динамической системы, стационарные в широком смысле стохастические процессы.

Keywords: mean ergodic theorem, pointwise ergodic theorem, ergodic averages convergence rate, spectral measures of dynamical system, stationary in the wide sense stochastic processes.

Работа поддержана программой государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-8508-2010.1).

1. Введение

Пусть T — эндоморфизм пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ с вероятностной мерой. Напомним, что эндоморфизмом пространства Ω называется отображение $T : \Omega \to \Omega$, такое, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$, и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. Автоморфизмом пространства Ω называют его п.в. взаимооднозначный эндоморфизм.

Для $f \in L_2(\Omega)$ введём эргодические средние

$$A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

Эргодические теоремы фон Неймана и Биркгофа гарантируют существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} A_n f = f^*$, первая теорема в смысле $L_2(\Omega)$, вторая — почти всюду в Ω. Для измерения скорости сходимости п.в. используются

$$P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k\geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon \right\},$$

поскольку сходимость для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ последовательности P_n^ε к нулю эквивалентна сходимости п.в. $A_n f$ к f^*. Через U_T обозначим изометрический оператор (называемый иногда оператором Купмана), действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f \circ T$ (в случае, когда T — автоморфизм, этот оператор, более того, является унитарным). Корреляционные коэффициенты $b_k f$ определим так: $b_k f = (U_T^k f, f)$ при $k \geq 0$ и $b_k f = \overline{b_{-k} f}$ при $k < 0$. Тогда, в силу теоремы Бохнера-Хинчина, корректно определена (единственная) спектральная мера σ_f усредняемой функции относительно динамической системы, связанной с эндоморфизмом T, т. е. такая конечная борелевская мера на единичной окружности, что

$$b_k f = \int\limits_{(-\pi,\pi]} e^{ikx} d\sigma_f(x)$$

для всех целых k.

2. Описание реализуемых скоростей сходимости в теореме фон Неймана и их численные оценки при наличии информации о спектральной мере

Скорость сходимости в теореме фон Неймана не может быть произвольной: соотношение $\|A_nf - f^*\|_2^2 = O(n^{-\alpha})$ при $\alpha > 2$ может иметь место лишь при $f - f^* = 0$ тождественно (см., например, следствие 5 в [2]), т. е. степенной скорости сходимости с показателем $\alpha > 2$ не бывает, за исключением упомянутого вырожденного случая. Про оставшийся диапазон $\alpha \in [0,2]$ известно следующее: в [5] было показано (см. теорему 3), что для $\alpha \in [0,2)$ утверждение $\|A_nf - f^*\|_2^2 = O(n^{-\alpha})$ эквивалентно утверждению $\sigma_{f-f^*}(-\delta,\delta] = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \to 0$, а для $\alpha = 2$ эта эквивалентность не имеет места (аналогичные результаты для случая непрерывного времени были доказаны в работе [6]), более того, в [3] доказана импликация $\sigma_{f-f^*}(-\delta,\delta] = O(\delta^2) \Rightarrow \|A_nf - f^*\|_2^2 = O(\frac{\ln n}{n^2})$. Отметим также, что случай $\alpha = 2$ эквивалентен когомологичности нулю функции f, т. е. условию $f = g \circ T - g$ для некоторой функции $g \in L_2(\Omega)$ (см. лемму 5 в [9]).

Следующая теорема уточняет уже упоминавшуюся теорему-критерий 3 из [5] в направлении перехода от асимптотических соотношений к алгебраическим неравенствам и теорему 1 из [7] в направлении уменьшения фигурирующих в ней констант и исследования неравенств на точность.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in [0,2)$. Тогда:*

1) Если для всех $\delta \in (0,\pi]$ выполняется $\sigma_{f-f^*}(-\delta,\delta] \le A\delta^\alpha$, то при $\alpha \in [0,1)$:

$$\|A_nf - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}n^{-1-\alpha} - \left(\frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} - 2\right)n^{-2} - n^{-2-\alpha}\right) < A\pi^\alpha\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}n^{-1-\alpha}\right);$$

при $\alpha = 1$:

$$\|A_nf - f^*\|_2^2 < A\pi\left(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2} - n^{-3}\right) < A\pi(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2});$$

при $\alpha \in (1,2)$:

$$\|A_nf - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \left(4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\right)n^{-2} - \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right)n^{-1-\alpha} - n^{-2-\alpha}\right) < A\pi^\alpha\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1})n^{-2}\right).$$

2) Если $\|A_nf - f^*\|_2^2 \le Bn^{-\alpha}$, то для всех $\delta \in (0,\pi]$ будет $\sigma_{f-f^*}(-\delta,\delta] \le C\delta^\alpha$, где $C = \begin{cases} \frac{\pi^{2-\alpha}}{4}B, & 0 \le \alpha < 1 \\ \frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{3-\alpha}}B, & 1 \le \alpha < 2 \end{cases}$, причём C — неулучшаема в том смысле, что её нельзя уменьшить.

Как очевидное следствие этой теоремы, получаем следующее замечание, уточняющее асимптотическую теорему 4 из [5] и замечание 2 из [7].

Замечание 1. Если мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с плотностью $\rho \in L_\infty(-\pi,\pi]$, то $\|A_nf - f^*\|_2^2 < 2\pi\|\rho\|_\infty(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2})$ для любого натурального n.

Следующая лемма, использовавшаяся при доказательстве теоремы 1, интересна также и сама по себе, поскольку показывает влияние меры σ_{f-f^*} на скорость сходимости $\|A_nf - f^*\|_2^2$ без предположения наличия степенной особенности в нуле меры σ_{f-f^*}, как это было в условии теоремы 1.

Лемма 1. *Положим $S_k = \sigma_{f-f^*}(-\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{k}]$, $\sigma_k = S_k - S_{k+1} = \sigma_{f-f^*}\{(-\frac{\pi}{k};-\frac{\pi}{k+1}] \cup (\frac{\pi}{k+1};\frac{\pi}{k}]\}$. Тогда для любого натурального n выполнено неравенство*

$$\frac{4}{\pi^2}S_n \le \|A_nf - f^*\|_2^2 \le S_n + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^2\sigma_k = \frac{1}{n^2}\left(S_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)S_k\right).$$

3. Оценка скорости сходимости в теореме фон Неймана при наличии информации о корреляционных коэффициентах

Как уже отмечалось выше, скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана полностью определяется поведением меры σ_{f-f^*} в окрестности нуля, а так как определение этой меры вводится через корреляционные коэффициенты, то не вызывает удивления факт возможности получения оценок скорости сходимости через корреляционные коэффициенты. Следующая ниже теорема даёт либо эти оценки, либо даже тождества, выражающие $\|A_n f - f^*\|_2^2$ через всю совокупность $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty}$ корреляционных коэффициентов при тех или иных предположениях о свойствах этих коэффициентов, уточняя тем самым теорему 6 из [5] и теорему 2 из [7].

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le \frac{1}{n} b_0(f-f^*) + \frac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} |b_k(f-f^*)|$.

2) Если $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty} \in l_p$ *при* $p \in [1, +\infty]$, *то* $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le 2\|\{b_k(f-f^*)\}\|_p n^{-\frac{1}{p}}$.

3) Если ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f-f^*)$ *сходится абсолютно, то мера* σ_{f-f^*} *абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью* ρ; *при этом*

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f-f^*)e^{ikx}$$

для всех $x \in (-\pi, \pi]$, *и, следовательно,* $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f-f^*) = 2\pi\rho(0)$, *причём*

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} = \\ = -\frac{1}{n^2}\sum_{|k|<n} |k| b_k(f-f^*) - \frac{1}{n}\sum_{|k|\ge n} b_k(f-f^*).$$

4) Если, более того, ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} k b_k(f-f^*)$ *сходится абсолютно, то, более того, плотность* ρ *меры* σ_{f-f^*} *непрерывно дифференцируема; при этом*

$$\rho'(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik b_k(f-f^*)e^{ikx}$$

для всех $x \in (-\pi, \pi]$ *и, следовательно,* $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |k| b_k(f-f^*) = 2\pi(\rho')^c(0)$, *где*

$$(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| b_k(f-f^*)e^{ikx}$$

— сопряжённая функция к $\rho'(x)$ *(см. [1], глава VIII), причём*

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} = \\ = \frac{1}{n^2}\sum_{|k|\ge n} (|k| - n) b_k(f-f^*).$$

Для некоторых типов динамических систем (например, системы бильярдного типа, системы Аносова) при надлежащем выборе функции f, по которой производится усреднение, удаётся получить оценки на скорости убывания корреляционных коэффициентов, оказывающиеся степенными или экспоненциальными. Предыдущая теорема с учётом таких частных случаев убывания $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty}$ приводит нас к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть корреляционные коэффициенты со степенной скоростью стремятся к нулю, т.е. для некоторой положительной константы* C *при всех натуральных* n *выполнено неравенство* $|b_n(f-f^*)| \le Cn^{-\gamma}$. *Тогда:*

1) Если $0 \le \gamma < 1$, *то для всех* n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \le \|f - f^*\|_2^2 n^{-1} + \frac{2C}{1-\gamma} n^{-\gamma} \le \\ \le \left(\|f\|_2^2 + \frac{2C}{1-\gamma}\right) n^{-\gamma}.$$

2) Если $\gamma = 1$, *то для всех* n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \le \|f - f^*\|_2^2 n^{-1} + 2C\frac{\ln n + \frac{n-1}{n}}{n} < \\ < \left(\|f\|_2^2 + 2C\right)\frac{\ln n + 1}{n}.$$

Если $\gamma > 1$, *то мера* σ_{f-f^*} *абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью* ρ; *при этом* $2\pi\rho(0) \le \|f\|_2^2 + 2C\frac{\gamma}{\gamma-1}$, *причём:*

3) Если $1 < \gamma < 2$, *то для всех* $n \ge 2$

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}\right| < \\ < 2C\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2-\gamma}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) n^{-\gamma}.$$

4) Если $\gamma = 2$, *то для всех* $n \ge 2$

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}\right| < \\ < 2C\left(\ln n + 2 + \frac{1}{n(n-1)}\right) n^{-2}.$$

5) Если $\gamma > 2$, *то, более того, плотность* ρ *меры* σ_{f-f^*} *непрерывно дифференцируема; при этом* $|2\pi(\rho')^c(0)| \le 2C\frac{\gamma-1}{\gamma-2}$, *причём для всех* $n \ge 2$

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2}\right| < \\ < \frac{2C}{\gamma-2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n^{-\gamma}.$$

6) Если, более того, корреляционные коэффициенты убывают экспоненциально, т.е. $|b_n(f-f^*)| \le Ae^{-Bn}$ *для некоторых констант* $A > 0$ *и* $B > 0$ *при всех* n *(что эквивалентно аналитичности плотности* ρ *— см., например, [1], глава I, §25), то*

$$2\pi\rho(0) \le \|f\|_2^2 + \frac{2A}{e^B - 1},$$

$$|2\pi(\rho')^c(0)| \le \frac{2A}{(e^B-1)(1-e^{-B})}$$

и для всех n

$$\left| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} \right| \le$$
$$\le 2A\frac{e^B}{e^B-1}\left(1+\frac{1}{e^B-1}\cdot\frac{1}{n}\right)\frac{e^{-Bn}}{n}.$$

4. Неравенства, связывающие между собой скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа

Как было показано в [5], нельзя сказать что-либо о скорости сходимости $\|A_n f - f^*\|_2^2$, зная только поведение P_n^ε; в то же время в работах [3], [4] и [5] приводились оценки асимптотики убывания P_n^ε при известной скорости убывания $\|A_n f - f^*\|_2^2$, но они были только в терминах "O" и "o". Следующая теорема уточняет эти результаты в направлении перехода от асимптотических оценок к алгебраическим.

Теорема 4. *Пусть для любого натурального* n *выполнено неравенство* $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le Bn^{-\alpha}$, *где* B *— некоторая положительная константа,* $\alpha \in (0,2]$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *при всех натуральных* $n \ge 2$ *выполнено неравенство:*

$$P_n^\varepsilon = \lambda\left\{\sup_{k\ge n}|A_k f - f^*| \ge \varepsilon\right\} < \varphi(\alpha,n)B\varepsilon^{-2},$$

причём в зависимости от α:

1. Если $\alpha \in (0,1)$, *то*
$\varphi(\alpha,n) = \frac{2^{1+\alpha}}{1-2^{-\alpha}}\left(1+\frac{1}{(1-2^{\frac{\alpha-1}{2}})^2}\right)n^{-\alpha}$.

2. Если $\alpha = 1$, *то* $\varphi(\alpha,n) = 8\frac{(1+\log_2 n)^2+3}{n}$.

3. Если $\alpha \in (1,2]$, *то*

$\varphi(\alpha,n) = 8\left(1+\frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}\right)n^{-1}$.

Замечание 2. При $\alpha = 2$ неравенство в предыдущей теореме можно заменить на

$$\lambda\left\{\sup_{k\ge n}|A_k f - f^*| > \varepsilon\right\} < Bn^{-1}\varepsilon^{-2}.$$

Замечание 3. Как показано в [5] (пример 1 после доказательства теоремы 11), оценка пункта 1 предыдущей теоремы асимптотически (по n) неулучшаема.

5. Связь полученных результатов с теорией стационарных в широком смысле стохастических процессов

Напомним (см., например, [8], гл. 6), что стационарными в широком смысле процессами $\xi = (\dots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\dots)$ (с конечным вторым моментом) называются последовательности комплекснозначных случайных величин, удовлетворяющие (помимо требования существования конечного второго момента) ещё двум условиям: $\mathrm{E}\xi_n = \mathrm{E}\xi_0$ и $\mathrm{cov}(\xi_{n+m},\xi_n) = \mathrm{cov}(\xi_m,\xi_0)$ при всех целых m и n. Без потери общности можно считать, что $\mathrm{E}\xi_0 = 0$, что мы и будем делать всюду в дальнейшем.

Введём ковариационную функцию $R(n)$, определённую на множестве всех целых чисел, по формуле $R(n) = \mathrm{cov}(\xi_n,\xi_0)$, тогда, в силу теоремы Герглотца, найдётся функция $F(\lambda)$, (называемая спектральной функцией стационарного процесса ξ), такая, что будет справедливо спектральное представление ковариационной функции:

$$R(n) = \int\limits_{(-\pi,\pi]} e^{i\lambda n}F(d\lambda)$$

для всех целых n.

Далее нам потребуются стационарные в узком смысле случайные последовательности (см., например, [8], гл. 5). Пусть $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots)$ — последовательность случайных величин. Введём следующее обозначение: $\theta_k\xi = (\xi_{k+1},\xi_{k+2},\dots)$. Говорят, что последовательность ξ стационарная в узком смысле, если для любого натурального $k \ge 1$ распределения вероятностей для последовательностей $\theta_k\xi$ и ξ совпадают. Имеется тесная связь между эндоморфизмами пространств с вероятностной мерой и стационарными в узком смысле процессами: если $\xi_1(\omega)$ — случайная величина на $(\Omega,\mathfrak{F},\lambda)$, а T — эндоморфизм, как и ранее, этого пространства, то последовательность $(\xi_1,\xi_1(T\omega),\xi_1(T^2\omega),\dots)$ будет стационарной в узком смысле, т. е. наличие эндоморфизма позволяет построить стационарную в узком смысле последовательность. В определённом смысле верно и обратное: для каждой стационарной последовательности ξ можно указать вероятностное пространство $(\tilde\Omega,\tilde{\mathfrak{F}},\tilde\lambda)$, последовательность $\tilde\xi$ случайных величин в нём, совпадающую по распределению с ξ и эндоморфизм $\tilde T$, такие, что $\tilde\xi = (\tilde\xi_1(\tilde\omega),\tilde\xi_1(\tilde T\tilde\omega),\tilde\xi_1(\tilde T^2\tilde\omega),\dots)$ для некоторой случайной величины $\tilde\xi_1(\tilde\omega)$. Доказательства этих фактов можно найти в главе 5 монографии [8].

Стационарные в широком смысле процессы, оправдывая своё название, содержат как подкласс стационарные в узком смысле процессы (см. главу 6 в [8]). Несмотря на это, приведённые ранее теоремы 1–4 имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле процессов. Приведём здесь соответствующий аналог теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть* $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ *— стационарный в широком смысле процесс (с конечным вторым моментом),* $\mathbf{E}X_n = 0$, $F(\lambda)$ *— спектральная функция,* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} X_k$ *и пусть* $\alpha \in [0,2)$. *Тогда:*

1) Если для некоторой положительной кон-

станты A при всех $\delta \in (0,\pi]$ выполняется неравенство $F(\delta) - F(-\delta) \le A\delta^{\alpha}$, то для любого натурального n
при $\alpha \in [0,1)$:

$$\mathsf{D}\,S_n < A\pi^{\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} - \right.$$
$$\left. -(\frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} - 2) - n^{-\alpha}\right) <$$
$$< A\pi^{\alpha}(\frac{2}{2-\alpha}n^{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha});$$

при $\alpha = 1$:

$$\mathsf{D}\,S_n < A\pi(2n + \ln n - n^{-1}) < A\pi(2n + \ln n);$$

при $\alpha \in (1,2)$:

$$\mathsf{D}\,S_n < A\pi^{\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{2-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}) - \right.$$
$$\left. -(2 + \frac{1}{\alpha-1})n^{1-\alpha} - n^{-\alpha}\right) <$$
$$< A\pi^{\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{2-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1})\right).$$

2) Если для некоторой положительной константы B при всех натуральных n выполняется неравенство $\mathsf{D}\,S_n \le Bn^{2-\alpha}$, то для любого $\delta \in (0,\pi]$

$$F(\delta) - F(-\delta) \le C\delta^{2-\alpha}, \text{ где } C = \begin{cases} \frac{\pi^{2-\alpha}}{4}B, & 0 \le \alpha < 1 \\ \frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{3-\alpha}}B, & 1 \le \alpha < 2 \end{cases}$$

причем константа C неулучшаема в том смысле, что её нельзя уменьшить.

Аналог теоремы при $\alpha = 2$ не имеет места ни с какими константами, а степенного убывания $\mathsf{D}\,S_n$ (случай $\alpha > 2$) при $X_n \not\equiv 0$ просто не бывает.

Литература

[1] Бари, Н. К. *Тригонометрические ряды* / Н. К. Бари. – М.: Физматгиз, 1961.

[2] Гапошкин, В. Ф. *Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями* / В. Ф. Гапошкин // Извест. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Том 39, №6. – С. 1366 – 1392.

[3] Гапошкин, В. Ф. *О скорости убывания вероятностей ε-уклонений средних стационарных процессов* / В. Ф. Гапошкин // Математические заметки. – 1998. – Том 64, №3. – С. 366 – 372.

[4] Гапошкин, В. Ф. *Несколько примеров к задаче об ε-уклонениях для стационарных последовательностей* / В. Ф. Гапошкин // Теория вероятностей и её применения. – 2001. – Том 46, №2. – С. 370 – 375.

[5] Качуровский, А. Г. *Скорости сходимости в эргодических теоремах* / А. Г. Качуровский // УМН. – 1996. – Том 51, № 4. – С. 73 – 124.

[6] Качуровский, А. Г. *О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем* / А. Г. Качуровский, А. В. Решетенко // Матем. сб. – 2010. – Том 201, № 4. – С. 25 – 32.

[7] Качуровский, А. Г. *О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана* / А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев // Математические заметки. – 2010. – Том 87, № 5. – С. 756 – 763.

[8] Ширяев, А. Н. *Вероятность* / А. Н. Ширяев. – М.: Наука, 1989.

[9] Browder, F. *On the iteration of transformations in noncompact minimal dynamical systems* / F. Browder // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 9, no. 5. – P. 773 – 780.

УДК 517.938+517.987.5+519.214.8

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМАХ БИРКГОФА И БОУЭНА ДЛЯ ПОТОКОВ АНОСОВА

А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин

ESTIMATES OF THE RATE OF CONVERGENCE IN BIRKHOFF AND BOWEN THEOREMS FOR ANOSOV FLOWS

A. G. Kachurovskii, I. V. Podvigin

Для равномерно гиперболических динамических систем получены экспоненциальные оценки на скорость сходимости почти всюду эргодических средних в теоремах Биркгофа и Боуэна с использованием ранее известных аналогичных оценок на скорость сходимости по мере в этих теоремах.

We obtain exponential estimates of the rate of convergence in Birkhoff and Bowen theorems for uniformly hyperbolic systems. Well-known analogous estimates for large deviations in these theorems, are used in the proof.

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, поток Аносова, теорема Биркгофа, теорема Боуэна.

Keywords: rates of convergence in ergodic theorems, Anosov flows, Birkhoff theorem, Bowen theorem.

Работа поддержана Программой государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-8508-2010.1).

Введение

Пусть $(\Omega, \lambda, \{T^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}})$ – классическая динамическая система [1]. Это означает, что Ω – гладкое многообразие, T^τ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов на Ω, сохраняющих борелевскую меру λ, которую будем предполагать вероятностной, т. е. $\lambda(\Omega) = 1$. В локальных координатах многообразия Ω такая группа диффеоморфизмов определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x_i} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, n,\ n = \mathrm{dim}\Omega. \quad (1)$$

Среди классических систем, обладающих существенно стохастическими свойствами и используемых для моделирования динамики физических процессов, выделяют равномерно гиперболические системы (диффеоморфизмы и потоки Аносова).

В этом случае T^τ – C^2-гладкий поток, Ω – компактное C^∞-гладкое риманово многообразие, для каждой точки $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ которого справедливо разложение касательного пространства $T_\omega\Omega$ в сумму трех подпространств, образующих в совокупности непрерывные подрасслоения расслоения $T\Omega$, инвариантные относительно дифференциала DT^τ [2, 3]:

$$T_\omega\Omega = E_\omega \oplus E^s_\omega \oplus E^u_\omega,$$

где E_ω – касательная к траектории системы (1), проходящей через ω, и

$$\|DT^\tau w\| \le ce^{-\theta\tau}\|w\|, w \in E^s_\omega, \tau \ge 0,$$

$$\|DT^\tau w\| \le ce^{\theta\tau}\|w\|, w \in E^u_\omega, \tau \le 0,$$

для некоторых констант c и θ, не зависящих от ω.

Множество инвариантных мер для гиперболических систем бесконечно. К примеру, так как периодические точки плотны в Ω, то инвариантными будут меры сосредоточенные на таких периодических орбитах. Для некоторых систем инвариантным может быть и риманов объём (мера Лебега), хотя число таких систем не велико, с точки зрения теории категорий. В качестве инвариантной меры мы будем рассматривать "физическую" меру Синая-Рюеля-Боуэна (SRB-мера) [3].

В дальнейшем будем использовать обозначения: μ – риманов объём, λ – SRB-мера, а ν – произвольная вероятностная мера.

Классическими примерами гиперболических систем являются геодезические на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны, а также специальные потоки над диффеоморфизмами Аносова [2, 4].

Будем предполагать поток T^τ топологически транзитивным, т. е. что для любых непустых открытых множеств $U, V \subset \Omega$ для некоторого t верно соотношение $U \cap T^t V \neq \emptyset$.

Замечание 1. Это условие не является ограничительным, так как, по теореме Смейла [2], о спектральном разложении в противном случае Ω разлагается в конечную сумму подмножеств, сужения, на которые дают топологически транзитивный поток.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}^+$ обозначим эргодическое среднее:

$$\overline{A}_t f(\omega) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(T^\tau\omega)\, d\tau,\ t > 0,\ \overline{A}_0 f = f.$$

Так как мера λ будет эргодической (т.е. инвариантными множествами будут только множества нулевой меры и все пространство), то теорема Биркгофа утверждает для всякой $f \in L_1(\Omega)$ существование λ-почти всюду предела, равного константе:

$$\lim_{t\to\infty} \overline{A}_t f = \int f d\lambda.$$

По теореме Боуэна [3, 5], этот предел для непрерывных функций существует и равен той же константе для μ-почти всех ω.

Замечание 2. Важность теоремы Боуэна и теоремы Биркгофа заключается, в частности, в том, что, используя их вместе, можно показать, что если гиперболическая система обладает инвариантным римановым объёмом μ, то тогда SRB-мера совпадает с ним, т. е. $\mu = \lambda$ [5].

Естественно попытаться ответить на вопрос: с какой скоростью для рассматриваемой динамической системы происходит стремление к пределу эргодических средних от непрерывной функции как в теореме Биркгофа, так и в теореме Боуэна?

Скорость сходимости почти всюду относительно меры ν средних $\overline{A}_t f$ к $\int f d\lambda$ будем определять убыванием при $s \to \infty$ для каждого $\varepsilon > 0$ величин

$$\overline{\mathrm{P}}_s^{\nu,\varepsilon} = \nu\left\{\sup_{t\ge s} |\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\}.$$

При $\nu = \lambda$ получаем скорость сходимости в теореме Биркгофа, а при $\nu = \mu$ и непрерывной функции f – в теореме Боуэна. Наряду с этим параметром будем рассматривать вероятности больших ε-уклонений, т. е. величины

$$\overline{\mathrm{p}}_s^{\nu,\varepsilon} = \nu\left\{|\overline{A}_s f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\},$$

стремление которых к нулю при $s \to \infty$ означает сходимость по мере ν.

Основные результаты

Лемма об эквивалентности

Сходимость по мере не влечет сходимости почти всюду. Однако для эргодических средних от существенно ограниченных функций степенная сходимость по мере эквивалентна степенной же сходимости почти всюду [6, теорема 12]. Оказывается, и для более общих скоростей убывания справедлив аналогичный результат.

Лемма. *Пусть ν – произвольная вероятностная мера, $f \in L_\infty(\Omega,\nu)\bigcap L_1(\Omega,\lambda)$, и функция $\varphi(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ убывает (при $x > x_0$) к нулю так, что*

$$\int_N^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = O(\varphi(N)) \text{ при } N \to \infty, \qquad (2)$$

тогда следующие утверждения равносильны:
1) $\overline{\mathrm{p}}_s^{\nu,\varepsilon} = O(\varphi(s))$ при $s \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;
2) $\overline{\mathrm{P}}_s^{\nu,\varepsilon} = O(\varphi(s))$ при $s \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим класс функций, удовлетворяющих (2). Легко проверить, что функции вида $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x^\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ и ψ – положительная невозрастающая (при $x > x_0$) функция, удовлетворяют условию (2).

Кроме степенных функций в таком виде представляются степенные с логарифмическим множителем и экспоненциальные функции. Кроме того, из функций, удовлетворяющих условию (2), можно получать новые функции с помощью степенной замены переменной. Таким образом, из экспоненциальной функции можно получить растянутые экспоненциальные функции $e^{-\gamma x^\delta}$, $\gamma, \delta > 0$. Таких функций достаточно для наших дальнейших рассмотрений.

Экспоненциальные оценки

Оценка в теореме Боуэна. Для потоков Аносова оценки вероятностей больших ε-уклонений относительно меры μ хорошо изучены. Как показано в [7, 8, 9], для всякой непрерывной на Ω функции f справедлив принцип больших уклонений:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \mu\left\{|\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\} \le -\gamma_\mu(\varepsilon)$$

для некоторой константы $\gamma_\mu(\varepsilon) > 0$, зависящей от динамической системы и функции f. Откуда видно, что для достаточно больших t, т. е. для $t \ge T_\mu$, будет верно неравенство:

$$\overline{\mathrm{p}}_t^{\mu,\varepsilon} = \mu\left\{|\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\} \le e^{-\gamma_\mu(\varepsilon)t}.$$

Тогда найдётся такая константа $C_\mu(\varepsilon) > 0$ (можно взять $C_\mu(\varepsilon) = e^{\gamma_\mu(\varepsilon)T_\mu}$), что для всех $t \ge 0$ будет верно неравенство

$$\overline{\mathrm{p}}_t^{\mu,\varepsilon} = \mu\left\{|\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\} \le C_\mu(\varepsilon) e^{-\gamma_\mu(\varepsilon)t}.$$

Другими словами: $\overline{\mathrm{p}}_t^{\mu,\varepsilon} = O(e^{-\gamma_\mu(\varepsilon)t})$ при $t \to \infty$. Применяя лемму, получаем аналогичное асимптотическое соотношение для скорости сходимости в теореме Боуэна:

$$\overline{\mathrm{P}}_t^{\mu,2\varepsilon} = O(e^{-\gamma_\mu(\varepsilon)t}) \text{ при } t \to \infty. \qquad (3)$$

Отметим, что соотношение (3) даёт отличное от оригинального доказательство самой теоремы Боуэна.

Оценка в теореме Биркгофа. Оценки вероятностей больших ε-уклонений относительно меры λ также интенсивно изучались последние двадцать лет. Кроме того, в случае меры λ получена более точная асимптотика.

В работе [10, раздел 7] показано, что для всякой гёльдеровской непрерывной на Ω функции f справедлив следующий принцип больших уклонений (который является следствием более общего принципа). Пусть J – замкнутый интервал, не содержащий значение $\int f d\lambda$, тогда найдутся константы C и $\gamma > 0$, зависящие от интервала J и от функции f, такие, что

$$\lambda\{\overline{A}_t f \in J\} \le C\frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{t}}$$

для достаточно больших t. Этот принцип справедлив в предположении, что функция f и поток T^τ независимы в смысле Лалли [10, определение 2; 11, гипотеза B].

Пусть $K = \sup\limits_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|$, тогда $\overline{A}_t f(\omega) \in [-K, K]$ для λ-почти всех точек ω и $t \ge 0$. Используя этот факт и описанный выше принцип для достаточно больших t, т. е. для $t \ge T_\lambda$, получим неравенства:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{p}}_t^{\lambda,\varepsilon} &= \lambda\left\{|\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\} = \lambda\left\{\int f d\lambda - \varepsilon \ge \overline{A}_t f \ge \int f d\lambda + \varepsilon\right\} = \\ &= \lambda\left\{\overline{A}_t f \in \left[-K, \int f d\lambda - \varepsilon\right] \bigcup \left[\int f d\lambda + \varepsilon, K\right]\right\} = \\ &= \lambda\left\{\overline{A}_t f \in \left[-K, \int f d\lambda - \varepsilon\right]\right\} + \lambda\left\{\overline{A}_t f \in \left[\int f d\lambda + \varepsilon, K\right]\right\} \le \\ &\le C_1\frac{e^{-\gamma_1 t}}{\sqrt{t}} + C_2\frac{e^{-\gamma_2 t}}{\sqrt{t}} \le C_3\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon)t}}{\sqrt{t}},\end{aligned}$$

где константы C_1, γ_1 и C_2, γ_2 соответствуют отрезкам $J_1 = \left[-K, \int f d\lambda - \varepsilon\right]$ и $J_2 = \left[\int f d\lambda + \varepsilon, K\right]$, а $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$ и $\gamma_\lambda(\varepsilon) = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Тогда найдётся такая константа $C_\lambda(\varepsilon) > 0$ (можно взять $C_\lambda(\varepsilon) = \frac{\sqrt{T_\lambda}}{C_3} e^{\gamma_\lambda(\varepsilon)T_\lambda}$), что для всех $t > 0$ будет верно неравенство:

$$\overline{\mathrm{p}}_t^{\lambda,\varepsilon} = \lambda\left\{|\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\} \le C_\lambda(\varepsilon)\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon)t}}{\sqrt{t}}.$$

Таким образом получили, что $\overline{\mathrm{p}}_t^{\lambda,\varepsilon} = O\left(\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon)t}}{\sqrt{t}}\right)$ при $t \to \infty$. Применяя лемму, получаем аналогичное асимптотическое соотношение и на скорость сходимости в теореме Биркгофа:

$$\overline{\mathrm{P}}_t^{\lambda,2\varepsilon} = O\left(\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon)t}}{\sqrt{t}}\right) \text{ при } t \to \infty. \tag{4}$$

Связывающие константы. Асимптотические соотношения (3) и (4) можно переписать в виде неравенств с вполне определёнными константами. Для этого нужно получить неравенства, уточняющие соотношение (2) леммы для функций $\varphi_1 = e^{-\gamma t}, \varphi_2 = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{t}}, \gamma > 0$. Пусть

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt, x > 0,$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt, x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что для функций φ_1 и φ_2 выполняются неравенства при всех $N \ge 1$:

$$\frac{1}{\varphi_1(N)}\int_N^\infty \frac{\varphi_1(x)}{x}\,dx \le e^\gamma E_1(\gamma) < \ln\left(1+\frac{1}{\gamma}\right); \tag{5}$$

$$\frac{1}{\varphi_2(N)}\int_N^\infty \frac{\varphi_2(x)}{x}\,dx \le 2\,(1 - e^\gamma\sqrt{\pi\gamma}\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})) < 2\frac{\sqrt{\gamma+2} - \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma+2} + \sqrt{\gamma}}. \tag{6}$$

Действительно, обозначим левые части неравенств (5) и (6) как функции $F_1(N)$ и $F_2(N)$. Тогда легко проверить, что

$$F_1(N) = \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma N x}}{x+1}\,dx, \quad F_2(N) = \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma N x}}{(x+1)^{3/2}}\,dx.$$

Обе функции являются убывающими и, следовательно, $F_i(N) \le F_i(1), i = 1, 2, N \ge 1$. Заменой переменной находим $F_1(1) = e^\gamma E_1(\gamma)$. Равенство

$$F_2(1) = 2\,(1 - e^\gamma\sqrt{\pi\gamma}\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}))$$

получаем интегрированием по частям. Вторые неравенства в (5) и (6) см., например, в [12, соотношения 5.1.20 и 7.1.13].

Положим $\Delta = \sup_\Omega |f - \int f d\lambda|$, и $r(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{\Delta}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $(\Omega, \lambda, \{T^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}})$ – топологически транзитивный поток Аносова и f – гёльдеровская непрерывная функция; тогда для любого $\varepsilon > 0$ для введенных выше констант $\gamma_\mu(\varepsilon)$ и $C_\mu(\varepsilon)$ при всех $t \ge 0$ справедлива оценка*

$$\overline{\mathrm{P}}_t^{\mu,2\varepsilon} < C_\mu(\varepsilon)\left(1 + \frac{\ln(1 + 1/\gamma_\mu(\varepsilon))}{\ln r(\varepsilon)}\right)e^{-\gamma_\mu(\varepsilon)t}.$$

Если, кроме того, функция f и поток независимы в смысле Лалли, то для любого $\varepsilon > 0$ для введенных выше констант $\gamma_\lambda(\varepsilon)$ и $C_\lambda(\varepsilon)$ при всех $t > 0$ справедлива оценка

$$\overline{\mathrm{P}}_t^{\lambda,2\varepsilon} < C_\lambda(\varepsilon)\cdot \cdot\left(1+2\frac{\sqrt{\gamma_\lambda(\varepsilon)+2} - \sqrt{\gamma_\lambda(\varepsilon)}}{\ln r(\varepsilon)(\sqrt{\gamma_\lambda(\varepsilon)+2}+\sqrt{\gamma_\lambda(\varepsilon)})}\right)\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon)t}}{\sqrt{t}}.$$

Литература

[1] Арнольд, В. И. *Эргодические проблемы классической механики* / В. И. Арнольд, А. Авец. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. – 284 с.

[2] Смейл, С. *Дифференцируемые динамические системы* / С. Смейл // УМН. – 1970. – Т. 25. – С. 113–185.

[3] Песин, Я. Б. *Эргодическая теория гладких динамических систем. Гл. 7.// Общая теория гладких гиперболических систем. Динамические системы-2. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления,* **2** / Я. Б. Песин. – М.: ВИНИТИ, 1985. – С. 123 – 173.

[4] Аносов, Д. В. *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны* / Д. В. Аносов // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1967. – Т. 90. – 211 с.

[5] Боуэн, Р. *Символическая динамика* / Р. Боуэн – М.: Мир, 1979. – 245 с.

[6] Качуровский, А. Г. *Скорости сходимости в эргодических теоремах* / А. Г. Качуровский // УМН. – 1996. – Т. 51. – С. 73 – 124.

[7] Orey, L. *Deviation of trajectory averages and the defect in Pesin's formula for Anosov diffeomorphisms* / L. Orey, S. Pelikan // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – Vol. 315. – P. 741 – 753.

[8] Kifer, Y. *Large deviations in dynamical systems and stochastic processes* / Y. Kifer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 321. – P. 505 – 524.

[9] Young, L.-S. *Large deviations in dynamical systems* / L.-S. Young // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 318. – P. 525 – 543.

[10] Waddington, S. *Large deviation asymptotics for Anosov flows* / S. Waddington // Ann. Inst. Henri Poincaré. – 1996. – Vol. 13. – P. 44 – 484.

[11] Lalley, S. *Distribution of periodic orbits of symbolic and Axiom A flows* / S. Lalley // Adv. Appl. Math. – 1987. – Vol. 8. – P. 154 – 193.

[12] Абрамовец, М. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / М. Абрамовец, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

УДК 514.7

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ФИНИТНОГО СИГНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

М. С. Козаченко, В. В. Славский

PERIODIC COMPONENT OF FINITE SIGNAL IN THE LEBESGUE SPACE

M. S. Kozachenko, V. V. Slavsky

Важной прикладной задачей является спектральный анализ финитных сигналов [1]. Классический подход к решению данной задачи – анализ Фурье и различные его модификации (например вейвлет-анализ). Анализ Фурье наиболее приспособлен для исследования сигналов рассматриваемых на всей временной оси. Финитные сигналы, определенные на конечном промежутке, при этом приходится "искусственно" заменять на неограниченные.

Иногда для исследования сигнала не требуется определения его спектра, а достаточно найти его периодическую составляющую. В данной работе предлагается непосредственный прямой вариационный метод нахождения периодической составляющей финитных сигналов в пространствах Лебега $L_2[a,b]$ *и в более общем случае в пространствах Соболева* $W_2^p[a,b]$*. Находится наилучшая в смысле норм этих пространств периодическая составляющая. Для конечных цифровых сигналов данный алгоритм реализован в системе MatLab.*

Spectral analysis of signals is An important applied problem, in particular the allocation of the periodic component. The classical approach to this task solution - Fourier Analysis and its various modifications (such as wavelet analysis). Fourier analysis is best suited for the study of signals under consideration for the entire time axis.

The finite signals are defined on a finite interval with the "artificial" must be replaced at no limited. In this paper, a direct variational method for studying finite signals in Lebesgue spaces $L_2[a,b]$ *and more generally in the Sobolev spaces* $W_2^p[a,b]$ *. Located in the best sense of the norms of these spaces, the periodic component. For finite digital signals, the algorithm is implemented in the MatLab.*

Ключевые слова: периодическая составляющая, спектральный анализ, анализ Фурье, вариационный метод, конечный сигнал.

Keywords: periodic component, spectral analysis, Fourier analysis, variational method, finite signals.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 08-01-98001), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

1. Периодический конечный сигнал из пространства $L_2[a,b]$

Определение 1. *Пусть дано число $0 < T < b-a$, обозначим через $\mathcal{L}_{2,T}[a,b] \subset L_2[a,b]$ векторное подпространство функций $g \in L_2[a,b]$, таких, что $g(t) = g(t+T)$ для почти всех t, при условии $t, t+T \in [a,b]$.*

Теорема 1. *При условии $0 < T < b-a$ подпространство $\mathcal{L}_{2,T}[a,b] \subset L_2[a,b]$ Гильбертова пространства $L_2[a,b]$ будет замкнутое.*
Доказательство. Введем следующий линейный изометричный оператор

$$\mathrm{L}_T g(t) = g(t+T),$$

из пространства $L_2[a,b]$ в пространство $L_2[a-T, b-T]$. Тогда условие, что функция g имеет период T на отрезке $[a,b]$, примет вид:

$$g|_{[a,b-T]} = \mathrm{L}_T g|_{[a,b-T]}\,.$$

Так как оператор L_T непрерывен и оператор сужения функции на отрезок также непрерывен относительно нормы пространства $L_2[a,b]$, то данное равенство определяет замкнутое подмножество в $L_2[a,b]$.

В работе решается задача: пусть дана функция $f \in L_2[a,b]$ и число $0 < T < b-a$. Требуется найти функцию $g \in \mathcal{L}_{2,T}[a,b]$ аппроксимирующую наилучшим образом f в пространстве $L_2[a,b]$. Другими словами, найти минимум:

$$J(T) = \min\left\{\|f-g\|_{L_2[a,b]} : g \in \mathcal{L}_{2,T}[a,b]\right\}. \quad (1)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что отрезок $[a,b]$ единичный $[0,1]$.

Теорема 2. *Пусть период T принадлежит интервалу $[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}]$, тогда минимум функционала $J(T)$ достигается при следующем выборе периодической функции $g \in \mathcal{L}_{2,T}[a,b]$:*

$$g(t)|_{[0,T]} = \psi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)+L_T f(t)+\ldots+L_T^n f(t)}{n+1}, \\ \qquad \text{при } 0 < t < 1-nT, \\ \frac{f(t)+L_T f(t)+\ldots+L_T^{n-1} f(t)}{n}, \\ \qquad \text{при } 1-nT < t < T, \end{cases} \quad (2)$$

где $L_T f(t) = f(t+T)$, …, $L_T^p f(t) = f(t+pT)$. При этом минимум равен:

$$J(T) = \|f\|^2_{L_2[0,1]} - (n+1)\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_T^i f\right\|^2_{L_2[0,1-nT]} - n\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{L}_T^i f\right\|^2_{L_2[1-nT,T]}. \quad (3)$$

Так определенную функцию $g \in \mathcal{L}_{2,T}[0,1]$ будем называть T-периодической составляющей функции f в пространстве $L_2[0,1]$.

Доказательство. Справедливо равенство:

$$\|f-g\|^2_{L_2[0,1]} = $$

$$= \int_0^T |f(t)-g(t)|^2\,dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{iT}^{(i+1)T} |f(t)-g(t)|^2\,dt +$$

$$+ \int_{nT}^1 |f(t)-g(t)|^2\,dt\,.$$

Начиная со второго интеграла сделаем замены:

$$\|f-g\|^2_{L_2[0,1]} = \int_0^T |f(t)-g(t)|^2\,dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}\int_0^T |f(t+iT)-g(t+iT)|^2\,dt +$$

$$+ \int_0^{1-nT} |f(t+nT)-g(t+nT)|^2\,dt =$$

$$= \int_0^T |f(t)-g(t)|^2\,dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_0^T \left|L_T^i f(t)-g(t)\right|^2 dt +$$

$$+ \int_0^{1-nT} |L_T^n f(t)-g(t)|^2\,dt.$$

Введем обозначения:

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \psi(t), & 0 \le t \le 1-T \\ 0, & 1-T \le t \le T \end{cases},$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1-T \\ \psi(t), & 1-T \le t \le T \end{cases},$$

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le 1-nT \\ 0, & 1-nT \le t \le T \end{cases},$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1-nT \\ f(t), & 1-nT \le t \le T \end{cases},$$

где $\psi(t) = g(t)|_{[0,T]}$. Разбивая все интегралы на сумму двух интегралов, кроме последнего, получим:

$$\int_0^T |f(t)-\psi(t)|^2\,dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_0^T \left|L_T^i f(t)-\psi(t)\right|^2 dt +$$

$$+ \int_0^{1-nT} |L_T^n f(t)-\psi(t)|^2\,dt =$$

$$= \int_0^{1-nT} |f_1(t)-\psi_1(t)|^2\,dt + \int_{1-nT}^T |f_2(t)-\psi_2(t)|^2\,dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^{1-nT} \left|L_T^i f_1(t)-\psi_1(t)\right|^2 dt +\right.$$

$$\left.+ \int_{1-nT}^{T} \left|L_T^i f_2(t)-\psi_2(t)\right|^2 dt\right) + \int_0^{1-nT} |L_T^n f_1(t)-\psi_1(t)|^2\,dt.$$

Выделим отдельно слагаемые, зависящие от ψ_1 и ψ_2:

$$\|f-g\|^2_{L_2[0,1]} =$$
$$= \left[\int_0^{1-nT} |f_1(t)-\psi_1(t)|^2\,dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{1-nT} \left|L_T^i f_1(t)-\psi_1(t)\right|^2 dt + \int_0^{1-nT} \left|L_T^n f_1(t)-\psi_1(t)\right|^2 dt\right] +$$
$$+ \left[\int_{1-nT}^{T} |f_2(t)-\psi_2(t)|^2\,dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{1-nT}^{T} \left|L_T^i f_2(t)-\psi_2(t)\right|^2 dt\right] = J_1(\psi_1) + J_2(\psi_2).$$

Так как функции ψ_1 и ψ_2 можно независимо выбирать, то

$$\inf_{g\in\mathcal{L}_{2,T}[0,1]} \|f-g\|^2_{L_2[0,1]} = \inf_{\psi_1} J_1(\psi_1) + \inf_{\psi_2} J_2(\psi_2).$$

В любом евклидовом пространстве для произвольной системы векторов $\{v_i\}_{i=1,\ldots,p}$ выполняется равенство:

$$\sum_{i=1}^p |v_i-x|^2 = \sum_{i=1}^p |v_i|^2 - 2\sum_{i=1}^p (v_i,x) + p|x|^2 =$$
$$= p\left[|x|^2 - 2\left(x, \tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^p v_i\right) + \left|\tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^p v_i\right|^2\right] -$$
$$-p\left|\tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^p v_i\right|^2 + \sum_{i=1}^p |v_i|^2 =$$
$$= p\left|x - \tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^p v_i\right|^2 + \sum_{i=1}^p |v_i|^2 - \tfrac{1}{p}\left|\sum_{i=1}^p v_i\right|^2.$$

Следовательно,

$$\inf_x \sum_{i=1}^p |v_i-x|^2 = \sum_{i=1}^p |v_i|^2 - \frac{1}{p}\left|\sum_{i=1}^p v_i\right|^2$$

и инфимум достигается при $x = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p v_i$. Применяя это равенство к $J_1(\psi_1)$ и $J_2(\psi_2)$, получим:

$$J_1(\psi_1) = (n+1)\left\|\psi_1 - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n L_T^i f_1\right\|^2_{L_2[0,1-nT]} +$$
$$+\sum_{i=0}^n \left\|L_T^i f_1\right\|^2_{L_2[0,1-nT]} - \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{i=0}^n L_T^i f_1\right\|^2_{L_2[0,1-nT]},$$

$$J_2(\psi_2) = n\left\|\psi_2 - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} L_T^i f_2\right\|^2_{L_2[1-nT,T]} +$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1} \left\|L_T^i f_2\right\|^2_{L_2[1-nT,T]} - \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=0}^{n-1} L_T^i f_2\right\|^2_{L_2[1-nT,T]}.$$

Соответственно получим:

$$\inf_{\psi_1} J_1(\psi_1) = \sum_{i=0}^n \left\|L_T^i f_1\right\|^2_{L_2[0,1-nT]} - \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{i=0}^n L_T^i f_1\right\|^2_{L_2[0,1-nT]},$$

$$\inf_{\psi_2} J_2(\psi_2) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\|L_T^i f_2\right\|^2_{L_2[1-nT,T]} - \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=0}^{n-1} L_T^i f_2\right\|^2_{L_2[1-nT,T]},$$

$$\inf_{g\in\mathcal{L}_{2,T}[0,1]} \|f-g\|^2_{L_2[0,1]} = \sum_{i=0}^n \left\|L_T^i f_1\right\|^2_{L_2[0,1-nT]} - \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{i=0}^n L_T^i f_1\right\|^2_{L_2[0,1-nT]} +$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1} \left\|L_T^i f_2\right\|^2_{L_2[1-nT,T]} - \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=0}^{n-1} L_T^i f_2\right\|^2_{L_2[1-nT,T]}.$$

Инфимум достигается при

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)+\mathrm{L}_T f(t)+\ldots+\mathrm{L}_T^n f(t)}{n+1}, \\ \quad\text{при } 0<t<1-nT, \\ \frac{f(t)+\mathrm{L}_T f(t)+\ldots+\mathrm{L}_T^{n-1} f(t)}{n}, \\ \quad\text{при } 1-nT<t<T, \end{cases}.$$

Так как

$$\sum_{i=0}^n \left\|L_T^i f_1\right\|^2_{L_2[0,1-nT]} + \sum_{i=0}^{n-1} \left\|L_T^i f_2\right\|^2_{L_2[1-nT,T]} =$$
$$= \|f\|^2_{L_2[0,1]},$$

то получим окончательно формулу (3) теоремы.

Замечание 1. При $T=\frac{1}{n}$ получим равенства:

$$\psi(t) = \frac{f(t)+\mathrm{L}_T f(t)+\ldots+\mathrm{L}_T^{n-1} f(t)}{n},\ 0<t<\frac{1}{n},$$
$$J\left(\frac{1}{n}\right) = \|f\|^2_{L_2[0,1]} - n\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{L}_T^i f\right\|^2_{L_2[0,\frac{1}{n}]}.$$

Замечание 2. При $0.5 < T < 1$ получим равенства:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)+L_T f(t)}{2}, & \text{при } 0 < t < 1 - T, \\ f(t), & \text{при } 1 - T < t < T, \end{cases},$$

$$J(T) = \frac{1}{2}\left\|f - \mathrm{L}_T f\right\|^2_{L_2[0,1-T]} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{1-T} |f(t) - f(t+T)|^2\, dt.$$

Замечание 3. Сумма

$$\left.\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_T^i f\right|_{[0,1-nT]}$$

представляет собой усреднение функции f по $(n + 1)$ интервалам:

$$I_1 = [0, 1 - nT] \cup [T, 1 - (n-1)T] \cup \cdots \cup [nT, 1] =$$

$$= \cup_{i=0}^{n} \mathrm{L}_T^i [0, 1 - nT].$$

Аналогично, сумма

$$\left.\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{L}_T^i f\right|_{[1-nT,T]}$$

представляет собой усреднение функции f по n интервалам:

$$I_2 = [1-nT, T] \cup [1-(n-1)T, 2T] \cup \cdots \cup [1-T, nT] =$$

$$= \cup_{i=0}^{n-1} \mathrm{L}_T^i [1 - nT, T].$$

На рисунке 1 изображены интервалы множеств I_1 и I_2 при $n = 2$, $\frac{1}{3} < T < \frac{1}{2}$.

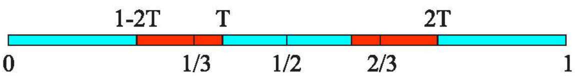


Рис. 1. Множества I_1 и I_2

Таким образом, функция g получается из функции f заменой на усредненное значение на интервалах множества I_1 и аналогично на интервалах множества I_2. Соответственно величины $\inf_{\psi_1} J_1(\psi_1)$, $\inf_{\psi_2} J_2(\psi_2)$ равны дисперсиям данных усреднений функции f.

Замечание 4. Для любого $0 < T < 1$ справедливо равенство:

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_{I_1} f(t)dt + \int_{I_2} f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt,$$

где $g \in \mathcal{L}_T^2[0,1]$ – T-периодическая составляющая функции f.

Замечание 5. Справедливы неравенства

$$0 \le J(T) \le D[f], \text{ при } 0 \le T \le 1,$$

где $D[f]$ дисперсия функции

$$D[f] = \int_0^1 [f(t) - M[f]]^2\, dt, \quad M[f] = \int_0^1 f(t)dt.$$

Кроме того, верно $\lim_{T\to 0} J(T) = D[f]$, $\lim_{T\to 1} J(T) = 0$.

Замечание 6. Для любого натурального $m \in N$ из определения $J(T)$ следует свойство:

$$J(T) \ge J(mT), \text{ при условии } mT \in [0,1].$$

Более общее свойство. Пусть $nT, mT \in [0,1]$, тогда

$$J(pT) \ge \max\{J(nT), J(mT)\},$$

где $p = GCD(n,m)$ – наибольший общий делитель n и m.

1.1. Численное нахождение функции $J(T)$

При численном решении последовательно используется формула (3) для нахождения функции $J(T)$ на интервалах $\frac{1}{n+1} \le T \le \frac{1}{n}$, при $n = p, p - 1, \ldots, 1$. В итоге получается функция $J(T)$ на отрезке $\left[\frac{1}{p+1}, 1\right]$.

Пример 1. Пусть $f(t) = \sin(3 \cdot 2\pi t + 1)$, $t \in [0,1]$ – периодическая функция с периодом $T = \frac{1}{3}$. На рисунке 2 изображены графики функций $f(t)$ и $J(T)$. На графике виден период $T = \frac{1}{3}$ и кратные ему. Дисперсия $D[f] = 0.5$.

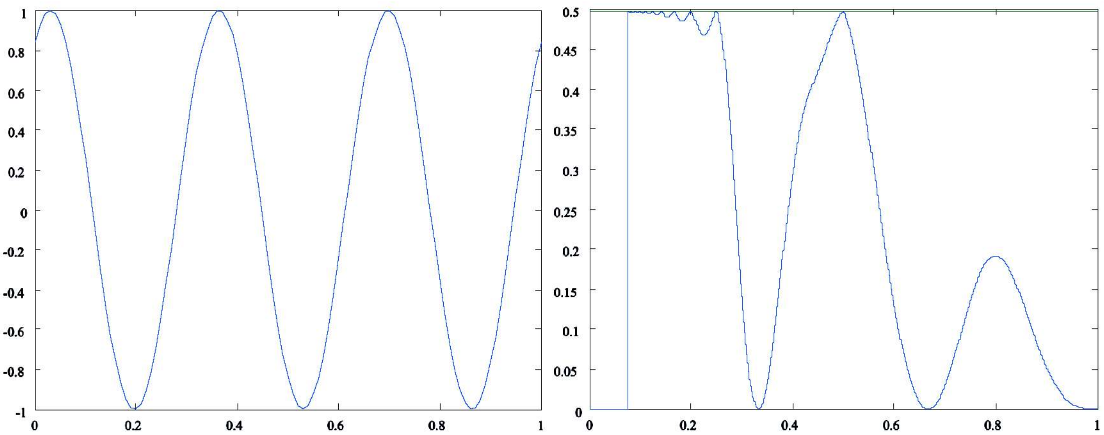


Рис. 2. Функция $J(T)$ для функции $f(t) = \sin(3 \cdot 2\pi t + 1)$, $t \in [0, 1]$

Пример 2. На рисунке 3 изображен график временного ряда $f(t)$ солнечной активности за последние 300 лет и функции $J(T)$. На графике хорошо виден 11-летний цикл и его кратные.

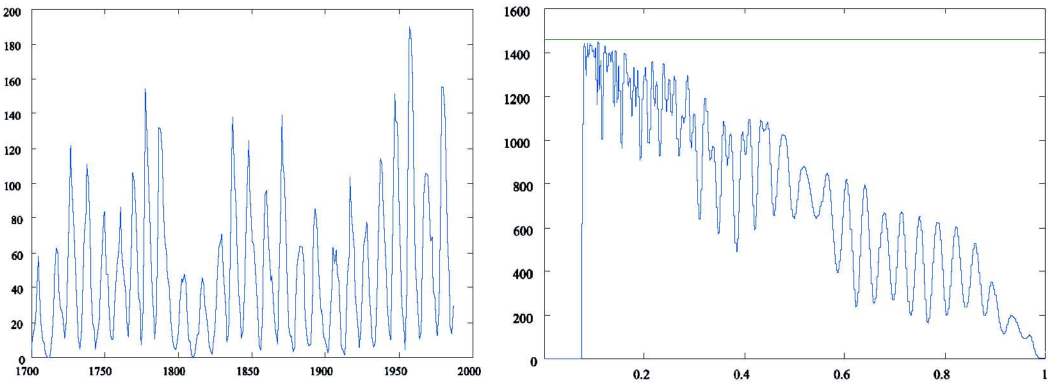


Рис. 3. Функция $J(T)$ для временного ряда солнечной активности

Пример 3. На рисунке 4 изображен график вейвлета Морли $f(t)$ и функции $J(T)$. На графике видно существование нетривиального периода $T_0 \simeq 1.2$ (второй локальный минимум функции $J(t)$ соответствует удвоенному периоду $2T_0$).

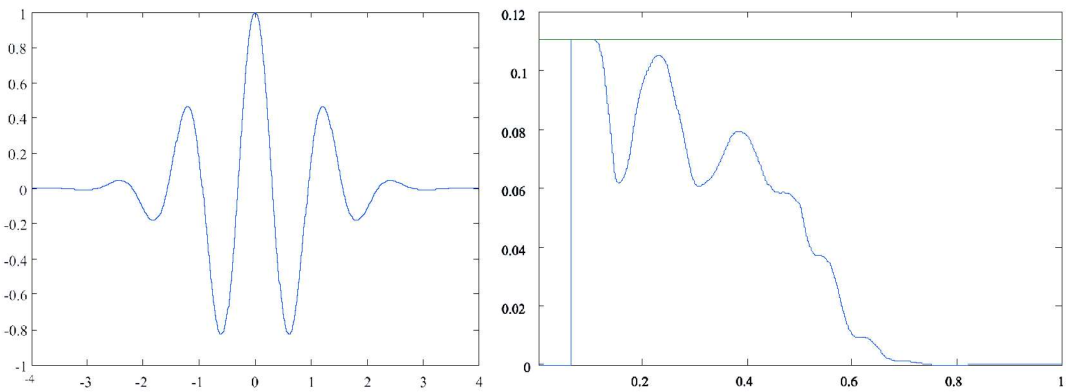


Рис. 4. Функция $J(T)$ для вейвлета Морли

2. Заключение

Вариационный подход к изучению финитных сигналов можно использовать и для других функциональных пространств [2,3]. В заключение сформулируем аналогичный результат для пространства Соболева $W_2^p[0, 1]$.

Теорема 3. *Пусть период T принадлежит интервалу $[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}]$, тогда минимум функционала $J(T)$ достигается при следующем выборе пе-*

риодической функции $g \in W_2^p[0,1]$:

$$g(t)|_{[0,T]} = \psi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)+\mathrm{L}_T f(t)+\ldots+\mathrm{L}_T^n f(t)}{n+1} + z_1(t), \\ \qquad \text{при } 0 < t < 1-nT, \\ \frac{f(t)+\mathrm{L}_T f(t)+\ldots+\mathrm{L}_T^{n-1} f(t)}{n} + z_2(t), \\ \qquad \text{при } 1-nT < t < T, \end{cases}$$

где функции $\mathrm{L}_T f(t) = f(t+T), \ldots, \mathrm{L}_T^k f(t) = f(t+kT)$. *Функции* $z_1(t)$ *и* $z_2(t)$ *удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению*

$$z^{(2p)}(t) - z^{(2p-2)}(t) + \ldots \pm z(t) = 0,$$

соответственно на отрезках $0 < t < 1-nT$ *и* $1-nT < t < T$. *Каждая из функций* $z_1(t)$ *и* $z_2(t)$ *линейно зависит от* $2p$ *параметров, которые выбираются так, чтобы* $\psi \in W_2^p[0,T]$, *функция* ψ *на отрезке* $[0,T]$ *была периодична периода* T *и доставляла минимум (1).*

Замечание 1. Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2 с использованием формулы интегрирования по частям.

Замечание 2. Аналогично (1) можно сформулировать более простую вариационную задачу в пространстве Соболева $W_2^1[a,b]$:

$$J_1(T) = \min\left\{\|f' - g\|_{L_2[a,b]} : g \in \mathcal{L}^1_{2,T}[a,b]\right\}, \quad (4)$$

где $f \in W_2^1[a,b]$. Решением будет служить периодическая составляющая f вместе с линейным трендом.

Представленный в работе численный алгоритм может быть использован при построении математического аппарата обработки сигналов, применен при создании автоматизированных систем цифровой обработки сигналов.

Литература

[1] Дмитриев, Е. В. *Гармонические естественные спектры и аппроксимация коротких сигналов* / [Эл. вар.]. – URL: http://short-signal-sp.pochta.ru

[2] Козаченко, М. С. *Выделение периодической составляющей конечного сигнала в пространстве Соболева* / М. С. Козаченко, В. В. Славский // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". – Новосибирск, 2011. – С. 101.

[3] Козаченко, М. С. *О периодической составляющей конечного сигнала в Соболевских пространствах* / М. С. Козаченко, В. В. Славский // Материалы Международной научной конференции "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование". – Волгодонск, 2011 – С. 9.

УДК 517. 95

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

И. О. Коркина, Н. А. Чуешева

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION FOURHT ORDER

I. O. Korkina, N. A. Chuesheva

Исследованием разрешимости краевых задач для уравнений четвертого порядка занимаются многие математики в России и за рубежом. Данная работа посвящена исследованию 5 краевых задач для одного уравнения четвертого порядка. Регулярное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка существует и единственно. Построены примеры неустойчивости решений трех других краевых задач для этого уравнения. Построен пример решения одной краевой задачи для этого уравнения, такой, что при аналитических коэффициентах и аналитической правой части данного уравнения решение не будет принадлежать пространству С. Л. Соболева $H^{4,1}(D)$.

Investigation solvability boundary value problem for differential equation fourth order be occupied with many mathematicians in Russia and in abroad. This paper devoted investigation five boundary value problems for one equation fourth order. Regular solution one boundary value problem for differential equation with partial derivative fourth order exist and uniquely. Examples non stability solutions for three other boundary value problem for this equation are constructed. Example solution one boundary value problem for this equation is constructed, such that under condition analyticity coeffificients and analytic on the right-hand side given equation, but solution is not belong Sobolev's space $H^{4,1}(D)$.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка, существование решения, единственность решения, пространство С. Л. Соболева, корректная постановка задачи, устойчивость решения.

Keywords: Boundary value problem, differential equation with partial derivative fourth order, existence solution, uniquely solution, correct statement problem and stability solution. The Sobolev's spaces.

В работе [3] (V. A. Galahtionov) изучаются локальные свойства и асимптотика решений задачи Коши и задачи со свободной границей для уравнения $u_t + u_{xxxx} + |u|^{p-1}u = 0$ в $R \times R_+$ с $p < 1$.

В работе [4] (Muhammad Usman, Bingyu Zhang) показано, что если n-периодическая функция малой амплитуды, то решение задачи
$u_t + u_x + uu_{xx} + u_{xxxx} = 0$,
$u(0,t) = n(t),\ t > 0,\ u_x(1,t) = 0,\ u(1,t) = 0$
становится в конце концов периодическим.

В работе [5] (Yusif A. Mamedov, Saleh Z. Akhmedov) о решении смешанной задачи для уравнения четвертого порядка с разрывным коэффициентом найдено решение смешанной задачи для уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + q(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$

в виде контурного интеграла.

В данной работе рассматривается несколько начально-краевых задач для одного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка. Нужно найти начально-краевые условия, при которых поставленная задача будет корректной. Привести примеры начально-краевых условий, при которых поставленная задача будет некорректной.

Задача 1. В области $D = \{(x,t) \in R^2,$ $x \in (0,1),\quad t \in (0,1)\}$ рассмотрим уравнение

$$k(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u_{xxx} + b(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_x + d(x,t)u = f(x,t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$u|_{x=0,\ x=1} = 0, \quad u_x|_{x=0,\ x=1} = 0. \quad (3)$$

Введём некоторые обозначения. Через C_L обозначим класс функций из пространства $C^\infty\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющих начально-краевым условиям (2),(3). Через $H^{4,1}(D)$ обозначим пространство, полученное замыканием пространства C_L по норме

$$\|u\|_{H^{4,1}(D)} = \left(\int\limits_D \left(u^2 + u_x^2 + u_t^2 + u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2\right) dD\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:*
1) $k(t) \in C^3[0,1],\quad c(x,t),\quad b(x,t),\quad a(x,t),$ $d(x,t) \in C^3(\overline{D})$.
2) Пусть существуют вещественные постоянные $\lambda,\ \delta_1,\ \delta_2,$ *такие, что*
$-\lambda k(t) - k_t(t) - a_x(x,t) + b_{xx}(x,t) - c_{xxx}(x,t) + 2d(x,t) \geq \delta_1 > 0,\ (x,t) \in \overline{D}$;
3) $-2b(x,t) + 3c_x(x,t) \geq \delta_2 > 0,\ (x,t) \in \overline{D}$;
4) $k(1) \leq 0$.
Тогда для решения задачи (1), (2) верна априорная оценка:

$$\|u\|^2_{L_2(D)} + \|u_x\|^2_{L_2(D)} + \|u_{xx}\|^2_{L_2(D)} \leq C_1\|f\|^2_{L_2(D)}.$$

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (1) на функцию $u(x,t)e^{\lambda t}$ и проинтегрируем по частям.

Замечание. Из леммы 1 следует, что функции $u(x,t),\ u_{xx}(x,t),\ u_x(x,t) \in L_2(D)$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$k(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u_{xxx} = -b(x,t)u_{xx} - a(x,t)u_x - d(x,t)u + f(x,t) = f_1(x,t),$$

где $f_1(x,t) \in L_2(D)$.

Лемма 2. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены все условия леммы 1 и следующие условия:*
5) $c(0,t) \leq 0,\quad c(1,t) \leq 0,\quad c_x(x,t) < 0,\ (x,t) \in \overline{D}$.
Тогда для решения задачи (1), (2), (3) верна априорная оценка:

$$\|u_{xxx}\|^2_{L_2(D)} + \|u_{xxxx}\|^2_{L_2(D)} \leq C_2\|f_1\|^2_{L_2(D)}.$$

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (1) на функцию $u_{xxxx}(x,t)$ и проинтегрируем по частям.

Замечание. Из леммы 1, леммы 2 и уравнения (1) следует, что функция $u_t(x,t) \in L_2(D)$. Следовательно, для решения задачи (1), (2), (3) будет верна априорная оценка:

$$\|u\|^2_{H^{4,1}(D)} \leq C\|f\|^2_{L_2(D)}.$$

Теорема единственности. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:*
1) $k(t) \in C^3[0,1],\quad c(x,t),\quad b(x,t),\quad a(x,t),$ $d(x,t) \in C^3(\overline{D})$.
2) Пусть существуют вещественные постоянные $\lambda,\ \delta_1,\ \delta_2,$ *такие, что*
$-\lambda k(t) - k_t(t) - a_x(x,t) + b_{xx}(x,t) - c_{xxx}(x,t) + 2d(x,t) \geq \delta_1 > 0,\ (x,t) \in \overline{D}$;
3) $-2b(x,t) + 3c_x(x,t) \geq \delta_2 > 0,\ (x,t) \in \overline{D}$;

4) $k(1) \leq 0$;
5) $c(0,t) \leq 0, \quad c(1,t) \leq 0, \quad c_x(x,t) < 0, \ (x,t) \in \overline{D}$.
Тогда решение задачи (1), (2), (3) из пространства $H^{4,1}(D)$ *единственно.*

Теорема существования. *Пусть правая часть уравнения (1)* $f(x,t) \in L_2(D)$. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:*
1) $k(t) \in C^3[0,1], \ c(x,t), \ b(x,t), \ a(x,t), \ d(x,t) \in C^3(\overline{D})$.
2) Пусть существуют вещественные постоянные $\lambda, \ \delta_1, \ \delta_2$, *такие, что:*
$-\lambda k(t) - k_t(t) - a_x(x,t) + b_{xx}(x,t) - c_{xxx}(x,t) + + 2d(x,t) \geq \delta_1 > 0, \ (x,t) \in \overline{D}$;
3) $-2b(x,t) + 3c_x(x,t) \geq \delta_2 > 0, \ (x,t) \in \overline{D}$;
4) $k(1) \leq 0$;
5) $c(0,t) \leq 0, \quad c(1,t) \leq 0, \quad c_x(x,t) < 0, \ (x,t) \in \overline{D}$.
Тогда решение задачи (1), (2), (3) из пространства $H^{4,1}(D)$ *существует.*

Доказательство. Доказывать существование решения задачи (1), (2), (3) будем методом Галеркина с выбором специального базиса. То есть приближенное решение этой задачи ищем в виде

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x),$$

где $w_i(x)$– собственные функции следующей задачи:

$$Pw_i(x,t) = w_{ixxxx}(x) = \lambda_i w_i(x), \quad i = 1, 2, ...,$$

$$w_i(x)|_{x=0, \ x=1} = 0, \quad w_{ix}(x)|_{x=0, \ x=1} = 0.$$

В [1] показано, что в пространстве С. Л. Соболева $W_2^4(0,1)$ существует счетная полная система собственных функций оператора P.

Коэффициенты $g_{im}(t)$ найдем из системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(k(t)u_{mt} + u_{mxxxx} + c(x,t)u_{mxxx} + b(x,t)u_{mxx} +$$

$$+ a(x,t)u_{mx} + d(x,t)u_m, w_j) = (f(x,t), w_j),$$

$j = 1, 2, ..., m$,
с начальным условием $g_{im}(t)|_{t=0} = 0$.
Здесь скалярное произведение $(.,.) = \int\limits_0^1 \cdot \cdot .dx$.

Аналогично, как в лемме (1), можно получить равномерную по m априорную оценку приближенного решения поставленной задачи.

Затем, заменяя $w_j(x)$ на $\frac{1}{\lambda_j} w_{jxxxx}(x)$, аналогично как в лемме 2, можно получить равномерную по m априорную оценку приближенного решения задачи (1), (2), (3). Следовательно, будет верна равномерная по m априорная оценка приближенного решения задачи (1), (2), (3)

$$\|u_m\|^2_{H^{4,1}(D)} \leq C \|f\|^2_{L_2(D)},$$

из которой следует, что из семейства функций $\{u_m(x,t)\}$ можно выделить такую подпоследовательность функций $\{u_\mu(x,t)\}$, что $u_\mu(x,t) \to u(x,t)$, при $\mu \to 0$, слабо в $H^{4,1}(D)$.

Предельная функция будет слабым решением поставленной задачи (1), (2), (3).

Приведем примеры некорректных постановок других начально-краевых условий для уравнения (1).

Задача 2. В области $D = \{(x,t) \in R^2, \ x \in (0,\pi), \ t \in (0,1)\}$ рассмотрим модельное уравнение
$(k(t) = -1, \ c(x,t) = b(x,t) = a(x,t) = d(x,t) = 0)$:

$$-u_t^n + u_{xxxx}^n = 0 \tag{4}$$

с начальным условием

$$u^n|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^5} \tag{5}$$

и краевыми условиями

$$u^n|_{x=0, \ x=\pi} = 0, \quad u_{xx}^n|_{x=0, \ x=\pi} = 0. \tag{6}$$

Решением задачи (4), (5), (6) будет функция

$$u^n(x,t) = \frac{e^{n^4 t} \sin nx}{n^5},$$

которая показывает, что нулевое решение этой задачи неустойчивое.

Задача 3. В области $D = \{(x,t) \in R^2, \ x \in (0,\pi), \ t \in (0,1)\}$ рассмотрим модельное уравнение
$(k(t) = -1, \ c(x,t) = b(x,t) = a(x,t) = d(x,t) = 0)$:

$$-u_t^n + u_{xxxx}^n = 0 \tag{7}$$

с начальным условием

$$u^n|_{t=0} = \frac{\cos nx}{n^5} \tag{8}$$

и краевыми условиями

$$u_x^n|_{x=0, \ x=\pi} = 0, \quad u_{xxx}^n|_{x=0, \ x=\pi} = 0. \tag{9}$$

Решением задачи (7), (8), (9) будет функция

$$u^n(x,t) = \frac{e^{n^4 t} \cos nx}{n^5},$$

которая показывает, что нулевое решение этой задачи неустойчивое.

Задача 4. В области $D = \{(x,t) \in R^2, \ x \in (0,\frac{\pi}{2}), \ t \in (0,1)\}$ рассмотрим модельное уравнение
$(k(t) = -1, \ c(x,t) = b(x,t) = a(x,t) = d(x,t) = 0)$:

$$-u_t^n + u_{xxxx}^n = 0 \tag{10}$$

с начальным условием

$$u^n|_{t=0} = \frac{\sin(2n-1)x}{n^5} \tag{11}$$

и краевыми условиями

$$u^n|_{x=0} = 0,\ u^n_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ u^n_{xx}|_{x=0} = 0,\ u^n_{xxx}|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (12)$$

Решением задачи (10), (11), (12) будет функция

$$u^n(x,t) = \frac{e^{(2n-1)^4 t}\sin(2n-1)x}{n^5},$$

которая показывает, что нулевое решение этой задачи неустойчивое.

Задача 5. В области $D = \{(x,t) \in R^2,\ x \in (0,\pi),\quad t \in (0, \frac{1}{2})\}$ рассмотрим уравнение

$$(1-t)u_t + u_{xxxx} + a(x,t)u_{xxx} - u_{xx} + a(x,t)u_x - \frac{3}{2}u = = -\frac{1}{2}\sin x \quad (13)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \quad (14)$$

и краевыми условиями

$$u|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \quad (15)$$

Пусть $a(x,t)-$ аналитическая функция. Решением этой задачи будет функция

$$u(x,t) = \left(\sqrt{1-t} - 1\right)\sin x. \quad (16)$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (13) – аналитические функции, но решение (16) задачи (13), (14),(15) не принадлежит классу функций $H^{4,1}(D)$.

Литература

[1] Березанский, Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов* / Ю. М. Березанский. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[2] Чуешева, Н. А., *Об одной смешанной задаче для уравнения 4-го порядка* // Н. А. Чуешева // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. – Новосибирск, 1979. – С. 146 – 151.

[3] Galahtionov, V. A. *On interfaces and oscillatory solutions of higher order semilinear parabdic equations with non Lipschitz nonlinearities* // V. A. Galahtionov // Stud. Appl. Math. – 2006. – 117. – № 4. – P. 353 – 389.

[4] Usman, Muhammad *Forced oscillations of a olass of nonlinear dispersive wave equations and their stability* / Muhammad Usman, Bingyu Zhang // J. Syst. Sci and Complex. – 2007. – Vol. 20. – № 2.– С. 284 – 292.

[5] Mamedov, Y. A. *On solution of a mixed problem for an equation of the fourth order with discontinuers coefficient* / Yusif A. Mamedov, Saleh Z. Akhmedov // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. - Techn. and Math. Sci. – 2006. – Vol. 26. – № 4. – P. 137 – 144.

УДК 517. 95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Е. В. Максимова, Н. А. Чуешева

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION FOURHT ORDER

E. V. Maksimova, N.A. Chuesheva

Исследованием разрешимости краевых задач для уравнений четвертого порядка занимаются многие математики в России и за рубежом. Данная работа посвящена исследованию 3 краевых задач для одного уравнения четвертого порядка. Регулярное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка существует и единственно. Построены примеры не единственности решений двух других краевых задач для этого уравнения.

Investigation solvability boundary value problem for differential equation fourth order be occupied with many mathematicians in Russia and in abroad. This paper devoted investigation three boundary value problem for one equation fourth order. Regular solution one boundary value problem for differential equation with partial derivative fourth order exist and uniquely. Constructed examples non uniquely solutions for two other boundary value problem for this equation.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка, существование решения, единственность решения, корректная постановка задачи.

Keywords: Boundary value problem, differential equation with partial derivative fourth order, existence solution, uniquely solution, correct statement problem.

В последние годы вопросам разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений высокого порядка были посвящены много работ.

Например, в работе [1] (Д. Аманова) рассматривалось следующее уравнение:
$u_{tt} + sgn\ t\ u_{xxxx} = f(x,t)$.

В работе [5] (Ж. А. Отаровой) рассматривалась краевая задача для уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(x,t).$$

Получены условия самосопряженности, при которых соответствующая задача имеет точечный спектр.

В работе [2] (Д. Аманова, Ж. А. Отаровой) изучается самосопряженная краевая задача для уравнения $u_{tt}+u_{xxxx} = f(x,t)$. Получены условия регулярной, сильной и почти всюду разрешимости этой задачи.

В статье [7] (Yan Ding Wang) исследованы вопросы существования, единственности и разрушения решений начально-краевой задачи для нелинейного уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} = (g(u_x))_x\,,\quad 0 < x < l,\quad 0 < t < T.$$

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка. Нужно найти краевые условия, при которых поставленная задача будет корректной. Привести примеры краевых условий, при которых поставленная задача будет некорректной.

Задача 1. В области $D = \{(x,t) \in R^2,\ x \in (0,1),\quad t \in (0,1)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + cu_x + du + eu_t = f(x,t) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_{t=0,\ t=1} = 0,\quad u|_{x=0,\ x=1} = 0,\quad u_x|_{x=0,\ x=1} = 0. \tag{2}$$

Введём некоторые обозначения. Через C_L обозначим класс функций из пространства $C^\infty(\overline{D})$, удовлетворяющих граничным условиям (2). Через $H^{4,2}(D)$ обозначим пространство, полученное замыканием пространства C_L по норме:

$$\|u\|_{H^{4,2}(D)} = \left(\int\limits_D \left(u^2 + u_x^2 + u_t^2 + u_{xx}^2 + u_{tt}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxt}^2 + u_{xxxx}^2\right) dD\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:*
1) $b \geq 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда для решения задачи (1), (2) верна априорная оценка:

$$\|u\|^2_{L_2(D)} + \|u_t\|^2_{L_2(D)} + \|u_{xx}\|^2_{L_2(D)} \leq C\|f\|^2_{L_2(D)}.$$

Замечание. Из леммы 1 следует, что функции $u(x,t),\ u_{xx}(x,t),\ u_t(x,t) \in L_2(D)$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} = \\ &= f(x,t) - bu_{xx} - cu_x - du - eu_t = f_1(x,t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $f_1(x,t) \in L_2(D)$.

Лемма 2. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:*
1) $a \geq 0,\quad b \geq 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда для решения задачи (1), (2) верны априорные оценки:

$$\|u_{txx}\|^2_{L_2(D)} + \|u_{xxxx}\|^2_{L_2(D)} \leq 4\|f_1\|^2_{L_2(D)}.$$

$$\|u_{tt}\|^2_{L_2(D)} \leq \|f_1\|^2_{L_2(D)}.$$

Доказательство леммы 1 и леммы 2 проводится методом интегрирования по частям с применением мультипликативных неравенств.

Теорема единственности. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия: 1) $a \geq 0,\quad b \geq 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда решение задачи (1), (2) из пространства $H^{4,2}(D)$ единственно.*

Задача 2. В области $D = \{(x,t) \in R^2,\ x \in (0,\pi),\quad t \in (0,\pi)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + au_x + (b+2)u = 0. \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u|_{t=0,\ t=\pi} = 0, \\ &u|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \\ &u_{xx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение поставленной задачи будет не единственным. Помимо нулевого решения этой задачи, ненулевая в этой области функция $u(x,y) = \sin t \sin x$ удовлетворяет краевым условиям (5) и уравнению (4).

Задача 3. В области $D = \{(x,t) \in R^2, x \in (0,\pi), \quad t \in (0,\pi)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + au_x + (b+2)u = 0. \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u|_{t=0,\ t=\pi} = 0,\\ &u_x|_{x=0,\ x=\pi} = 0,\\ &u_{xxx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение поставленной задачи будет не единственным. Помимо нулевого решения этой задачи, ненулевая в этой области функция

$$u(x,y) = \sin t \cos x$$

удовлетворяет краевым условиям (7) и уравнению (6).

Теорема существования. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия: 1) $a \geq 0, \quad b \geq 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда решение задачи (1), (2) из пространства $H^{4,2}(D)$ существует.*

Доказательство. Доказывать существование решения задачи (1), (2) будем методом Галеркина с выбором специального базиса. То есть приближенное решение этой задачи ищем в виде

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i(x,t),$$

где $w_i(x,t)$– собственные функции следующей задачи:

$$Pw_i(x,t) = w_{itt}(x,t) - w_{ixxxx}(x,t) = \lambda_i w_i(x,t),$$

$$\begin{aligned} &w_i(x,t)|_{t=0,\ t=1} = 0,\\ &w_i(x,t)|_{x=0,\ x=1} = 0,\\ &w_{ix}(x,t)|_{x=0,\ x=1} = 0.\\ &i = 1, 2, ... \end{aligned}$$

В [2] показано, что в пространстве $H^{4,2}(D)$ существует счетная полная система собственных функций оператора P. Коэффициенты g_{im} находятся из системы алгебраических уравнений:

$$(u_{mtt} - u_{mxxxx} + au_{mxxx} + bu_{mxx} + cu_{mx} + du_m + eu_{mt}, w_j) = (f(x,t), w_j), \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Аналогично, как в леммах, можно получить равномерные по m оценки. Тогда из семейства функций $\{u_m(x,t)\}$ можно выделить такую подпоследовательность, что $u_m(x,t) \to u(x,t)$ слабо в пространстве $H^{4,2}(D)$. Предельная функция будет слабым решением поставленной задачи.

Литература

[1] Аманов, Д. *Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка* / Д. Аманов // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика Ильи Несторовича Векуа. Новосибирск, 28 мая – 2 июня, 2007: тезисы докладов. – Новосибирск: НГУ, 2007. – С. 61.

[2] Аманов, Д. *Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка* / Д. Аманов , Ж. А. Отарова // Узб. мат. ж. – 2008. – № 3. – С. 13 – 22.

[3] Аманов, Д. *Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка*/ Д. Аманов , А. В. Юлдашева // Узб. мат. ж. – 2007. – № 4. – С. 3 – 8.

[4] Березанский, Ю. М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов* / Ю. М. Березанский. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[5] Отарова, Ж. А. *Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка* / Ж. А. Отарова // Uzbek. Math. J. – 2008. – № 2. – С. 74 – 80.

[6] Чуешева, Н. А. *Об одной смешанной задаче для уравнения 4-го порядка* / Н. А. Чуешева // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: сб. науч. тр. АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. – Новосибирск, 1979. – С. 146 – 151.

[7] Wang, Yan Ding. *The existence and nonexistence of global solutions for a nonlinear wave equation* / Wang Yan Ding // Math. Res. and expo.– 2009. – Vol. 29 – № 1. – P. 164 – 168.

УДК 517.518.34 + 517.537.3

О НАХОЖДЕНИИ ГРАНИЦ РИССА СПЛАЙН-БАЗИСА С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Е. В. Мищенко

DETERMINATION OF RIESZ BOUNDS FOR SPLINE BASIS WITH THE USE OF TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

E. V. Mishchenko

При нахождении верхней и нижней границы Рисса для B-сплайна произвольного порядка m мы приходим к необходимости анализа функциональных рядов вида $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-j)^{2m}}$. Показано, что сумма указанного ряда представляет собой отношение тригонометрических полиномов определенного вида. Доказаны свойства полиномов, с помощью которых устанавливаются границы Рисса. Одним из приложений полученных результатов являются формулы для нахождения сумм некоторых степенных рядов.

The problem on determination of the upper and lower Riesz bounds for the m-th order B-spline basis is reduced to analysis of the series $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-j)^{2m}}$. It is shown that the sum of the series is a ratio of certain trigonometric polynomials. Some properties of these polynomials which help to determine the Riesz bounds are established. The results of the work are applied in the theory of series to find sums of some power series which go back to L. Euler.

Ключевые слова: B-сплайны, базис Рисса, верхняя и нижняя границы Рисса, тригонометрические полиномы, степенные ряды.

Keywords: B-splines, Riesz basis, upper and lower Riesz bounds, trigonometric polynomials, power series, Bernoulli and Euler numbers.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08-01- 00888), Федерального агентства по образованию и Министерства образования и науки РФ (регистрационный номер проекта 2.1.1/4591) и междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2009-2011 (номер проекта 91).

1. Введение

Согласно определению (см., например, [1]), семейство функций $\{f_k(x),\ k\ \ 1,\ 2,\ \dots\}$ образует базис Рисса (или безусловный базис) в некотором гильбертовом пространстве H, если

1) линейная оболочка $\{f_k(x), k=1,2,\dots\}$ является плотной в H;

2) существуют две константы $0<\mathbf{A},\mathbf{B}<\infty$, называемые соответственно нижней и верхней границей Рисса, такие, что для любой последовательности $\{c_k\}\in l_2$ почти всюду выполняются неравенства:

$$\mathbf{A}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\le||\sum_{k=1}^{\infty}c_kf_k(.)||_H^2\le\mathbf{B}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2.$$

Второе свойство также называют условием Рисса.

Вопрос о базисе Рисса возникает, например, в теории вейвлетов при построении так называемого кратномасштабного анализа пространства Ł2, другими словами, цепочки вложенных друг в друг подпространств $\ldots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\ldots$, удовлетворяющих некоторому набору требований. Одним из них является существование функции $\phi(x)$ из V_0, семейство сдвигов которой

$$\{\phi(\cdot-k),k\in\mathbf{Z}\} \qquad (1)$$

образует базис Рисса в V_0. В соответствии с приведенным выше определением, необходимо установить два свойства рассматриваемого семейства (1):

1′) является ли линейная оболочка $\{\phi(\cdot-k),k\in\mathbf{Z}\}$ плотной в V_0;

2′) существуют ли две константы $0<\mathbf{A},\mathbf{B}<\infty$ (нижняя и верхняя границы Рисса), такие, что для любой последовательности $\{c_k\}\in l_2$ почти всюду верно:

$$\mathbf{A}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\le||\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\phi(\cdot-k)||_{Ł2}^2\le\mathbf{B}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2.$$

Известна теорема [2], устанавливающая эквивалентность между условием Рисса и свойствами преобразования Фурье функции ϕ в пространстве Ł2.

Теорема 1. *Для любой функции $\phi\in Ł2$ и констант $0<A\le B<\infty$ следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) множество $\{\phi(.-k),k\in\mathbf{Z}\}$ удовлетворяет условию Рисса с константами $2\pi A, 2\pi B$,

(ii) преобразование Фурье $\widehat{\phi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbf{R}}e^{-ix\xi}\phi(x)dx$ удовлетворяет неравенству

$$A\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{\phi}(\xi+2\pi k)|^2\le B \qquad (2)$$

почти всюду.

В настоящей работе мы установим свойство (ii) для семейства вида (1), в котором в качестве функции ϕ выступает B-сплайн порядка m. Как будет показано ниже, для преобразования Фурье $\widehat{B}_m$ сплайна порядка m верна следующая формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{B}_m(\xi + 2\pi k)\right|^2 = \\ = \frac{\sin^{2(m+1)}(\xi/2 + \pi k)}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi/2 + \pi k)^{2(m+1)}}. \quad (1)$$

Таким образом, вопрос о нахождении верхней и нижней границ Рисса сплайн-базиса можно свести к нахождению равномерных оценок сверху и снизу на интервале сходимости для ряда вида $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}, m = 1, 2, \ldots$.

Исследуя свойства сплайн-базиса в [2], К. Чуи приводит формулу:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + \pi k)^{2m}} = -\frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \operatorname{ctg} x.$$

Отмечая, что полученная формула – явная и служит инструментом для нахождения границ Рисса, К. Чуи [2, стр. 150] считает тем не менее ее слишком сложной в применении для больших значений m.

Между тем, в [3] замечено, что из известной формулы

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}, \quad (3)$$

можно вывести более общие выражения

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x},$$

$m = 1, 2, \ldots$, используя проверяемое непосредственной выкладкой утверждение, что для любой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ верно

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \Big(\frac{d^2}{dv^2} - \Big(v \frac{d}{dv}\Big)^2\Big) f, \quad (4)$$

где $v = \sin \pi x$. Используя это замечание и формулу (3), в следующем параграфе покажем, что для произвольного положительного целого m ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$ представляет собой отношение тригонометрических полиномов специального вида.

2. Получение представлений для ряда $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$

Теорема 2. *Для рядов вида* $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$, $m = 1, 2, \ldots$, *справедливы следующие представления:*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2(m+1)}} = \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2m+1)!} \frac{S_m(\sin^2 \pi x)}{\sin^{2m+2} \pi x}, \quad (5)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2(m+1)}} = \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2m+1)!} \frac{C_m(\cos^2 \pi x)}{(1 - \cos^2 \pi x)^{m+1}}, \quad (6)$$

в которых функции S_m и C_m являются полиномами степени m, т. е.

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{m} s_k^m x^k \quad (7) \quad \text{и} \quad C_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k^m x^k, \quad (8),$$

а коэффициенты s_k^m и c_k^m в формулах (7), (8) находятся из рекуррентных соотношений, причем все c_k^m в формуле (8) являются положительными. Формулы для нахождения коэффициентов s_k^m имеют вид:

$$s_0^0 = 1, \quad s_0^{m+1} = s_0^m (2m+3)(2m+2) = (2m+3)!,$$

$$s_{m+1}^{m+1} = -4 s_m^m = (-4)^{m+1},$$

$$s_k^{m+1} = \\ = (2m+3-2k)(2m+2-2k) s_k^m - 4(m+2-k)^2 s_{k-1}^m, \quad (9)$$

если $0 < k < m+1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; *коэффициенты* c_k^m, $0 < k < m+1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ *находятся из следующих соотношений:*

$$c_0^0 = 1, \quad c_0^{m+1} = 2c_1^m + 2(m+1) c_0^m,$$

$$c_{m+1}^{m+1} = 4 c_m^m = 4^{m+1},$$

$$c_k^{m+1} = (2k+2)(2k+1) c_{k+1}^m + \\ + \big(8k(m+1-k) + 2(m+1+k)\big) c_k^m + 4(m+2-k)^2 c_{k-1}^m, \quad (10)$$

в которых мы полагаем, что $c_k^m = 0$, если $m < k$ или $0 < k$.

Доказательство. Обозначим $\xi = \pi x$, $v = \sin \xi$, $w = \cos \xi$. По аналогии с (4) мы получаем, что для любой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ верно

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \Big((1 - v^2) \frac{d^2 f}{dv^2} - v \frac{df}{dv}\Big) \quad (11')$$

и

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \Big((1 - w^2) \frac{d^2 f}{dw^2} - w \frac{df}{dw}\Big). \quad (11'')$$

Из формулы (2) очевидно следует справедливость (9) и (10) для $m = 0$

$$S_0(v^2) = C_0(w^2) \equiv 1, \quad \text{т. е.} \quad s_0^0 = c_0^0 = 1.$$

Получим формулы (5),(7),(9). Пусть для некоторого m известно, что

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \pi^{2m}\frac{S_m(v^2)}{v^{2m+2}},$$

и функция S_m имеет вид (7).

Используя (11′) получаем, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-j)^{2(m+2)}} =$$

$$= \frac{1}{(2(m+2)-1)!}\frac{d^{2(m+1)}}{dx^{2(m+1)}}\Big(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}\Big) =$$

$$= \frac{1}{(2(m+2)-1)!}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}\Big) =$$

$$= \frac{\pi^{2m}}{(2(m+2)-1)!}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{\sum_{k=0}^m s_k^m v^{2k}}{v^{2(m+1)}}\Big) =$$

$$= \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)!}\Big((1-v^2)\frac{d^2}{dv^2} - v\frac{d}{dv}\Big)\frac{\sum_{k=0}^m s_k^m v^{2k}}{v^{2(m+1)}} =$$

$$= \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)!v^{2(m+2)}}\Big((2m+2)(2m+3)s_0^m +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} s_k^m v^{2k}(2m+3-2k)(2m+2-2k) -$$

$$- \sum_{k=0}^{m} s_k^m v^{2k+2}(2m+2-2k)^2\Big) =$$

$$= \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)!}\frac{\sum_{k=0}^{m+1} s_k^{m+1}v^{2k}}{v^{2(m+2)}},$$

причем

$$s_0^{m+1} = s_0^m(2m+3)(2m+2),$$

$$s_k^{m+1} = s_k^m(2m+3-2k)(2m+2-2k) - s_{k-1}^m 4(m+2-k)^2,$$

$$s_{m+1}^{m+1} = -4s_m^m.$$

Формулы (5), (7), (9) доказаны.

Аналогично, применяя (11″), получаем формулы (6), (8), (10). Положительность коэффициентов c_k^m в формуле (8) непосредственно следует из вида (10).

Функции C_m и S_m обладают рядом свойств, которые мы сформулируем в следующем утверждении.

Утверждение 1. *Функции $C_m(\cos^2 \xi)$ и $S_m(\sin^2 \xi)$, как функции от ξ, обладают следующими свойствами (см. рис. 1):*

1. C_m и S_m определены на всей оси $\mathbf{R}$ и принимают только положительные значения.

2. C_m и S_m – π-периодические функции, симметричные относительно $\xi = 0$.

3. Экстремумы C_m и S_m расположены в точках $\xi = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; максимумы расположены в точках $\xi = k\pi$, минимумы – в точках $\xi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. При этом $\frac{C_m(\cos^2 k\pi)}{(2m+1)!} = \frac{S_m(\sin^2 k\pi)}{(2m+1)!} = 1$, а значения $\frac{C_m(\cos^2 \frac{\pi}{2})}{(2m+1)!} = \frac{S_m(\sin^2 \frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}$ стремятся к нулю при $m \to \infty$.

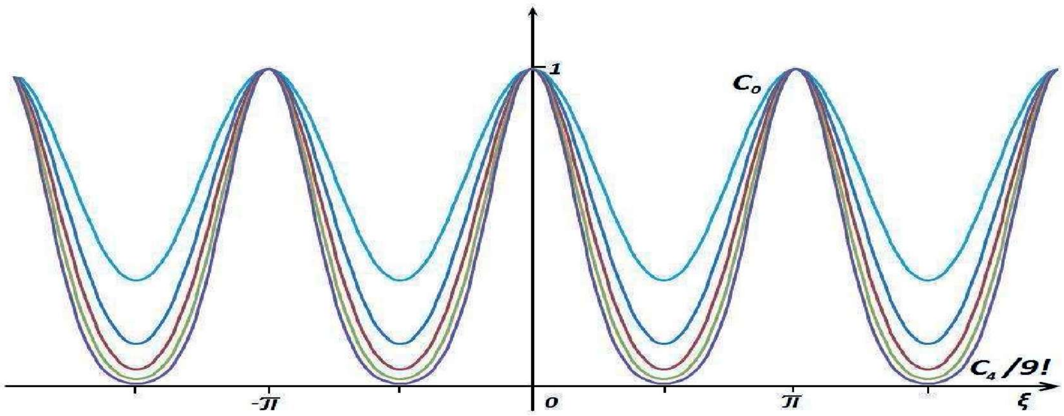


Рис. 1. Функции $\frac{C_m(\cos^2 \xi)}{(2m+1)!}$, $m = 1, 2, 3, 4$

Доказательство. Из теоремы 2 мы получаем, что $C_m(\cos^2 \xi) = S_m(\sin^2 \xi)$.

Положительность функций $C_m(\cos^2 \xi)$ и $S_m(\sin^2 \xi)$ следует из вида функции $C_m(\cos^2 \xi)$ и замечания, что для любых m и k, таких, что $m = 1, 2, \ldots,$ и $0 \le k \le m$, коэффициенты c_k^m – положительные.

Свойство 2 очевидным образом следует из свойств sin и cos:

$$C_m(\cos^2(\xi+\pi)) = C_m(\cos^2 \xi) = C_m(\cos^2(-\xi)),$$

$$S_m(\sin^2(\xi+\pi)) = S_m(\sin^2 \xi) = S_m(\sin^2(-\xi)).$$

Экстремумы функции находим, анализируя значения их первых производных по ξ, при этом, учитывая свойство периодичности 2, достаточно рассмотреть отрезок $[0, \pi]$:

$$\frac{d}{d\xi} C_m(\cos^2 \xi) =$$

$$= -\Big[\sum_{k=0}^{m-1} 2(k+1)\ c_{k+1}^m \cos^{2k} \xi \Big] \cos \xi \sin \xi = 0.$$

В силу положительности коэффициентов c_{k+1}^m, выражение $\sum\limits_{k=0}^{m-1} 2(k+1)\ c_{k+1}^m \cos^{2k} \xi > 0$ для любого $\xi \in [0, \pi]$. Следовательно, первые производные исследуемых функций обращаются в ноль в тех точках, где $\cos \xi = 0$ либо $\sin \xi = 0$. При этом $\frac{d}{d\xi} C_m(\cos^2 \xi) < 0$, если $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\frac{d}{d\xi} C_m(\cos^2 \xi) > 0$, если $\xi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Свойство 3 доказано.

Для доказательства свойства 4 заметим, что в точках максимумов

$$C_m(\cos^2 k\pi) = S_m(\sin^2 k\pi) = s_0^m = (2m+1)!$$

Найдем значения в точках минимумов. Рассмотрим $\xi = \frac{\pi}{2}$. В силу (5):

$$\frac{S_m(\sin^2 \frac{\pi}{2})}{(2m+1)!} = 2\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{2(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}}.$$

Из того, что $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)^{2m}}$ для любого целого $m \geq 1$, а последовательность $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m}$ стремится к 0 при $m \to \infty$, следует, что $\frac{S_m(\sin^2 \frac{\pi}{2})}{(2m+1)!} > \frac{S_{m+1}(\sin^2 \frac{\pi}{2})}{(2m+3)!}$ и числовая последовательность $\frac{S_m(\sin^2 \frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}$ стремится к нулю при $m \to \infty$. Все свойства доказаны.

Имея рекуррентные формулы (9), (10), мы можем находить полиномы S_m и C_m любого порядка. Для примера в таблицах 1 и 2 помещены значения коэффициентов c_k^m, s_k^m для значений $m = 0, 1, 2, 3, 5$.

Таблица 1

Значения c_k^m

$m \quad \backslash \quad k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	4				
2	16	88	16			
3	272	2880	1824	64		
4	7936	137216	185856	31616	256	
5	353792	9061376	21253376	8728576	518656	1024

Таблица 2

Значения s_k^m

$m \quad \backslash \quad k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	6	-4				
2	120	-120	16			
3	5040	-6720	2016	-64		
4	362880	-604800	282240	-32640	256	
5	39916800	-79833600	50561280	-10813440	523776	-1024

3. Определение верхней и нижней границ Рисса для сплайн-базиса

Напомним определение B-сплайна. Функция B_m, B-сплайн порядка m определяется рекуррентно: $B_0(x) = \chi_{[0,1)}$, где $\chi_{[0,1)}$ –характеристическая функция отрезка [0,1):

$$B_m(x) = B_{m-1}(x) * B_0(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} B_{m-1}(x-y) B_0(y) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 B_{m-1}(x-y) dy. \quad (2)$$

Так как $\widehat{B_0}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi/2} \frac{\sin \xi/2}{\xi/2}$, из свойств свертки следует, что

$$\widehat{B}_m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(e^{-i\xi/2} \frac{\sin \xi/2}{\xi/2} \Big)^{m+1}.$$

Рассмотрим множество $\mathrm{span}\{B_m(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Через V_m^0 обозначим его замыкание в норме $\| \ \|_{L^2(\mathbf{R})}$. V_m^0 является линейным пространством, подпространством $L^2(\mathbf{R})$.

Утверждение 2. *Семейство* $\{B_m(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ *образует базис Рисса в* V_m^0.

Доказательство. Свойство $1'$ из определения базиса Рисса очевидно выполнено. Для установления свойства $2'$ получим оценку для суммы

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{B}_m(\xi+2\pi k)\right|^2$ и применим теорему 1.

Используя формулы (5), (6), получаем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{B}_m(\xi+2\pi k)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2(m+1)}(\xi/2+\pi k)}{(\xi/2+\pi k)^{2(m+1)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sin^{2(m+1)}(\xi/2)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\xi/2+\pi k)^{2(m+1)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{C_m(\cos^2(\xi/2))}{(2m+1)!}=\frac{1}{2\pi}\frac{S_m(\sin^2(\xi/2))}{(2m+1)!}.$$

Согласно свойству 3 из утверждения 1 об экстремумах функций C_m и S_m:

$$\frac{2^{2m+2}}{\pi^{2m+3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{C_m(\cos^2(\xi/2))}{(2m+1)!}\Big|_{\xi=\pi}\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{B}_m(\xi+2\pi k)\right|^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\frac{C_m(\cos^2(\xi/2))}{(2m+1)!}\Big|_{\xi=0}=\frac{1}{2\pi}.$$

Тогда по теореме 1 нижней и верхней границами Рисса являются константы:

$$\mathbf{A_m}=\frac{2^{2m+2}}{\pi^{2m+2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}},\quad \mathbf{B_m}=1.$$

Отсюда следует, что значение верхней границы не зависит от значения m, а значения нижней границы стремятся к нулю при $m\to\infty$.

4. О нахождении сумм некоторых рядов

Результаты, полученные во втором параграфе, имеют приложение в теории степенных рядов. С их помощью можно находить точные значения для рядов вида:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}\quad\text{и}\quad\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}},\tag{12}$$

где m – произвольное положительное целое число.

Вводя обозначения $a_j=\frac{1}{2j-1}$, $b_j=(-1)^{j+1}a_j^{2m+1}$, замечаем, что $a_j=-a_{-j+1}$, $b_j=b_{-j+1}$. Поэтому:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}=$$

$$=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2j)^{2m}},\tag{13}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}}=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}}=$$

$$=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(1+2j)^{2m+1}}.\tag{14}$$

Согласно теореме 1:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{1}{2}-j)^{2m}}=$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}\frac{C_{m-1}(\cos^2\frac{\pi}{2})}{\sin^{2m}(\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{2^{2m}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}c_0^m.$$

С учетом (13), имеем формулу для нахождения точной суммы:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}=\frac{1}{2^{2m+1}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}c_0^{m-1}.\tag{15}$$

Подставляя значения c_0^m из таблицы 1, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}\quad\text{и т. д.}$$

Теперь исследуем выражение (14). Дифференцируя выражение (5) с учетом представления (7), нетрудно установить, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-j)^{2m+1}}=$$

$$=\frac{\pi^{2m+1}}{(2m)!}\frac{2\sum\limits_{k=0}^{m-1}(m-k)s_k^{m-1}\sin^{2k}\pi x}{\sin^{2m+1}\pi x}\cos\pi x.\tag{16}$$

Справедливо представление:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(x-j)^{2m+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{2m+1}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{x}{2}-j)^{2m+1}}-\frac{1}{(\frac{x-1}{2}-j)^{2m+1}}\Big).\tag{17}$$

Вынося множитель за знак суммирования и используя (17), перепишем левую часть выражения (14):

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}}=$$

$$=\frac{1}{(-1)^{2m+2}2^{2m+1}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(x-j)^{2m+1}}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{4m+2}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{x}{2}-j)^{2m+1}}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{x-1}{2}-j)^{2m+1}}\Big)\Big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m+1}}$ является нечетной функцией аргумента x, окончательно получаем:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{1}{2^{4m+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{4}-j)^{2m+1}}.$$

Таким образом, с учетом (16) окончательная формула для нахождения суммы ряда (14) выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{4m+1}(2m)!} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) s_k^{m-1} 2^{m-k}. \tag{18}$$

Используя приведенные в таблице 2 значения s_k^m, находим, что:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^7} = \frac{61\pi^7}{184320} \quad \text{и т. д.}$$

Для частных случаев $m = 1, 2$ эти значения были найдены Эйлером [4]. В известном справочнике [5] приведены формулы, полученные Жолли [6], согласно которым:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^{2m}} = \frac{(2^{2m}-1)\pi^{2m}}{2(2m)!} |B_{2m}|$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}(2m)!} |E_{2m}|,$$

где B_{2m} и E_{2m} обозначают числа Бернулли и Эйлера соответственно. Отсюда и из формул (15) и (18) мы получаем формулы для определения B_{2m} и E_{2m}:

$$B_{2m} = (-1)^{m+1} \frac{c_0^{m-1}}{2m 2^{2m}(2^{2m}-1)},$$

$$E_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) s_k^{m-1} 2^{m-k}.$$

Эти формулы дают способ определения чисел Бернулли и Эйлера, отличающийся от изложенного в классических учебниках [7 – 9].

5. Заключение

Мы доказали, что сумма функционального ряда $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$ представляет собой отношение тригонометрических полиномов. Доказанные нами свойства этих полиномов позволяют утверждать, что в пространстве кусочно-полиномиальных (порядок полинома не превосходит m) функций с разрывами в целочисленных точках семейство целочисленных сдвигов B-сплайна порядка m образует базис Рисса. Найденные нами границы Рисса являются неулучшаемыми. Приложением полученных результатов являются формулы для нахождения сумм степенных рядов, которые для двух частных случаев были рассмотрены Л. Эйлером. Мы также получили связь коэффициентов найденных полиномов с числами Бернулли и Эйлера.

Литература

[1] *Функциональный анализ* /под ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1964. – 424 с.

[2] Чуи, К. *Введение в вейвлеты*/ К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

[3] Соболев, С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул* / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

[4] Эйлер, Л. *Введение в анализ бесконечных*/ Л. Эйлер. – М.: Физматгиз, 1961. – 315 с.

[5] Градштейн, И. С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

[6] Jolley, L.B. *Summation of Series* / L. B. Jolley. – London: Chapman and Hall LTD, 1925. – 251 p.

[7] Гельфонд, А. О. *Исчисление конечных разностей, ч.1*/ А. О. Гельфонд. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 176 с.

[8] Фихтенгольц, Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2* / Г. М. Фихтенгольц. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 860 с.

[9] Чезаро, Э. *Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч.1* / Э. Чезаро. – Л.; М.: ОНТИ, 1936. – 592 с.

УДК 517.5

ФУНКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. С. Романов

FUNCTIONS AND MAPPINGS OF SOBOLEV TYPE ON METRIC SPACES

A. S. Romanov

Статья содержит краткий обзор теории функциональных классов соболевского типа, определяемых на метрическом пространстве (X, d), снабженном борелевской мерой μ. Более подробно рассматриваются введенные П. Хайлашем банаховы функциональные пространства $M_p^1(X, d, \mu)$ и связанные с ними классы отображений.

This article contains a short review of the theory of functional classes of Sobolev type defined on a metric space (X, d), equipped with a Borel measure μ. More detailed discussion of Banach function spaces $M_p^1(X, d, \mu)$, introduced by P. Hajlasz, and related classes of mappings.

Ключевые слова: пространства Соболева, метрические пространства, теоремы вложения.

Keywords: Sobolev spaces, metric spaces, embedding theorems.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-00662) и программы поддержки ведущих научных школ (НШ–6613.2010.1).

Изучение функциональных классов, в той или иной мере являющихся обобщением классических пространств Соболева, уже в течение многих лет является актуальной задачей, имеющей многочисленные приложения в разных областях математики – анализе, геометрии, теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении ... В настоящее время теория функциональных классов соболевского типа активно развивается в различных направлениях.

К уже традиционным направлениям, как правило, имеющим практические приложения, можно отнести введение и изучение в областях евклидова пространства новых классов вещественнозначных функций, гладкость которых понимается в некотором обобщенном смысле. Так, в работе О. В. Бесова [4] введены и изучаются функции соболевского типа с "переменной гладкостью", а в книге Д. Эдмундса и В. Д. Эванса [26] рассматриваются "абстрактные пространства Соболева" $W^k(X(\Omega), Y(\Omega))$, функции которых принадлежат банахову пространству $X(\Omega)$ и имеют обобщенные производные, принадлежащие банахову пространству $Y(\Omega)$.

В работах Ю. Г. Решетняка [13,14,15] были введены и изучены классы функций соболевского типа, определенных в евклидовых областях, но принимающих значения в метрическом пространстве. Оригинальный подход к определению таких функциональных пространств позволил получить аналоги многих результатов, известных для классических пространств Соболева.

В настоящее время на группах Карно активно изучаются различные вопросы, в которых важную роль играет принадлежность функций или отображений соответствующим классам Соболева. На группах Карно, в отличие от евклидова случая, во многих вопросах определяющую роль играет не полный дифференциал отображения, а дифференциал, вычисляемый лишь вдоль "горизонтальных" векторных полей. Групповая специфика не позволяет автоматического перенесения евклидовых результатов и требует новых подходов и методов доказательств, которые порой оказываются близки к используемым при изучении свойств функций на метрических пространствах. Подробное обсуждение вопросов теории отображений с ограниченным искажением и различных свойств соболевских функций на группах Карно можно найти в работе С. К. Водопьянова [43], содержащей обширную библиографию.

Нас же в первую очередь будет интересовать ситуация, когда метрическое пространство является областью определения функции.

Вполне актуальным и целесообразным представляется введение и систематическое изучение (в дополнение к традиционно рассматриваемым на метрических пространствах классам непрерывных, липшицевых и суммируемых функций) новых классов функций с обобщенной "гладкостью", наследующих многие характеристические свойства классических пространств Соболева.

В евклидовом случае пространство Соболева $W_p^1(G)$ обычно воспринимается как подпространство функций из $L_p(G)$, у которых первые обобщенные производные суммируемы в степени p. На метрических пространствах в общем случае нет никакой линейной структуры и, как следствие, нет адекватного понятия дифференциала функции. Поэтому метрическое определение функций соболевского типа естественным образом должно отличаться от традиционного определения пространств Соболева, используемого в евклидовом случае. При всем внешнем различии формулировок, а порой и различии получаемых в итоге классов функций, в основе разных подходов к определению функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах лежит единый принцип – для функций пространства $W_p^1(B)$ на шаре $B \subset R^n$ выделяется какое-либо характеристическое свойство, допускающее переформулировку в терминах произвольной метрики и подходящей борелевской меры, а затем это свойство используется в качестве аксиомы принадлежности функции соответствующему классу соболевского типа на метрическом пространстве. В результате получаемые классы функций, совпадая на шарах $B \subset R^n$ с классическими пространствами Соболева, в общем случае на метрических пространствах могут оказаться существенно различными.

Наиболее общий – аксиоматический подход к определению соболевских классов функций предложен в работе В. М. Гольдштейна и М. Троянова [27], формализовавших минимальный набор требований, позволяющий определить на метрическом пространстве функциональные классы, совпадающие в евклидовом случае с пространствами Соболева. В эту схему вписываются большинство из известных классов соболевского типа на метрических пространствах. К сожалению, минимальный набор условий позволяет получить лишь ограниченный набор содержательных утверждений о свойствах функций.

Активное изучение различных классов функций с обобщенной гладкостью на метрических пространствах началось с введением Ю. Хейноненом и П. Коскелой понятия "верхнего градиента" [37,38].

На связном метрическом пространстве (X, d) стандартным образом определяются класс спрямляемых кривых и понятие интеграла по кривой. Неотрицательную функцию g называют "верхним градиентом" функции $u : X \to R$, если неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq \int\limits_{\gamma} g\, dl \qquad (1)$$

выполняется для всякой кривой γ, соединяющей точки x и y. Очевидно, что в евклидовом случае для гладкой функции u неравенство (1) является непосредственным следствием формулы Ньютона-Лейбница, а "верхним градиентом"является модуль градиента функции u, т. е. $g = |\nabla u|$.

Если на метрическом пространстве задана некоторая борелевская мера μ, то функциональное пространство соболевского типа $W_p^1(X, d, \mu)$ определяется как совокупность функций $u \in L_p(X, \mu)$, у которых "верхний градиент" суммируем в степени p по мере μ [28,36,37,38].

В евклидовом случае свойства функций, принадлежащих пространству Соболева $W_p^1(G)$, существенным образом зависят от геометрического строения области G. В метрическом случае свойства функций из пространства соболевского типа $W_p^1(X, d, \mu)$ зависят от соотношений, связывающих метрику d и меру μ. Наиболее полная теория таких классов функций получается в случае, когда должным образом согласованные свойства метрики и меры обеспечивают выполнение для произвольной функций $u \in W_p^1(X, d, \mu)$ метрического аналога p-неравенства Пуанкаре:

$$\int\limits_{B(x,\rho)} |u - u_B|\, d\mu \leq C\, \rho \left(\int\limits_{B(x,\rho)} g^p\, d\mu \right)^{1/p}, \qquad (2)$$

где символом u_B обозначено среднее значение функции u на шаре $B(x, \rho)$.

Учитывая имеющуюся в евклидовом случае взаимосвязь между принадлежностью функции u пространству Соболева $W_p^1(R^n)$ и выполнением для нее соответствующего неравенства Пуанкаре, неравенство (2) само может быть использовано для определения новых классов функций соболевского типа на метрических пространствах. Будем говорить, что функция $u \in P_p^1(X, d, \mu)$, если $u \in L_p(X, \mu)$ и существует такая неотрицательная функция $g \in L_p(X, \mu)$, что неравенство (2) выполняется для всех шаров $B(x, \rho) \subset X$. Отметим, что, в отличие от пространств $W_p^1(X, d, \mu)$, определяемых на связных метрических пространствах, функциональные классы $P_p^1(X, d, \mu)$ могут быть определены на произвольном метрическом пространстве с мерой.

Различные свойства функций, удовлетворяющих на метрическом пространстве неравенствам Пуанкаре, и взаимосвязь пространств $P_p^1(X, d, \mu)$ с другими функциональными классами соболевского типа довольно подробно изучаются в работе П. Хайлаша и П. Коскелы [33], а также рассматриваются в работах [28,30,31,38].

Для соболевских функций на евклидовом шаре $B \subset R^n$ Б. Боярским [24,25] была получена поточечная оценка липшицевого типа: при $p > 1$ для всякой функции $u \in W_p^1(B)$ почти всюду выполняется неравенство:

$$|u(x) - u(y)| \leq C\, |x - y|\, (M(|\nabla u|)(x) + M(|\nabla u|)(y))\,, \qquad (3)$$

где $M(|\nabla u|)$ – максимальная функция Харди-Литтлвуда для модуля градиента функции u.

Метрический аналог неравенства (3) был использован П. Хайлашем [29] для определения функциональных классов соболевского типа $M_p^1(X, d, \mu)$, которые достаточно подробно будут рассмотрены в первом разделе статьи. Здесь же лишь отметим, что оценка липшицевого типа, на которой базируется определение, позволяет получить для пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ аналоги основных классических теорем вложения, выполняющихся для пространств Соболева в евклидовом случае. При этом полученные в метрическом случае доказательства оказываются даже проще и нагляднее, чем в евклидовом. Традиционное определение соболевских классов функций в областях евклидова пространства, основанное на суммируемости обобщенных производных в некоторой степени $p \geq 1$, является весьма универсальным. С одной стороны, этим объясняется активное использование теории пространств Соболева в различных разделах современной математики, с другой стороны, наличие широкого спектра технических возможностей не способствует поиску наиболее простых и естественных для данного круга задач методов доказательств. Определения функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах базируются на альтернативных описаниях, как правило, выделяющих какое-либо характеристическое свойство соболевских функций, что сужает технические возможности, зато позволяет выделять основное содержание необходимых оценок и находить оптимальные способы доказательства.

При доказательстве для пространств $M^1_p(X,d,\mu)$ теорем вложения в пространства Лебега $L_q(X,\mu)$ основную роль играет получаемая в ходе доказательства оценка приращения функции через меру шара, содержащего соответствующие точки. Учитывая это обстоятельство, вполне целесообразным оказывается рассмотрение новых функциональных классов $W_{\alpha,p}(X,d,\mu)$, функции которых удовлетворяют условию:

$$|u(x)-u(y)| \leq (M(x,y))^{1/\alpha}(g(x)+g(y)),$$

где $M(x,y)$ – мера соответствующего шара, содержащего точки x и y, а функция $g \in L_p(X,\mu)$. Получаемые для пространств $W_{\alpha,p}(X,d,\mu)$ теоремы вложения оказываются вполне аналогичными классическим соболевским теоремам вложения [18,19]. Если считать, что на метрических пространствах критерии "гладкости" определяются взаимосвязью свойств функций с соответствующей метрикой, то, в случае неоднородных мер, пространства $W_{\alpha,p}(X,d,\mu)$ можно воспринимать как классы функций с переменной гладкостью, зависящей от строения меры в окрестности данной точки. Такая точка зрения вполне согласуется с подходом О. В. Бесова к определению классов функций с переменной гладкостью в евклидовом случае [4].

Отметим, что развитие теории функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах стимулируется не только внутренними мотивами, но и имеющимися приложениями, казалось бы, столь абстрактных результатов к изучению классических пространств Соболева в евклидовых областях с нерегулярной границей [20,21], к описанию следов соболевских функций на множествах фрактальной природы [34], к изучению различных вопросов в теории пространств Карно-Каратеотори [33,43]...

1. Функциональные пространства $M^1_p(X,d,\mu)$

1.1. Определения и основные свойства

Рассмотрим метрическое пространство (X,d) с конечным диаметром и конечную регулярную борелевскую меру μ с носителем в множестве X.

Для произвольной μ – измеримой функции $u : X \to \overline{R}$, функцию $g : X \to [0,\infty)$ будем называть допустимой, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E)=0$ и неравенство

$$|u(x)-u(y)| \leq d(x,y)(g(x)+g(y)) \qquad (1.1.1)$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции u обозначим через $D(u)$ и при $p \geq 1$ положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(X,\mu)$.

Функциональные классы $S^1_p(X,d,\mu)$ и $M^1_p(X,d,\mu)$ определяются условиями:

$$S^1_p(X,d,\mu) = \{u : X \to \overline{R} \mid D_p(u) \neq \emptyset\},$$

$$M^1_p(X,d,\mu) = \{u \in L_p(X,\mu) \mid u \in S^1_p(X,d,\mu)\},$$

а полунорма в пространстве $S^1_p(X,d,\mu)$ и норма в пространстве $M^1_p(X,d,\mu)$ определяются равенствами:

$$||u \mid S^1_p|| = \inf_{g\in D_p(u)} ||g \mid L_p||,$$

$$||u \mid M^1_p|| = ||u \mid L_p|| + ||u \mid S^1_p||.$$

В работе [29] показано, что пространство $M^1_p(X,d,\mu)$ является банаховым, а липшицевы функции образуют в нем всюду плотное подмножество. Отметим, что, в силу конечности диаметра метрического пространства и конечности меры, пространства $S^1_p(X,d,\mu)$ и $M^1_p(X,d,\mu)$ совпадают как множества функций. Различные свойства пространств $M^1_p(X,d,\mu)$ и их взаимосвязь с другими классами функций изучаются в работах [28,29,30,31,32,34].

В евклидовых областях $G \subset R^n$, для которых существует ограниченный оператор продолжения $Ext : W^1_p(G) \to W^1_p(R^n)$ (в частности, в областях с липшицевой границей), пространство $M^1_p(G,|*|,m_n)$, рассматриваемое относительно стандартной евклидовой метрики и меры Лебега, и классическое пространство Соболева $W^1_p(G)$ совпадают как множества функций, и их нормы эквивалентны [29]. Это позволяет введенные П. Хайлашем пространства $M^1_p(X,d,\mu)$ называть пространствами соболевского типа.

В евклидовых областях более общего вида пространство Соболева $W^1_p(G)$ и пространство $M^1_p(G,|*|,m_n)$ могут и не совпадать, можно лишь гарантировать вложение [29]:

$$M^1_p(G,|*|,m_n) \subset W^1_p(G).$$

Если в общем случае не предполагать никакой взаимосвязи между метрикой и мерой, то сложно ожидать какой-либо дополнительной содержательной информации о свойствах функций классов $M_p^1(X,d,\mu)$. Однако при вполне естественных дополнительных предположениях для функциональных пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ выполняются аналоги многих классических результатов, известных в евклидовом случае для пространств Соболева $W_p^1(R^n)$. Для нас в первую очередь будут представлять интерес аналоги классических теорем вложения.

Мера μ называется s–регулярной, если для всякого шара при $\rho \le diam X$ выполняется оценка $\mu(B(x,\rho)) \ge C\rho^s$, при этом показатель s во многих случаях играет роль "размерности" метрического пространства (X,d). Согласно результатам работы [29], верна следующая теорема вложения.

Теорема 1.1.1. (P. Hajlasz) *Пусть $1 < p < \infty$, мера μ является s-регулярной и функция $u \in M_p^1(X,d,\mu)$, тогда:*

1) при $p < s$ функция $u \in L_q(X,\mu)$, где $1 \le q \le \dfrac{ps}{s-p}$ и

$$||u \mid L_q|| \le C\,||u \mid M_p^1||,$$

$$||u-u_X \mid L_q|| \le C'\,||u \mid S_p^1||;$$

2) при $p = s$ существуют такие постоянные C_1 и C_2, что

$$\fint_X exp\left(C_1\frac{|u-u_X|}{||u \mid S_p^1||}\right)d\mu \le C_2;$$

3) при $p > s$

$$||u-u_X \mid L_\infty|| \le C\,\mu(X)^{1/s-1/p}\,||u \mid S_p^1||.$$

В формулировке теоремы и далее символ u_Ω означает среднее значение функции u на множестве Ω:

$$u_\Omega = \fint_\Omega u\,d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega u\,d\mu.$$

Можно отметить, что в регулярных евклидовых областях $G \subset R^n$, в которых пространства $M_p^1(G,|*|,m_n)$ и $W_p^1(G)$ совпадают, результат теоремы 1.1.1 для пространств $M_p^1(G,|*|,m_n)$ совпадает с результатом классической теоремы вложения для пространств Соболева $W_p^1(G)$. При этом теорема 1.1.1 является весьма универсальной, ее результат не зависит от структуры конкретного метрического пространства и полностью определяется показателем регулярности меры, который характеризует взаимосвязь метрики и меры.

Для пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ вполне содержательная теория, включающая в себя различные варианты теорем вложения, получается в случае, когда мера μ удовлетворяет простому геометрическому "условию удвоения":

$$\mu(B(x,2\rho)) \le C_d\,\mu(B(x,\rho)), \tag{1.1.2}$$

т. е. мера шара удвоенного радиуса допускает оценку сверху через меру исходного шара. Всякая мера, удовлетворяющая условию удвоения, является s-регулярной с показателем $s = \log_2 C_d$. Всюду далее мы будем предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения, а символом s будем обозначать ее показатель регулярности. Несмотря на простоту оценки (1.1.2), она имеет много полезных следствий. На метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, сохраняются многие свойства меры и интеграла Лебега в R^n [42], к примеру – лемма Витали о покрытии, теорема Лебега о дифференцировании интеграла, ограниченность максимального оператора в пространствах L_p при $p > 1\ldots$

При этом метрических пространств, на которых можно ввести меру, удовлетворяющую условию удвоения, достаточно много. Как показали А. Л. Вольберг и С. В. Конягин [7,8], такие меры могут быть заданы на любом компакте в R^n.

Если мера μ удовлетворяет условию удвоения, то, согласно работе [32], для всех точек Лебега локально суммируемой функции u выполняется неравенство:

$$|u(x)-u(y)| \le C(d(x,y))^\gamma(u_\gamma^\#(x)+u_\gamma^\#(y)), \tag{1.1.3}$$

где $0 < \gamma \le 1$ и $u_\gamma^\#$– уточненная максимальная функция порядка γ, однозначно определенная во всех точках множества X равенством:

$$u_\gamma^\#(x) = \sup_{\rho>0}\rho^{-\gamma}\fint_{B(x,\rho)}|u-u_{B(x,\rho)}|d\mu.$$

Таким образом, в отличие от общей ситуации, когда неравенство (1.1.1) лишь неявным образом определяет семейство допустимых функций, в данном случае появляется возможность конструктивного описания допустимых функций, что существенно упрощает технику доказательств и расширяет круг изучаемых вопросов.

Следующие описания пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ получены в работе [32].

Лемма 1.1.2. (P. Hajlasz, J. Kinnunen) *При $1 < p \le \infty$ для функции $u \in L_p(X,\mu)$ следующие условия эквивалентны:*

1) $u \in M_p^1(X,d,\mu)$;

2) $u_1^\# \in L_p(X,\mu)$;

3) существует такая функция $h \in L_p(X,\mu)$, что неравенство Пуанкаре:

$$\fint_{B(x,\rho)}|u-u_{B(x,\rho)}|\,d\mu \le \rho\fint_{B(x,\rho)}h\,d\mu \tag{1.1.4}$$

выполняется для произвольных $x \in X$ и $\rho > 0$.

В силу равномерной выпуклости пространств L_p при $p > 1$ существует функция h_0, удовлетворяющая неравенству Пуанкаре (1.1.4) и имеющая наименьшую L_p-норму, при этом

$$||h_0 \mid L_p(X,\mu)|| \sim ||u_1^{\#} \mid L_p(X,\mu)|| \sim ||u \mid S_p^1(X,d,\mu)||.$$

Выполнение для функций пространства $M_p^1(X,d,\mu)$ неравенства Пуанкаре и результат теоремы 1.1.1 позволяют переформулировать в удобной для нас форме теорему 8.1 и теорему 8.3 работы П. Хайлаша и П. Коскелы [33].

Теорема 1.1.3. (P. Hajlasz, P. Koskela) *При $1 < p < \infty$ произвольная последовательность функций, ограниченная в норме $M_p^1(X,d,\mu)$, содержит подпоследовательность, сходящуюся в $L_q(X,\mu)$ к некоторой функции $u \in L_q(X,\mu)$, где*

1) $1 \le q < \dfrac{ps}{s-p}$ при $p < s$;

2) $1 \le q < \infty$ при $p \ge s$.

Поскольку строение пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ определяется метрикой d и мерой μ, то и соответствующие теоремы вложения естественным образом можно разбить на два типа: теоремы вложения разных метрик и теоремы вложения разных мер.

1.2. Теоремы вложения разных метрик

Под теоремами вложения разных метрик обычно понимают вложения в пространства функций, имеющих гладкость меньшую, чем гладкость исходного пространства. При $0 < \gamma < 1$ в определении пространств соболевского типа расстояние $d(x,y)$ можно заменить на $d_\gamma(x,y) = (d(x,y))^\gamma$ и получить соответствующие гельдеровы классы $M_p^\gamma(X,d,\mu)$. Однако $d_\gamma(x,y)$, в свою очередь, является метрикой, поэтому возникающие гельдеровы классы $M_p^\gamma(X,d,\mu)$ относительно исходной метрики d часто оказывается более удобным рассматривать как пространства соболевского типа $M_p^1(X,d_\gamma,\mu)$, т. е. как пространства с "единичной гладкостью", но относительно новой метрики d_γ. Достоинство такого подхода заключается в том, что для пространств $M_p^1(X,d_\gamma,\mu)$ не требуется новых доказательств теорем вложения, т. к. достаточно пересчитать показатель регулярности меры μ относительно новой гельдеровой метрики и воспользоваться уже имеющимся результатом.

Само определение пространств $M_p^1(X,d_\gamma,\mu)$ не совсем привычно, поскольку в евклидовом случае обычно рассматриваются другие гельдеровы классы функций. При этом заметим, что и в евклидовом случае пространства M_p^1 относительно гельдеровых метрик использовались в работе П. Хайлаша и О. Мартио [34] при описании следов соболевских функций на фракталах. В метрическом случае пространства такого типа, определяемые гельдеровыми метриками, оказываются удобным инструментом для изучения следов функций из пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ на множествах "меньшей размерности".

Формулируемая ниже теорема получена в работе [17] и характеризует взаимосвязь пространств соболевского типа M_p^1, определяемых разными метриками. При этом термин "теоремы вложения разных метрик" в данном случае можно понимать в буквальном смысле.

Теорема 1.2.1. ([17]) *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < 1$. Тогда пространство $M_p^1(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $M_r^1(X,d_\gamma,\mu)$, где*

1) $1 - \frac{s}{p} = \gamma - \frac{s}{r}$ при $(1-\gamma)p < s$;

2) $1 \le r \le \infty$ при $(1-\gamma)p \ge s$.

1.3. Теоремы вложения "разных мер"

В евклидовом случае теоремы вложения разных мер (разных измерений) обычно связывают с задачей описания следов функций из соболевских классов на подмножествах, имеющих размерность меньшую, чем исходное евклидово пространство.

Для начала нам нужно смоделировать аналогичную ситуацию на метрическом пространстве. Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и является s-регулярной, $s > 1$, а подмножество $E \subset X$ и удовлетворяющая условию удвоения s'-регулярная мера ν таковы, что для произвольного шара $B(x,\rho)$ с центром $x \in E$ верна оценка $\nu(B(x,\rho)) \le C\rho^{-\alpha}\mu(B(x,\rho))$, где $\alpha = s - s' > 0$. В силу конечности диаметра множества X и конечности меры μ, получаем, что $\nu(E) < \infty$. Вообще говоря, функция u из пространства $M_p^1(X,d,\mu)$ изначально может быть определена лишь μ-почти всюду в X, и ее значения могут быть не заданы на множестве $A \subset E$, для которого $\mu(A) = 0$ и $\nu(A) > 0$. Поэтому нужно вначале определиться – что мы будем называть следом функции u на множестве E. Согласно работе [29], липшицевы функции плотны в пространстве $M_p^1(X,d,\mu)$, поэтому можно рассматривать следы непрерывных функций. Однако в данном случае удобнее воспользоваться другим стандартным приемом – доопределить функцию в ее точках Лебега.

Согласно результатам работ [17,21], при $p > \alpha$ для произвольной функции $u \in M_p^1(X,d,\mu)$, точками Лебега являются ν – почти все точки множества E, и в них функция u может быть доопределена равенством

$$u(x) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,\rho))} \int\limits_{B(x,\rho)} u\, d\mu.$$

Далее при $p > \alpha$ следом функции $u \in M_p^1(X,d,\mu)$ на множестве E будем называть сужение на множество E функции

$$\tilde{u}(x) = \overline{\lim_{\rho\to 0}} \frac{1}{\mu(B(x,\rho))} \int\limits_{B(x,\rho)} u\, d\mu,$$

определенной во всех точках $x \in X$ и μ-почти всюду совпадающей с исходной функцией u.

Теперь мы можем сформулировать условия, при которых оператор следа будет ограниченным.

Теорема 1.3.1. ([21]) *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s, p\}$ *и* $0 < \gamma < 1 - \alpha/p$. *Тогда оператор следа*

$$Tr : M_p^1(X, d, \mu) \to M_r^1(E, d_\gamma, \nu)$$

непрерывен при

1) $1 \le r < \dfrac{p\,(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$, *если* $(1-\gamma)p < s$;

2) $1 \le r < \infty$, *если* $(1-\gamma)p \ge s$.

1.4. О компактности операторов вложения и следа

Нас будут интересовать условия компактности оператора вложения пространства $M_p^1(X, d, \mu)$ в пространства $M_r^1(X, d_\gamma, \mu)$, определяемые гельдеровыми метриками, и компактности оператора следа $Tr : M_p^1(X, d, \mu) \to M_r^1(E, d_\gamma, \nu)$.

Доказательство следующего утверждения основано на оценке максимальной функции дробного порядка через максимальную функцию порядка 1 и норму самой функции [21]:

$$u_\gamma^{\#}(x) \le C(\tau^{(1-\gamma)} u_1^{\#}(x) + \tau^{-(s+\gamma)} ||u \mid L_1(X, \mu)||. \tag{1.4.1}$$

Неравенство (1.4.1) напоминает оценку промежуточной производной через старшую производную и саму функцию.

Теорема 1.4.1. ([21]) *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < 1$. *Оператор вложения*

$$I : M_p^1(X, d, \mu) \to M_r^1(X, d_\gamma, \mu)$$

будет компактным при

1) $1 \le r < \dfrac{ps}{s-(1-\gamma)p}$, *когда* $(1-\gamma)p < s$;

2) $1 \le r < \infty$, *когда* $(1-\gamma)p = s$;

3) $1 \le r \le \infty$, *когда* $(1-\gamma)p > s$.

Следствие 1.4.2. ([21]) *Если* $p > s$, *то пространство* $M_p^1(X, d, \mu)$ *компактно вложено в пространство* $M_\infty^1(X, d_\gamma, \mu)$ *при всех* $\gamma < 1 - s/p$.

Используя результаты теоремы 1.4.1 и теоремы 1.1.1, представим оператор вложения $I : M_p^1(X, d, \mu) \to L_q(X, \mu)$ в виде композиции $I = I_1 \circ I_2$, где оператор

$$I_2 : M_p^1(X, d, \mu) \to M_r^1(X, d_\gamma, \mu)$$

является компактным, а оператор

$$I_1 : M_r^1(X, d_\gamma, \mu) \to L_q(X, \mu)$$

является непрерывным. Последовательный пересчет показателей суммируемости позволяет получить утверждение, уточняющее теорему 1.1.3.

Теорема 1.4.3. ([21]) *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда оператор вложения*

$$I : M_p^1(X, d, \mu) \to L_q(X, \mu)$$

является компактным при

1) $1 \le q < \dfrac{ps}{s-p}$, *когда* $p < s$;

2) $1 \le q < \infty$ *при* $p = s$;

3) $1 \le q \le \infty$ *при* $p > s$.

Если подмножество $E \subset X$ и мера ν удовлетворяют условиям пункта 1.3, то условия компактности оператора следа описываются в следующем утверждении.

Теорема 1.4.4. ([21]) *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s, p\}$ *и* $0 < \gamma < 1 - \alpha/p$. *Тогда оператор следа*

$$Tr : M_p^1(X, d, \mu) \to M_r^1(E, d_\gamma, \nu)$$

будет компактным при

1) $1 \le r < \dfrac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$, *когда* $(1-\gamma)p < s$;

2) $1 \le r < \infty$, *когда* $(1-\gamma)p = s$;

3) $1 \le r \le \infty$, *когда* $(1-\gamma)p > s$.

Следствием теоремы 1.4.4. и теоремы 1.1.1. является следующее утверждение о компактности оператора следа в пространствах Лебега.

Теорема 1.4.5. ([21]) *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 < \alpha < \min\{s, p\}$. *Тогда оператор следа*

$$Tr : M_p^1(X, d, \mu) \to L_q(E, \nu)$$

будет компактным при

1) $1 \le q < \dfrac{p(s-\alpha)}{s-p}$, *когда* $p < s$;

2) $1 \le q < \infty$, *когда* $p = s$;

3) $1 \le q \le \infty$, *когда* $p > s$.

2. Пространства Соболева в пиках с гельдеровыми особенностями

В этом разделе мы рассмотрим приложения результатов, полученных для пространств M_p^1, к изучению свойств функций, принадлежащих классическим пространствам Соболева в евклидовых областях с нерегулярной границей. Нас будут интересовать различные теоремы вложения для пространств Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ в "нулевых" пиках $G_\lambda \subset R^n$ с гельдеровыми особенностями в вершине, в том числе и вопрос о компактности вложения следов соболевских функций в лебеговские классы на границе пика, естественным образом связанный с постановкой краевых задач для эллиптических уравнений.

Непрерывность и компактность оператора вложения

$$I : W_p^l(G) \to L_q(G)$$

для областей с гельдеровыми особенностями даже более общего вида достаточно подробно изучены в работах О. В. Бесова, Д. А. Лабутина, В. Г. Мазьи

...[1,2,3,10,11,12]. При этом вопрос о компактности оператора следа

$$Tr : W_p^1(G) \to L_q(\partial G)$$

для областей с нерегулярной границей исследован мало. Одна из причин этого связана техническими проблемами, возникающими при описании пространств следов соболевских функций даже для модельных областей с нерегулярной границей. Можно отметить лишь работу М. Ю. Васильчика и В. М. Гольдштейна [5], согласно которой для "нулевого" пика $G_\varphi \subset R^n$, определяемого функцией φ, пространство следов соболевских функций класса $W_2^1(G_\varphi)$ компактно вложено в весовое пространство Лебега $L_{2,\varphi}(\partial G_\varphi)$ на границе пика.

Для получения интересующих нас теорем вложения мы хотим воспользоваться методами, существенно отличными от традиционно используемых в данной тематике. Рассматриваемая нами схема доказательств основывается на взаимосвязи пространств Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ с пространствами $M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n)$ и последующем применении уже имеющихся теорем вложения для классов функций соболевского типа на метрических пространствах. Такой подход позволяет получить соответствующие результаты, не используя явного описания пространства следов, а точность получаемых в теоремах оценок легко проверяется на конкретном примере.

Точку пространства R^n будем обозначать через (x, y), где $x \in R, y \in R^{n-1}$. Для $1 \leq \lambda < \infty$ пик $G_\lambda \subset R^n$ определим условием.

$$G_\lambda = \{(x, y) \in R^n \mid 0 < x < 1,$$
$$0 < y_k < x^\lambda,\ k = 1, \ldots, n-1\}.$$

Обозначим через m_n сужение n-мерной меры Лебега на пик $\overline{G}_\lambda$, а через σ сужение $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на границу пика G_λ.

Введем показатель $\Lambda = 1 + (n-1)\lambda$. Поскольку для меры шаров с центром в вершине пика выполняется оценка $|B(0, r) \cap G_\lambda| \sim Cr^\Lambda$, то в различных оценках показатель Λ часто играет роль "асимптотической размерности" пика G_λ.

Свойства функций из пространств Соболева $W_p^1(G)$ существенным образом зависят от геометрической структуры области G. Известно, что наличие гельдеровой особенности в вершине пика G_λ является препятствием для существования ограниченного оператора продолжения функций класса $W_p^1(G_\lambda)$ из пика на все евклидово пространство, с условием принадлежности продолженной функции классу $W_p^1(R^n)$. Поэтому изначально мы можем гарантировать лишь вложение

$$M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n) \subset W_p^1(G_\lambda).$$

Существование обратного вложения удается показать лишь при дополнительном условии на показатель суммируемости p. Согласно результатам работ [16,20], при: $p > \Lambda/n$

$$W_p^1(G_\lambda) = M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n),$$

при этом функциональные пространства совпадают как множества функций, а их нормы оказываются эквивалентными. Поэтому интересующие нас теоремы вложения для пространства Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ могут быть получены как следствие результатов предыдущего раздела для пространства соболевского типа $M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n)$.

Доказательство совпадения функциональных пространств в данном случае основано на специальной конструкции оператора продолжения "с ухудшением класса", действующего из пространства $W_p^1(G_\lambda)$ в пространство $W_q^1(R^n)$, где $q < p$. Такой оператор продолжения оказывается ограниченным лишь при $p > \Lambda/n$, поэтому при меньших показателях суммируемости приходится использовать другой технический прием.

Введем в пике G_λ новую анизотропную метрику d, полагая:

$$d((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1^\lambda - x_2^\lambda)^2 + |y_1 - y_2|^2},$$

и весовые меры μ и ν, определяемые условиями:

$$d\mu = x^{p(\lambda-1)} dm_n, \quad d\nu = x^{p(\lambda-1)} d\sigma.$$

Как показано в работе [21], при всех показателях суммируемости $p > 1$ выполняется вложение:

$$W_p^1(G_\lambda) \subset M_p^1(G_\lambda, d, \mu).$$

Поэтому интересующие нас утверждения, касающиеся оператора вложения, являются следствием цепочки вложений:

$$W_p^1(G_\lambda) \Rightarrow M_p^1(G_\lambda, d, \mu) \Rightarrow M_r^1(G_\lambda, d_\gamma, \mu) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L_s(G_\lambda, \mu), \Rightarrow L_q(G_\lambda, m_n),$$

а соответствующие утверждения для оператора следа являются следствием цепочки вложений:

$$W_p^1(G_\lambda) \Rightarrow M_p^1(G_\lambda, d, \mu) \Rightarrow M_r^1(\partial(G_\lambda), d_\gamma, \nu) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L_s(\partial(G_\lambda), \nu) \Rightarrow L_q(\partial(G_\lambda), \sigma).$$

При этом на каждом шаге вложение либо уже известно, либо является простым следствием неравенства Гельдера.

Как уже было отмечено, результаты для оператора вложения не являются новыми, просто в данном случае они получены новым способом. Поэтому мы ограничимся формулировкой окончательного результата о компактности вложения следов соболевских функций в пространства Лебега на границе пика.

Теорема 2.1. ([21]) *Пусть* $\frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \infty$, *тогда оператор следа*

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \to L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$$

является компактным при

1) $1 \le q < p\dfrac{\Lambda - \lambda}{\Lambda - p}$, *когда* $\dfrac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \Lambda$;

2) $1 \le q < \infty$, *когда* $p = \Lambda$;

3) $1 \le q \le \infty$, *когда* $p > \Lambda$.

Ограничение снизу на показатель суммируемости p в теореме 2.1 сязано с тем, что при меньших показателях суммируемости пространство следов не может быть вложено ни в какое пространство Лебега $L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$ при $q \ge 1$. В этом случае вложение возможно лишь в весовые пространства Лебега.

В ходе доказательства, кроме основного утверждения, автоматически получаются и другие результаты о компактности оператора следа в соответствующих функциональных пространствах, участвующих в цепочке последовательных теорем вложения. В результате получены условия компактности оператора следа для следующих случаев:

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_r^1(\partial G_\lambda, d_\gamma, \nu);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_q^1(\partial G_\lambda, d_\gamma, \sigma);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_q^1(\partial G_\lambda, |*|^\gamma, \sigma);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow C^{0,\gamma}(\partial G_\lambda);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow L_r(\partial G_\lambda, \nu).$$

Вложения следов в пространства соболевского типа M_q^1, определяемые гельдеровыми метриками, являются несколько непривычными, традиционно со следами соболевских функций связывают соответствующие пространства Бесова. Получить полное описание следов, оставаясь в рамках шкалы пространств M_p^1, не удается, однако получаемые вложения оказываются вполне информативными и в некотором смысле точными. Построенный в работе [21] пример показывает, что, несмотря на некоторую экзотичность используемого метода, полученная в первом пункте теоремы 2.1 оценка на показатель суммируемости q является точной. Это означает, что и промежуточные оценки для теорем вложения, участвующих в цепочке, являются точными.

3. О непрерывности функций соболевского типа

Пусть G – область в евклидовом пространстве R^n. Функцию $f : G \to R$ называют n-абсолютно непрерывной, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого семейства непересекающихся шаров $B_k = B(x_k, r_k) \subset G$ из условия

$$\sum_k r_k^n < \delta$$

следует:

$$\sum_k (osc_{B_k} f)^n < \varepsilon,$$

где символом $osc_{B_k} f$ обозначено колебание функции f на шаре B_k.

Согласно работе [40], всякая функция класса $W^1_{1,\,loc}(G)$, градиент которой принадлежит пространству Лоренца $L_{n,1}(G)$, эквивалентна некоторой n-абсолютно непрерывной функции. Это более тонкий результат по сравнению с классической теоремой о вложении соболевских классов функций $W_p^1(G)$ в пространство непрерывных функций при $p > n$. С одной стороны, условие n-абсолютной непрерывности сильнее, чем обычное условие непрерывности функции, с другой стороны, для произвольной ограниченной области $G \subset R^n$ и любого $p > n$ выполняется вложение $L_p(G) \subset L_{n,1}(G) \subset L_n(G)$. Из результатов работ [40,41] следует, что n-абсолютно непрерывное отображение $F : G \to R^n$ обладает N-свойством Лузина и является почти всюду дифференцируемым. Выполнение этих свойств часто оказывается полезным при изучении различных вопросов, связанных с заменой переменной.

Определение пространств M_p^1 легко модифицировать, заменяя принадлежность допустимых функций пространствам Лебега на принадлежность другим классам функций. Это позволяет ввести классы функций соболевского типа, связанные с пространствами Лоренца, полагая:

$$M_{s,1}^1(X) = \{f \in L_1(X) \mid \ D(f) \cap L_{s,1} \ne \emptyset\}.$$

Шкала пространств Лоренца включает в себя шкалу пространств Лебега и позволяет изучать более тонкие свойства функций. Введение в теорию пространств Лоренца можно найти в книге [23].

Вещественнозначную функцию f, определенную на метрическом пространстве (X, d) с борелевской мерой μ, будем называть s-абсолютно непрерывной, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого семейства непересекающихся шаров $B_k \subset X$ из условия

$$\sum_k \mu(B_k) < \delta$$

следует

$$\sum_k (osc_{B_k} f)^s < \varepsilon.$$

Заметим, что в евклидовом случае показатель абсолютной непрерывности и размерность пространства совпадают. Поэтому и в метрическом случае мы будем рассматривать пространства, строение которых в некотором смысле однородно с точки зрения меры.

Полное метрическое пространство (X, d) называют s–регулярным ($s > 1$), если существуют такие постоянные $0 < L_1 < L_2 < \infty$ и такая борелевская мера μ, что для всякого шара $B(x, r) \subset X$ при $r \le diam X$ выполняется оценка:

$$L_1 r^s \le \mu(B(x, r)) \le L_2 r^s.$$

Полное метрическое пространство (X, d) будем называть локально s-регулярным, если всякий шар $B \subset X$ сам является s-регулярным метрическим пространством и постоянные L_1, L_2 в условии s-регулярности не зависят от выбора шара.

Приведем несколько примеров локально s-регулярных метрических пространств.

1. В евклидовом пространстве R^n шары и произвольные параллелепипеды являются локально n-регулярными метрическими пространствами относительно стандартной евклидовой метрики.

2. Пусть (X, d)– локально s-регулярное метрическое пространство и $0 < \gamma < 1$. На множестве X определим новую метрику, полагая $d_\gamma(x, y) = [d(x, y)]^\gamma$. Тогда метрическое пространство (X, d_γ) является локально s/γ-регулярным.

3. Несложно проверить, что локально s-регулярным будет всякое связное s-регулярное метрическое пространство, шары которого удовлетворяют условию Джона: существуют точка $x_0 \in B$ и постоянная $C > 0$, такие, что для всякой точки $x \in B$ найдется параметризованная длиной дуги кривая $\gamma : [0, l] \to B$, такая, что $\gamma(0) = x, \gamma(l) = x_0$ и

$$dist(\gamma(t), X \setminus B) \geq C\,t.$$

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этого раздела.

Теорема 3.1. ([22]) *Пусть (X, d) – локально s–регулярное метрическое пространство. Тогда для всякой функции $f \in M^1_{s,1}(X)$ существует эквивалентная ей s–абсолютно непрерывная функция.*

В довольно общей ситуации, включающей в себя евклидов случай, удается получить прямое доказательство s-абсолютной непрерывности функций, у которых "метрический аналог градиента" принадлежит соответствующему пространству Лоренца. Используемая в метрическом случае техника доказательств основана на оценках приращения функции, являющихся следствием соответствующего неравенства Пуанкаре, и существенно отличается от методов, используемых в работе [40] для евклидова случая.

4. Отображения соболевского типа на метрических пространствах

В евклидовом случае, говоря о соболевском отображении $\varphi : G \to R^m$, обычно предполагают, что у отображения все координатные функции φ_i принадлежат некоторому пространству Соболева $W^l_p(G)$. С одной стороны, класс соболевских отображений оказывается весьма широким, он включает в себя диффеоморфизмы, квазиконформные отображения, квазиизометрические отображения, липшицевы отображения и другие классы отображений более общего вида. С другой стороны, принадлежность отображения определенному пространству Соболева позволяет сразу получить некоторую дополнительную информацию о свойствах отображения, являющуюся, к примеру, следствием соответствующих теорем вложения.

В метрическом случае определение отображений соболевского типа, действующих из одного метрического пространства в другое метрическое пространство, естественным образом должно отличаться от евклидова определения, поскольку в данном случае у отображения нет координатных функций. Возможны альтернативные подходы, позволяющие найти выход из этой ситуации.

Используя изометрическое вложение I метрического пространства (Y, ρ), имеющего конечный диаметр, в пространство ограниченных функций $L_\infty(Y)$, наряду с отображением $\varphi : (X, d) \to (Y, \rho)$ можно рассмотреть и отображение $\Phi = I \circ \varphi : (X, d) \to L_\infty(Y)$, область значений которого принадлежит уже банахову пространству. По определению полагается, что отображение φ принадлежит классу $F(X, Y)$, если отображение Φ принадлежит классу $F(X, L_\infty(Y))$. Такой подход, используемый, к примеру, в работах [35,39], предполагает доказательство независимости используемых определений от выбора изометрического вложения $I : (Y, \rho) \to L_\infty(Y)$.

Мы же воспользуемся определением, основанным на модификации предложенного Ю. Г. Решетняком весьма универсального подхода к определению соболевских функций с областью определения в евклидовом пространстве и областью значений в метрическом пространстве [13,14,15].

Будем говорить, что отображение $\varphi :\ (X, d) \to$

$\to (Y, \rho)$ принадлежит классу $M^1_p(X, Y)$, если:

1) для всякого $y \in Y$ функция $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y)$ принадлежит функциональному пространству $M^1_p(X, d, \mu)$;

2) $||\varphi_y \mid S^1_p|| \leq K < \infty$ при всех $y \in Y$.

Для отображений классов $M^1_p(X, Y)$ можно доказать утверждения аналогичные теоремам вложения, выполняющимся для функциональных классов $M^1_p(X, d, \mu)$.

Рассмотрим метрические пространства $(X, d), (Y, \rho)$ и конечную борелевскую меру μ с носителем в множестве X. Как и в работе [13], принадлежность отображения $\varphi : X \to Y$ лебеговскому классу $L_p(X, Y)$ определим условием: функции $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y)$ принадлежат пространству Лебега $L_p(X, \mu)$ при всех $y \in Y$. Из неравенства

$$|\varphi_{y_1}(x) - \varphi_{y_2}(x)| \leq \rho(y_1, y_2)$$

и конечности меры следует, что отображение φ принадлежит классу $L_p(X, Y)$, если хотя бы для одного $y \in Y$ функция $\varphi_y \in L_p(X, \mu)$. Пусть φ и ψ – произвольные отображения класса $L_p(X, Y)$. Поскольку

$$\rho(\varphi(x), \psi(x)) \leq \rho(\varphi(x), y) + \rho(\psi(x), y) = \varphi_y(x) + \psi_y(x),$$

то функция $\rho(\varphi(x), \psi(x))$ принадлежит пространству Лебега $L_p(X, \mu)$. Несложно проверить, что функция

$$\rho_{L_p}(\varphi, \psi) = \left(\int\limits_X [\rho(\varphi(x), \psi(x))]^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

является метрикой на множестве отображений класса $L_p(X, Y)$ [13].

Теорема 4.1. *Пусть мера μ является s-регулярной и $1 < p < s$. Тогда для любого $1 \le q \le \dfrac{ps}{s-p}$ имеет место включение*

$$M_p^1(X, Y) \subset L_q(X, Y).$$

При этом для всякого отображения $\varphi \in M_p^1(X, Y)$ и произвольной точки $y \in Y$ выполняется оценка:

$$||\varphi_y \mid L_q(X, \mu)|| \le C \, ||\varphi_y \mid M_p^1(X, d, \mu)||.$$

Доказательство этого утверждения является непосредственным следствием определения класса $M_p^1(X, Y)$ и первого пункта теоремы 1.1.1.

При дополнительных предположениях о структуре метрических пространств и свойствах меры можно получить аналоги и других теорем вложения.

Теорема 4.2. *Рассмотрим полное локально s-регулярное метрическое пространство (X, d) и полное локально-компактное сепарабельное метрическое пространство (Y, ρ). Тогда при $p > s$ для всякого отображения $\varphi : X \to Y$ класса $M_p^1(X, Y)$ существует эквивалентное ему непрерывное отображение $\varphi^* : X \to Y$, такое, что для колебания отображения на произвольном шаре $B = B(a, r) \subset X$ выполняется оценка*

$$osc_B \, \varphi^* = \sup_{x, t \in B} \rho(\varphi(x), \varphi(t)) \le$$

$$\le C \, r^{1-s/p} \sup_{y \in Y} ||\varphi_y \mid S_p^1(X, d, \mu)||. \tag{4.1}$$

Поскольку пространство (X, d) является s-регулярным, то для меры всякого шара $B_r = B(a, r) \subset X$ выполняется двухсторонняя оценка $L_1 r^s \le \mu(B(a, r)) \le L_2 r^s$. Это позволяет нам воспользоваться результатами первого раздела статьи.

Пусть P – счетное всюду плотное множество в Y. Для всякого $y \in Y$ функция φ_y принадлежит пространству $M_p^1(X, d, \mu)$. Согласно третьему пункту теоремы 1.1.1, для почти всех точек произвольного шара $B_r \subset X$ выполняется оценка

$$|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)| \le C \, r^{1-s/p} \, ||\varphi_y \mid S_p^1(B_r, d, \mu)|| \le$$

$$\le C \, r^{1-s/p} \, ||\varphi_y \mid S_p^1(X, d, \mu)||. \tag{4.2}$$

Равномерно непрерывная на всюду плотном множестве функция φ_y может быть продолжена до непрерывной функции φ_y^*, определенной на всем множестве X и совпадающей с φ_y почти всюду. Дословное повторение доказательства теоремы 6.2 работы [13] позволяет по функциям φ_y^* построить искомое непрерывное отображение $\varphi^* : X \to Y$ и, используя неравенство (4.2), получить оценку (4.1).

5. Отображения, сохраняющие при замене переменной функциональные пространства соболевского типа

Одним из методов изучения вопросов, связанных с различными дифференциальными соотношениями, является перенос задачи из исходной области в некоторую каноническую область при помощи замены переменной, сохраняющей дифференциальные свойства функций. В евклидовом случае дополнительный интерес к отображениям $\varphi : G \to G'$ $(G, G' \subset R^n)$, индуцирующим по правилу замены переменной $\varphi^* f = f \circ \varphi$ изоморфизм пространств Соболева $\varphi^* : L_p^1(G') \to L_p^1(G)$, объясняется тем, что при $p = n$ класс таких замен переменной совпадает с классом квазиконформных гомеоморфизмов, а при $p \neq n$ – с классом квазиизометрий [6,9].

Рассмотрение на метрических пространствах аналогичного вопроса о заменах переменной, сохраняющих функциональные пространства соболевского типа, имеет свою специфику. Определение пространства Соболева $W_p^1(G)$ жестко связано с евклидовой метрикой и мерой Лебега, а функциональные классы соболевского типа M_p^1 могут быть определены на произвольном метрическом пространстве, снабженном борелевской мерой.

Рассмотрим произвольное метрическое пространство (X, d) с мерой μ и произвольное взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$. На множестве Y можно ввести метрику и меру, полагая $\rho(y_1, y_2) = d(\varphi^{-1}(y_1), \varphi^{-1}(y_2))$ и $\nu(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$. Вполне очевидно, что при таких условиях отображение φ является изометрией метрических пространств (X, d) и (Y, ρ), сохраняющей меру множества, и индуцирует при замене переменной изоморфизм функциональных пространств

$$\varphi^* : M_p^1(Y, \rho, \nu) \to M_p^1(X, d, \mu).$$

В частности, мы можем применить это рассуждение к отображению $\varphi : X \to E \subset X$, где E – произвольное подмножество множества X. При этом, в отличие от евклидова случая, на множестве E оказываются заданы две различные метрики, для которых, вообще говоря, значения $d(a, b)$ и $\rho(a, b)$ никак не связаны между собой.

Изучение различных вопросов, связанных с заменами переменной для пространств соболевского типа на метрических пространствах, в настоящий момент находится в начальной стадии и предоставляет широкий простор для исследований, как с точки зрения постановки задач, так и с точки зрения разработки новых методов, применимых в метрическом случае, и нахождения приложений получаемых результатов.

Отметим, что используемое в предыдущем разделе определение отображений соболевского типа хорошо согласуется заменой переменной в том смысле, что отображение, сохраняющее при замене переменной некоторый класс функций соболевского типа, само принадлежит классу того же типа. Рассмотрим метрические пространства $(X, d), (Y, \rho)$ и конечные борелевские меры – μ с носителем в множестве X и ν с носителем в множестве Y. Предположим, что отображение $\varphi : X \to Y$. индуцирует при замене переменной ограниченный оператор

$$\varphi^* : S^1_p(Y, \rho, \nu) \to S^1_p(X, d, \mu). \tag{5.1}$$

Несложно видеть, что при любом $y \in Y$. функция $f_y(t) = \rho(t, y)$ принадлежит пространству $S^1_p(Y, \rho, \nu)$. Поскольку

$$|f_y(t_1) - f_y(t_2)| = |\rho(t_1, y) - \rho(t_2, y)| \le$$
$$\le \rho(t_1, t_2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

то $||f_y \mid S^1_p|| \le \frac{1}{2}\left[\nu(Y.)\right]^{1/p}$. Из условия (5.1) следует, что функция $\varphi^* f_y$ принадлежит пространству $S^1_p(X, d, \mu)$ и $||\varphi^* f_y \mid S^1_p|| \le C_0 < \infty$. Поскольку

$$\varphi^* f_y(x) = \rho(\varphi(x), y) = \varphi_y(x),$$

то непосредственно из определения следует принадлежность отображения φ классу $M^1_p(X, Y.)$.

Далее рассмотрим вопрос о замене переменной для пространств S^1_p на s-регулярных метрических пространствах.

Пусть метрические пространства (X, d) и (Y, ρ) являются s-регулярными, а отображение $\varphi : X \to Y$. квазиизометрией, т. е.

$$C_1\, d(x_1, x_2) \le \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \le C_2\, d(x_1, x_2).$$

Если функция $f \in S^1_p(Y, \rho, \nu)$ и допускает оценку

$$|f(y_1) - f(y_2)| \le \rho(y_1, y_2)(g(y_1) + g(y_2)),$$

то для функции $h(x) = f(\varphi(x))$ выполняется оценка:

$$|h(x_1) - h(x_2)| = |f(y_1) - f(y_2)| \le$$
$$\le \rho(y_1, y_2)(g(y_1) + g(y_2)) \le$$
$$\le C_2\, d(x_1, x_2)(g(\varphi(x_1)) + g(\varphi(x_2))).$$

Следовательно, функция $\omega = C_2\,(g \circ \varphi)$ является допустимой для функции $h = \varphi^* f$.

Поскольку отображение φ является квазиизометрией, то образ шара $B(x, r) \subset X$ содержится в шаре $B(\varphi(x), C_2 r) \subset Y$. и содержит внутри себя шар $B(\varphi(x), C_1 r) \subset Y$. Поскольку оба метрических пространства являются s-регулярными, то существуют такие постоянные $0 < K_1 \le K_2 < \infty$, что для всякого шара $B(x, r) \subset X$ выполняется оценка:

$$K_1\, \mu(B(x, r)) \le \nu(\varphi(B(x, r))) \le K_2\, \mu(B(x, r)).$$

Эта оценка стандартным образом распространяется на все измеримые множества, и, следовательно, для всякого измеримого множества $E \subset X$ получаем:

$$K_1\, \mu(E) \le \nu(\varphi(E)) \le K_2\, \mu(E).$$

Это, в свою очередь позволяет получить оценку для интегралов

$$K_3 \int\limits_X \omega^p\, d\mu \le \int\limits_Y g^p\, d\nu \le K_4 \int\limits_X \omega^p\, d\mu,$$

которая очевидна для простых функций, а следовательно, выполняется и для всех функций $g \in L_p(Y, \nu)$.

Следствием оценки для допустимых функций является оценка для норм:

$$||\varphi^* f \mid S^1_p(X, d, \mu)|| \le C_0\, ||f \mid S^1_p(Y, \rho, \nu)||.$$

Поскольку для квазизометрии выполняются двухсторонние оценки, то отображение $\varphi : X \to Y$. при всех $1 \le p < \infty$ индуцирует по правилу замены переменной изоморфизм

$$\varphi^* : S^1_p(Y, \rho, \nu) \to S^1_p(X, d, \mu).$$

В отличие от достаточности доказательство необходимости требования квазиизометричности замен переменной, сохраняющих пространства S^1_p при $p \ne s$, как и в евклидовом случае, требует значительно больших усилий. В этой статье мы ограничимся рассмотрением более простого случая $p > s > 1$.

Предположим, что метрические пространства (X, d) и (Y, ρ) являются локально s-регулярными, а отображение $\varphi : X \to Y$. по правилу замены переменной индуцирует изоморфизм

$$\varphi^* : S^1_p(Y, \rho, \nu) \to S^1_p(X, d, \mu).$$

Как уже было отмечено, при этих условиях отображение φ является отображением соболевского типа и принадлежит классу $M^1_p(X, Y.)$. Поскольку $p > s$, то, согласно теореме 4.2, мы можем изначально считать, что отображение φ является непрерывным. Используя теорему 4.2 в частном случае, когда метрическое пространство (Y, ρ) является действительной прямой R, мы видим, что при $p > s$ класс эквивалентности произвольной функции $f \in M^1_p(X, d, \mu)$ содержит непрерывную функцию, однозначно определенную во всех точках множества X. В первом разделе было отмечено, что функциональные классы $M_p^1(X,d,\mu)$ и $S_p^1(X,d,\mu)$ совпадают как множества функций, поэтому будем считать, что функции пространства $S_p^1(X,d,\mu)$ всюду определены и непрерывны. Непосредственно из неравенства (4.1) получается следующая оценка для нормы функций пространства $S_p^1(X,d,\mu)$.

Лемма 5.1. *Рассмотрим локально s-регулярное пространство (X,d). Пусть $p>s$, $x_1,x_2\in X$, $f\in S_p^1(X,d,\mu)$ и $|f(x_1)-f(x_2)|\geq 1$. Тогда*

$$||f \mid S_p^1(X,d,\mu)|| \geq C_1\,[d(x_1,x_2)]^{s/p-1}. \qquad (5.2)$$

Теперь нам нужно получить оценку сверху для нормы пробной функции специального вида. Пусть $a\in Y$, $0<r<diam\,Y$. Рассмотрим функцию:

$$h_{a,r}(y)=\begin{cases}\dfrac{r^\gamma-\rho^\gamma(a,y)}{r^\gamma}, & \text{если } \rho(a,y)\leq r\\ 0, & \text{если } \rho(a,y)>r,\end{cases}$$

где $\gamma=\frac{p-s}{p-1}$. В рассматриваемой ситуации $0<\gamma<1$, $h_{a,r}(a)=1$ и $h_{a,r}(y)\equiv 0$ вне шара $B(a,r)$. Покажем, что функция $h_{a,r}$ принадлежит пространству $S_p^1(Y,\rho,\nu)$ и найдем оценку для ее нормы. Пусть точки $y_1,y_2\in B(a,r)$ и $\rho(a,y_1)\leq\rho(a,y_2)$. Используя теорему Лагранжа о конечном приращении, получаем:

$$|h_{a,r}(y_1)-h_{a,r}(y_2)|=\frac{|\rho^\gamma(a,y_1)-\rho^\gamma(a,y_2)|}{r^\gamma}=$$
$$=\frac{|\rho(a,y_1)-\rho(a,y_2)|}{r^\gamma}\,\gamma\,t^{\gamma-1},$$

где $t\in[\rho(a,y_1),\rho(a,y_2)]$. Поскольку $\gamma<1$, то $t^{\gamma-1}\leq\rho^{\gamma-1}(a,y_1)$. Положим:

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{\rho^{\gamma-1}(a,y)}{r^\gamma}, & \text{если } \rho(a,y)\leq r\\ 0, & \text{если } \rho(a,y)>r.\end{cases}$$

Учитывая неравенство треугольника для метрики, получаем, что для всех $y_1,y_2\in Y$. будет выполняться оценка:

$$|h_{a,r}(y_1)-h_{a,r}(y_2)|\leq\gamma\,\rho(y_1,y_2)(g(y_1)+g(y_2)),$$

т. е. функция $\gamma\cdot g$ будет допустимой.

Остается оценить норму функции g. Отметим, что $1/r\leq g(y)\leq\infty$ при $y\in B(a,r)$. Для оценки нормы воспользуемся интегрированием по множествам уровня:

$$I=\int\limits_Y g^p\,d\nu=\int\limits_{B(a,r)} g^p\,d\nu=\int\limits_{1/r^p}^{\infty}\nu\left(\{g^p>t\}\right)\,dt. \qquad (5.3)$$

Учитывая s-регулярность меры ν, получаем:

$$\nu\left(\{g^p>t\}\right)\leq C\,t^{\frac{s}{p(\gamma-1)}}\,r^{\frac{s\gamma}{\gamma-1}}.$$

Подставляя эту степенную оценку в (5.3), получаем $||g \mid L_p(Y,\nu)||^p\leq\tilde{C}\cdot r^{s-p}$ и, следовательно,

$$||h_{a,r} \mid S_p^1(Y,\rho,\nu)||\leq C_2\,r^{s/p-1}. \qquad (5.4)$$

Теперь мы можем найти оценку искажения расстояний отображением φ. Пусть $x_1,x_2\in X, y_1=\varphi(x_1), y_2=\varphi(x_2), r=\rho(y_1,y_2)$. Рассмотрим функцию $h_{y_1,r}\in S_p^1(Y,\rho,\nu)$ и функцию $f=\varphi^*h_{y_1,r}$, для которой $f(x_1)-f(x_2)=1$. Учитывая, что для функции $h_{y_1,r}$ выполняется оценка (5.4), а для функции f оценка (5.2), получаем:

$$C_1[d(x_1,x_2)]^{s/p-1}\leq||f \mid S_p^1(X,d,\mu)||\leq$$
$$\leq||\varphi^*||\cdot||h_{a,r} \mid S_p^1(Y,\rho,\nu)||\leq C_2\,||\varphi^*||\cdot r^{s/p-1}.$$

Поскольку $s/p-1<0$, то из предыдущего неравенства следует, что

$$\rho(\varphi(x_1),\varphi(x_2))|\leq L\,d(x_1,x_2).$$

Оператор φ^* является изоморфизмом, поэтому, применяя аналогичные рассуждения к обратному оператору, получим оценку:

$$L^{-1}\,d(x_1,x_2)\leq\rho(\varphi(x_1),\varphi(x_2))|.$$

В результате получаем следующее утверждение о замене переменной для функций соболевского типа на локально s-регулярных метрических пространствах:

для того, чтобы отображение $\varphi:X\to Y$. индуцировало по правилу замены переменной при $p>s$ изоморфизм пространств соболевского типа

$$\varphi^*:S_p^1(Y,\rho,\nu)\to S_p^1(X,d,\mu)$$

необходимо и достаточно, чтобы φ было квазиизометрией.

Рассмотрение необходимых условий при $p<s$ и описание замен переменной при $p=n$ основывается на иных технических приемах и требует отдельного изучения.

Литература

[1] Бесов, О. В. *Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей* / О. В. Бесов // Докл. РАН. – 2000. – Т. 373, №. 2. – С. 151 – 154.

[2] Бесов, О. В. *Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей* / О. В. Бесов // Мат. сб. – 2001. – Т. 192, №. 3. – С. 3 – 26.

[3] Бесов, О. В. *О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей* / О. В. Бесов // Труды МИАН. – 2001. – Т. 232. – С. 72 – 93.

[4] Бесов, О. В. *Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости* /

О. В. Бесов // Труды МИАН. – 1997. – Т. 214. – С. 25 – 58.

[5] Васильчик, М. Ю. *О разрешимости третьей краевой задачи для области с пиком* / М. Ю. Васильчик, В. М. Гольдштейн // Мат. заметки. – 2005. – Т.78, №. 3. – С. 466 – 468.

[6] Водопьянов, С. К. *Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения* / С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн // Сиб. мат. журн. – 1975. – Т. 16, №. 2. – С. 224 – 246.

[7] Вольберг, А. Л. *На любом компакте в R^n существует однородная мера* / А. Л. Вольберг, С. В. Конягин // ДАН СССР. – 1984. – Т.278, №4. – С.783 – 785.

[8] Вольберг, А. Л. *О мерах с условием удвоения* / А. Л. Вольберг, С. В. Конягин // Изв. Акад. наук СССР. – 1987. – Т.51, №3. – С. 666 – 676.

[9] Гольдштейн, В. М. *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения* / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. – М.: Наука, 1983. – 284 с.

[10] Лабутин, Д. А. *Интегральное представление функций и вложение пространства Соболева на областях с нулевыми углами* / Д. А. Лабутин // Мат. заметки. – Т. 61, №2. – С. 201 – 219.

[11] Лабутин, Д. А. *Неулучшаемость неравенства Соболева для класса нерегулярных областей* / Д. А. Лабутин // Труды МИАН. – 2001. – Т. 232. – С. 218 – 222.

[12] Мазья, В. Г. *Пространства С. Л. Соболева* / В. Г. Мазья – Л.: ЛГУ, 1985. – 416 с.

[13] Решетняк, Ю. Г. *Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве* / Ю. Г. Решетняк // Сиб. мат. журн. – 1997. – Т.38, №3. – С.657 – 675.

[14] Решетняк, Ю. Г. *Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве, II* / Ю. Г. Решетняк // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 4. – С. 855 – 870.

[15] Решетняк, Ю. Г. *К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве* / Ю. Г. Решетняк // Сиб. мат. журн. – 2006. – Т. 47, № 1.– С. 146 – 168.

[16] Романов, А. С. *Об одном обобщении пространств Соболева* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 4. – С. 949 – 953.

[17] Романов, А. С. *О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 1999. – Т. 40, № 4. – С. 931 – 937.

[18] Романов, А. С. *Теоремы вложения для одного класса функций соболевского типа на метрических пространствах* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 452 – 465.

[19] Романов, А. С. *О вложениях классов функций с обобщенной гладкостью на метрических пространствах* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 4. – С. 871 – 880.

[20] Романов, А. С. *О следах соболевских функций на границе пика с гельдеровой особенностью* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48, № 1. С. 176 – 184.

[21] Романов, А. С. *О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 848 – 866.

[22] Романов, А. С. *О непрерывности функций соболевского типа на метрических пространствах* / А. С. Романов // Доклады РАН. – 2008. – Т. 418, № 5. – С. 599 – 602.

[23] Стейн, И. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах* / И. Стейн, Г. ВейсГ. – М.: Мир, 1974. – 332 с.

[24] Bojarski, B. *Remarks on some geometric properties of Sobolev mappings* / B. Bojarski // Functional Analysis and Related Topics, ed. Shozo Koshi, World Scientific.–1991.

[25] Bojarski, B. *Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications* / B. Bojarski, P. Hajlasz // Studia Math. – 1993. – V. 106, № 1. P.77 – 92.

[26] Edmunds, D. E. *Hardy Operators, Function Spaces and Embeddigs* / D. E. Edmunds, W. D. Evans – New York.: Springer, 2004. – 326 p.

[27] Gol'dshtein, V. M. *Axiomatic Theory of Sobolev Spaces* / V. M. Gol'dshtein, M. Troyanov // Expo. Math. – 2001. – V. 19, № 4. – P. 289 – 336.

[28] Franchi, B. *Definitions of Sobolev classes on metric spaces* / B. Franchi, P. Hajlasz, P. Koskela // Ann. Inst. Fourier. – 1999. – V. 49, № 6. – P. 1903 – 1924.

[29] Hajlasz, P. *Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces* / P. Hajlasz // Potential Analysis. – 1996. – V. 5, №. 4. – P. 403 – 415.

[30] Hajlasz, P. *Sobolev spaces on metric-measure spaces* / P. Hajlasz // Contemporary Math. – 2003. – V. 338. – P. 173 – 218.

[31] Hajlasz, P. *A new characterization of the Sobolev space* / P. Hajlasz // Studia Math. – 2003. – V. 159. – P. 263 – 275.

[32] Hajlasz, P. *Hölder quasicontinuity of Sobolev functions* / P. Hajlasz, J. Kinnunen // Rev. Mat. Iberoamericana. – 1998. – V. 14, № 3. – P. 601 – 622.

[33] Hajlasz, P. *Sobolev Met Poincare* / P. Hajlasz, P. Koskela// Memoirs AMS. – 2000. – V. 145, № 688. – 101 p.

[34] Hajlasz, P. *Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains* / P. Hajlasz, O. Martio // J. Funct. Anal. – 1997. – V. 143. – P. 221 – 246.

[35] Hajlasz, P. *Density of Lipschitz mappings in the class of Sobolev mappings between metric spaces* / P. Hajlasz // Math. Ann. – 2009. – V. 343. – P. 801 – 823.

[36] Heinonen, J. *Lectures on analysis on metric spaces* / J. Heinonen. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – 151 p.

[37] Heinonen, J. *Quasiconformal maps on metric spaces with controled geometry* / J. Heinonen, P. Koskela // Acta Math. – 1998. – V. 181. P. 1 – 61.

[38] Heinonen, J. *A note on Lipshitz functions, upper gradients and the Poincare inequality* / J. Heinonen, P. Koskela // New Zealand J. Math. – 1999. – V. 28. – P. 37 – 42.

[39] Heinonen, J. *Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings* / J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J. Tyson// J. D'Analyse Math. – 2001. – V. 85. – P. 87 – 139.

[40] Kauhanen, J. *On function with derivatives in a Lorentz space* / J. Kauhanen, P. KoskelaP., J. Maly // Manuscripta Math. – 1999.–V. 100, №. 1. P. 87 – 101.

[41] Maly, J. *Sufficient Conditions for Change of Variables in Integral* / J. Maly // Труды по анализу и геометрии. – Изд. ИМ СО РАН. – 2000. – С. 370 – 386.

[42] Stromberg, J. O. *Weighted Hardy Spaces* / J. O. Stromberg, A. Torchinsky// Lecture Notes in Math.– Berlin: Springer, №.1381. – 1989. – 193 p.

[43] Vodopyanov, S. K. *Foundations of the Theory of Mappings with Bounded Distortion on Carnot Groups* /S. K. Vodopyanov// Contemporary Mathematics. – 2007. – V. 424. – P. 303 – 344.

УДК 519.63

ОБ АСИМПТОТИКЕ В ЦЕЛОМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ СИНГУЛЯРНО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. А. Шалаумов

ON ASYMPTOTIC AS A WHOLE SINGULAR PERTURBATION DIRICHLET'S PROBLEMS FOR BICONNECTED DOMAIN

V. A. Shalaumov

Для решения сингулярно возмущённой задачи Дирихле, имеющего экспоненциально малый характер, с помощью функций типа пограничного слоя строится формальное асимптотическое разложение в целом. Приводится явное выражение первых членов разложения.

For exponential small solution singular perturbation Diroichlet's problem global formal asymptotic expansion are constructed by means of function of boundary layer type

Ключевые слова: регулярная часть асимптотики, функции типа пограничного слоя.

Keywords: regular part asymptotic, function of boundary layer type.

Пусть G – ограниченная область в R^n с двусвязной гладкой границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. На $\overline{G} = G \cup \partial G$ рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} L^{\varepsilon}[y] \equiv \varepsilon\, y + (B(x), \nabla y) + C(x)y = f(x), \\ y|_{\Gamma_1} = \phi(x), \quad y|_{\Gamma_2} = \psi(x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что функции, входящие в (1), достаточно гладкие так, что существует единственное классическое решение и выполнено следующее основное предположение:

(A) Характеристики оператора $\frac{dx}{dt} = B(x)$, $x(0) = \overline{x_0} \in G$ выходят на Γ_1 за конечное время, не покидая при этом области G, причём$(B(x), n(x)) > 0 \quad \Gamma_1$, $(B(x), n(x)) < 0$ на Γ_2, где $n = n(x)$ вектор внешней нормали к области G (в дальнейшем эти характеристики выходят на Γ_1не особым образом).

При построении равномерного асимптотического разложения решения этой задачи методом пограничных функций вначале строится так называемое внешнее разложение (регулярная часть асимптотики) в виде формального ряда $R = R(x, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x)$, при этом задачи Коши, определяющие однозначно функции $y_i(x)$, получаются подстановкой ряда $R = R(x, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x)$ в уравнение с последующей группировкой слагаемых с одинаковыми степенями параметра ε и последующим сравнением правых и левых частей уравнения. Если выполнено условие (A), то регулярный ряд $R = R(x, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x)$ асимптотически удовлетворяет уравнению (1) и реализует граничное условие на границе Γ_1, в том смысле, что функции $\{y_i(x)\}$ $i = 1, 2, ...$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} L^0[y_0] \equiv (B(x), \nabla y_0) + C(x)y_0 = f(x), \\ y_0|_{\Gamma_1} = \phi(x), \end{cases} \qquad (2)$$
$$\begin{cases} L^0[y_k] \equiv (B(x), \nabla y_k) + C(x)y_k = -\Delta y_{k-1}, \\ y_k|_{\Gamma_1} = 0, \end{cases}$$
$$k = 1, 2, ...$$

Сингулярная часть разложения (пограничный слой), компенсирующая невязку в граничных условиях, строится в окрестности границы Γ_2 так, что сумма регулярной части и сингулярной части дают равномерное асимптотическое представление решения. Указанная процедура остаётся неизменной и в том случае, когда коэффициенты регулярно зависят от малого параметра.

При $\phi(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 0$ регулярная часть разложения тождественно равна нулю, а разложение пограничного слоя описывает поведение решения лишь в окрестности границы Γ_2.Но в ряде задач возникает необходимость построения асимптотики и в этом случае, в целом, на всей рассматриваемой области, например, для того, чтобы описать поведение решения, встречающееся в теории диффузионных процессов в указанной постановке. Процедура построения асимптотики и её обоснование в одномерном случае описана в работе [1] (метод последовательного выделения регулярных частей).

Опишем формальную процедуру построения при $\phi(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 0$.

Представим решение в виде $y = y(x,\varepsilon) = \exp\{-P_0(x,\varepsilon)\}g_0(x,\varepsilon)$ так, что $P_0(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2} = 0$, $P_0 = P_0(x,\varepsilon) > 0$ при $x \in G$, $\exp\{-P_0(x,\varepsilon)\}$ – – функция типа пограничного слоя в окрестности Γ_2. Нетрудно проверить, что $g_0 = g_0(x,\varepsilon)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[g_0] \equiv \varepsilon\Delta g_0 + (B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0, \nabla g_0) + g_0(\varepsilon\,|\nabla P_0|^2 - (B(x), \nabla P_0) + C(x) - \varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ g_0|_{\Gamma_1} = 0, \quad g_0|_{\Gamma_2} = \psi(x). \end{cases} \tag{3}$$

При подходящем подборе $P_0 = P_0(x,\varepsilon)$ (уравнение, определяющее $P_0(x,\varepsilon)$, будет приведено ниже) характеристики оператора L_0^ε будут не особым образом выходить на Γ_2, на границу с ненулевым граничным условием, а коэффициенты оператора регулярно зависеть от малого параметра так, что у $g_0 = g_0(x,\varepsilon)$ возможно выделение ненулевой регулярной части в виде $R_0 = R_0(x,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i y_i^0(x)$, которая асимптотически удовлетворяет уравнению (3) и реализует граничное условие на Γ_2. Поэтому представим g_0 в виде $g_0 = R_0 + \exp\{-P_1(x,\varepsilon)\}\cdot g_1$, где $\exp\{-P_1(x,\varepsilon)\}$ – функция типа пограничного слоя в окрестности Γ_1. Если положить

$$\begin{cases} \nabla P_1 = \frac{B(x)}{\varepsilon} - 2\nabla P_0, \\ P_1(x,\varepsilon)\,|_{\Gamma_1} = 0, P_1(x,\varepsilon) > 0,\ x \in G, \end{cases}$$

то нетрудно убедиться в том, что $g_1 = g_1(x,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} L_1^\varepsilon[g_1] \equiv \varepsilon\Delta g_1 + (-B(x) + 2\varepsilon\nabla P_0, \nabla g_1) + g_1(\varepsilon\,|\nabla P_0|^2 - (B(x), \nabla P_0) + C(x) - \mathrm{div}B + \varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ g_1|_{\Gamma_1} = -R_0(x,\varepsilon)|_{\Gamma_1}, g_1|_{\Gamma_2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, что характеристики оператора L_1^ε выходят на Γ_1, на границу с ненулевыми граничными условиями, не особым образом и коэффициенты оператора регулярно зависят от малого параметра так, что у $g_1 = g_1(x,\varepsilon)$, возможно выделение ненулевой регулярной части в виде $R_1 = R_1(x,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i y_i^1(x)$, которая асимптотически удовлетворяет уравнению и реализует граничное условие на Γ_1. Поэтому представим $g_1 = g_1(x,\varepsilon)$ в виде $g_1 = R_1 + \exp\{-P_2(x,\varepsilon)\}g_2$, где $\exp\{-P_2(x,\varepsilon)\}$ - функция типа пограничного слоя в окрестности Γ_2. Если положить

$$\begin{cases} \nabla P_2 = -\frac{B(x)}{\varepsilon} + 2\nabla P_0 = -\nabla P_1, \\ P_2(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2} = 0,\ P_2(x,\varepsilon) > 0 \text{ при } x \in G, \end{cases}$$

то, нетрудно убедиться в том, что $g_2 = g_2(x,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[g_2] \equiv \varepsilon\Delta g_2 + (B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0, \nabla g_2) + g_2(\varepsilon\,|\nabla P_0|^2 - (B(x), \nabla P_0) + C(x) - \varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ g_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad g_2|_{\Gamma_2} = -R_1(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2}. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнение в (5) то же, что и в (3), но с другим граничным условием на Γ_2 так, что процедуру последовательного выделения регулярных частей можно продолжить.

Продолжая последовательно процедуру выделения регулярных частей в (5) с вышевыбранными $P_1(x,\varepsilon)$, $P_2(x,\varepsilon)$, последовательно имеем:

$$\begin{aligned} g_2(x,\varepsilon) &= R_2 + e^{-P_1}g_3 = \\ &= R_2 + e^{-P_1}(R_3 + e^{-P_2}g_4) = \\ &= R_2 + e^{-P_1}(R_3 + e^{-P_2}(R_4 + e^{-P_1}g_5)) = \\ &= (R_2 + e^{-P_1}R_3) + e^{-(P_1+P_2)}(R_4 + e^{-P_1}g_5)) = \\ &= (R_2 + e^{-P_1}R_3) + e^{-(P_1+P_2)}(R_4 + e^{-P_1}(R_5 + \\ &\qquad + e^{-P_2}g_6)) = \\ &= (R_2 + e^{-P_1}R_3) + e^{-(P_1+P_2)}(R_4 + e^{-P_1}R_5) + \\ &\qquad + e^{-2(P_1+P_2)}(R_6 + e^{-P_1}g_7)) = \ldots \end{aligned}$$

то есть, формально решение можно представить в виде:

$$y = y(x,\varepsilon) = = e^{-P_0}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(R_{2k} + R_{2k+1}e^{-P_1})e^{-k(P_1+P_2)}\right].$$

На этом этапе выберем $P_0(x,\varepsilon)$ так, чтобы коэффициенты при свободном члене в (4) и (5) были равны по модулю и имели противоположные знаки (это так для членов при первых производных в силу выбора $P_1(x,\varepsilon)$), то есть $\varepsilon\left|\nabla P_0\right|^2 - (B(x),\nabla P_0) + C(x) - \operatorname{div}B(x) + \varepsilon\Delta P_0 = = -(\varepsilon\left|\nabla P_0\right|^2 - (B(x),\nabla P_0) + C(x) - \varepsilon\Delta P_0)$, тогда $P_0(x,\varepsilon)$ – решение уравнения эйконала:

$$\begin{cases} \varepsilon\left|\nabla P_0\right|^2 - (B(x),\nabla P_0) + C(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div}B(x) = 0, \\ P_0(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2} = 0, P_0(x,\varepsilon) > 0 \text{ при } x \in G. \end{cases} \quad (6)$$

Предполагаем, что выполнено следующее условие: (B) уравнение (6) имеет единственное классическое решение.

Асимптотически решение (6) представимо в виде:

$$\begin{array}{l} P_0 = \frac{A_{-1}}{\varepsilon} + A_0 + \varepsilon A_1 + \ldots, \\ A_i = A_i(x) \\ i = -1, 0, 1, 2, ... \end{array} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), с учётом граничных условий нетрудно выписать задачи Коши рекуррентно определяющие $A_i(x)$. Задачи Коши для первых приближений имеют вид:

$$\left|\nabla A_{-1}\right|^2 - (B(x), A_{-1}) = 0,\ A_{-1}(x)|_{\Gamma_2} = 0,$$
$$A_{-1}(x) > 0,\ x \in G, \text{то есть} \quad \nabla A_{-1} = B.$$

$$2(\nabla B(x),\nabla A_0) + C(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div}B(x) = 0,$$
$$A_0(x)|_{\Gamma_2} = 0\ A_0(x) \neq 0,\ x \in G\,.$$

$$2(\nabla B(x),\nabla A_1) + (\nabla A_0,\nabla A_0) = 0,$$
$$A_1(x)|_{\Gamma_2} = 0\ A_1(x) \neq 0,\ x \in G\,.$$

.

Так как

$$B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0 = = B(x) - 2\nabla A_{-1} + \varepsilon\nabla A_0 + \varepsilon^2\nabla A_1.... = = -B(x) - \varepsilon 2\nabla A_0 - \varepsilon^2 2\nabla A_1 - ...,$$

то, действительно, характеристики оператора L_0^ε выходят на Γ_2 не особым образом (с отличным от нуля граничным условием), и коэффициенты оператора регулярно зависят от малого параметра, следовательно, $R_0 = R_0(x,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i y_i^0(x)$ является ненулевой регулярной частью (внешним разложением) в асимптотическом представлении решения краевой задачи (3).

Так как

$$- B(x) + 2\varepsilon\nabla P_0 = = -B(x) + 2\nabla A_{-1} + \varepsilon 2\nabla A_0 + \varepsilon^2 2\nabla A_1 + ... = = B(x) + \varepsilon 2\nabla A_0 + \varepsilon^2 2\nabla A_1 - ...,$$

то характеристики оператора L_1^ε выходят на Γ_1 не особым образом (с отличным от нуля граничным условием), и коэффициенты оператора регулярно зависят от малого параметра, следовательно, в представлении $g_1 = R_1 + \exp\{-P_2(x,\varepsilon)\}g_2$, $R_1 = R_1(x,\varepsilon)$является ненулевой регулярной частью (внешним разложением) краевой задачи (4),то есть $R_1 = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i y_i^1(x)$.

Нетрудно проверить, что $R_k = R_k(x,\varepsilon) = = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i y_i^k(x)$ асимптотически удовлетворяют следующим уравнениям и реализуют одно из граничных условий, а именно:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[R_{2k}] \equiv \varepsilon\Delta R_{2k} + (B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0, R_{2k}) + \frac{1}{2}R_{2k}(\operatorname{div}B(x) - 2\varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ R_0(x,\varepsilon)_{|\Gamma_2} = \psi(x), R_{2k}(x,\varepsilon)_{\Gamma_2} = -R_{2k-1}(x,\varepsilon)_{\Gamma_2}, k = 1, 2, ...; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} L_1^\varepsilon[R_{2k-1}] \equiv \varepsilon\Delta R_{2k-1} + (-B(x) + 2\varepsilon\nabla P_0, R_{2k-1}) + \frac{1}{2}R_{2k-1}(-\operatorname{div}B(x) + 2\varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ R_{2k-1}(x,\varepsilon)_{\Gamma_1} = -R_{2k-2}(x,\varepsilon)_{\Gamma_1}, k = 1, 2, ... \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, формальное представление решения запишется в виде следующего ряда:

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon) \ = \exp\{-\frac{P_0}{\varepsilon}\}\left\{\sum_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i[\sum_{k=0}^{+\infty}(y_i^{2k} + y_i^{2k+1}\exp\{-\frac{P_1}{\varepsilon}\})\exp\{-k\frac{(P_1+P_2)}{\varepsilon}\}]\ \right\},\ x \in \overline{G}.. \quad (11)$$

Отметим, что в (11) в силу выбора $P_1(x,\varepsilon) + + P_2(x,\varepsilon) = C(\varepsilon)$ не зависит от $x \in \overline{G}$.

Для $P_i = P_i(x,\varepsilon),\ i = 1,2$ асимптотически имеем:

$$P_1 = \frac{C_{-1}}{\varepsilon} + C_0 + \varepsilon C_1 + \ldots,\ C_i = C_i(x)\ i = -1,0,1,...$$

$$P_2 = \frac{D_{-1}}{\varepsilon} + D_0 + \varepsilon D_1 + ..., D_i = D_i(x)\ i = -1,0,1...$$

$$\begin{cases} \nabla P_1 = \frac{B(x)}{\varepsilon} - 2\nabla P_0 = -\frac{B(x)}{\varepsilon} - 2\nabla A_0 - \varepsilon 2A_1 - ..., \\ P_1(x,\varepsilon)|_{\Gamma_1} = 0,\ P_1(x,\varepsilon) > 0,\ x \in G. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla P_2 = -\frac{B(x)}{\varepsilon} + 2\nabla P_0 = \frac{B(x)}{\varepsilon} + 2\nabla A_0 + \varepsilon 2A_1 + ..., \\ P_2(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2} = 0,\ P_2(x,\varepsilon) > 0,\ x \in G. \end{cases}$$

Отсюда, задачи Коши определяющие $C_i = C_i(x)$, $D_i = D_i(x)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \nabla C_{-1} = -B(x), \\ C_{-1}(x)|_{\Gamma_1} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla C_0 = -2A_0, \\ C_0(x)|_{\Gamma_1} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla D_{-1} = B(x), \\ D_{-1}(x)|_{\Gamma_2} = 0\ ; \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla D_0 = 2A_0, \\ D_0(x)|_{\Gamma_2} = 0\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla C_1 = -2A_1, \\ C_1(x)|_{\Gamma_1} = 0 \end{cases} \quad \dots$$

$$\begin{cases} \nabla D_1 = 2A_1, \\ D_1(x)|_{\Gamma_2} = 0\ . \end{cases} \quad \dots$$

Отметим, что по построению, $C_i(x) + D_i(x) = = K_i = \text{const}, \quad i = -1, 0, 1, 2...$

Далее уже нетрудно выписать задачи, однозначно определяющие y_i^k. Так как $B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0 = B(x) - 2\nabla B_{-1} + ... = = -B(x) - \varepsilon 2\nabla A_0 - \varepsilon^2 2\nabla A_1 - ...$ $\text{div}B(x) - 2\varepsilon\Delta P_0 = \text{div}B(x) - 2\Delta A_{-1} - \varepsilon 2\Delta A_0 - -\varepsilon^2 2\Delta A_1 - ... = -\text{div}B(x) - \varepsilon 2\Delta A_0 - \varepsilon^2 2\Delta A_1 - ...$, а коэффициенты при младших членах в (9),(10) равны по модулю и имеют противоположные знаки, нетрудно теперь выписывать уравнения, определяющие последовательные члены асимптотики.

Так задачи Коши, определяющие $y_0^k = y_0^k(x)$ в нулевом приближении, то есть при ε^0 в (11), имеют вид:

$$\begin{cases} L^0[y_0^0] \equiv (B(x), \nabla y_0^0) + \frac{1}{2} divB(x)\ \cdot y_0^0 = 0, \\ y_0^0(x)|_{\Gamma_2} = \psi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^0[y_0^1] \equiv (B(x), \nabla y_0^1) + \frac{1}{2} divB(x)\ \cdot y_0^1 = 0, \\ y_0^1(x)|_{\Gamma_1} = -\ y_0^0(x)\big|_{\Gamma_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^0[y_0^{2k}] \equiv (B(x), \nabla y_0^{2k}) + \frac{1}{2} divB(x)\ \cdot y_0^{2k} = 0, \\ y_0^{2k}(x)|_{\Gamma_2} = -\ y_0^{2k-1}(x)\big|_{\Gamma_2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^0[y_0^{2k+1}| \equiv (B(x), \nabla y_0^{2k+1}) + \frac{1}{2} divB(x)\ \cdot y_0^{2k+1} = 0, \\ y_0^{2k+1}(x)|_{\Gamma_1} = -\ y_0^{2k}(x)\big|_{\Gamma_1}; \qquad k = 1, 2, ... \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $y_0^{2k}(x) = -y_0^{2k+1}(x)$ при $x \in \overline{G}$, так что главный член формального асимптотического разложения (11) имеет вид:

$$\begin{aligned} J_0 = \exp\{-\tfrac{P_0}{\varepsilon}\}[\sum_{k=0}^{+\infty}(y_0^{2k}(x) + y_0^{2k+1}(x)\exp\{-\tfrac{P_1}{\varepsilon}\})\exp\{-k\tfrac{(P_1+P_2)}{\varepsilon}\}]\ \} = \\ = \exp\{-\tfrac{P_0}{\varepsilon}\}y_0^0(x)(1-\exp\{-\tfrac{P_1}{\varepsilon}\})[\sum_{k=0}^{+\infty}\exp\{-k\tfrac{(P_1+P_2)}{\varepsilon}\}] = \\ = \exp\{-\tfrac{P_0}{\varepsilon}\}y_0^0(x)\frac{1-\exp\{-\frac{P_1}{\varepsilon}\}}{1-\exp\{-\frac{(P_1+P_2)}{\varepsilon}\}} = \\ = \exp\{-\frac{A_{-1}(x)}{\varepsilon} - A_0(x)\}y_0^0(x)(\frac{1-\exp\{-\frac{C_{-1}(x)}{\varepsilon} - C_0(x)\}}{1-\exp\{-\frac{C_{-1}(x)+D_{-1}(x)}{\varepsilon} - (C_0(x)+D_0(x))\}}(1+o(1)). \end{aligned} \tag{12}$$

Следует отметить, что так найденное приближение сохраняет граничные условия исходной задачи, то есть равно нулю на Γ_1и равно $\psi(x)$на Γ_2.

Начальные задачи, определяющие следующие члены асимптотики в (11) выписываются стандартным образом из (9)и (10) группировкой слагаемых с одинаковыми степенями малого параметра с учётом специфического способа выбора граничных условий. Так, задачи Коши, определяющие $y_1^k = y_1^k(x)$ в первом приближении, имеют вид:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} L_1[y_1^0] = \Delta y_0^0 - ((B_1(x), \nabla y_0^0) + \frac{1}{2} divB_1(x) \cdot y_0^0) \equiv G_1 - G_2, \\ y_1^0(x)|_{\Gamma_1} = 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} L[y_1^{2k-1}] = G_1 + G_2, \\ y_1^{2k-1}(x)|_{\Gamma_2} = -y_1^{2k-2}(x)|_{\Gamma_2}; \end{cases} \quad \begin{cases} L[y_1^{2k}] = G_1 - G_2, \\ y_1^{2k}(x)|_{\Gamma_1} = -y_1^{2k-1}(x)|_{\Gamma_1}; \end{cases} \quad k = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{13}$$

Для того, чтобы получить удобные для сравнения в (11) выражения, представим решения в (13) в виде $y_1^0(x) = y_{11}^n(x) + y_{11}^o(x) + y_{12}(x)$, где функции являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} L_1[y_{11}^n] = G_1, \\ y_{11}^i(x)|_{\Gamma_2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} L_1[y_{11}^0] = 0, \\ y_{11}^i(x)|_{\Gamma_1} = -y_{11}^i|_{\Gamma_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1[y_{12}] = -G_2, \\ y_{12}^(x)|_{\Gamma_1} = 0 \end{cases}$$

тогда $y_1^1(x) = y_{11}^n(x) - y_{11}^o(x) - y_{12}(x)$. Индукцией нетрудно установить, что тогда:

$$\begin{aligned} &y_1^{2k}(x) = y_{11}^n(x) + (2k+1)y_{11}^0(x) + y_{12}(x), \\ &y_1^{2k+1}(x) = y_{11}^n(x) - (2k+1)y_{11}^o(x) - y_{12}(x), \\ &k = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (11) для первого приближения имеем:

$$\begin{aligned} J_1 = y_{11}^n(x)\tfrac{(1-\exp\{-P_1\})(1+\exp\{-(P_1+P_2)\})}{(1-\exp\{-(P_1+P_2)\})^2} + \\ + y_{11}^o(x)\tfrac{(1+\exp\{-P_1\})}{(1-\exp\{-(P_1+P_2)\})} + \\ + y_{12}(x)\tfrac{(1-\exp\{-P_1\})}{(1-\exp\{-(P_1+P_2)\})}. \end{aligned}$$

Отметим, что полученное выражение равно нулю на обеих границах рассматриваемой области, так что вместе с (12) сохраняет граничные условия исходной краевой задачи.

Последующие приближения выписываются стандартным образом из (9) и (10) группировкой слагаемых с одинаковыми степенями малого параметра.

Наконец, справедливо следующее утверждение

Теорема. *Если выполнены условия (A) и (B), то ряд в (11) равномерно асимптотический на* G.

Доказательство. Представим (11) в виде:

$$y = y(x,\varepsilon) = \exp\{-P_0\}\left\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i[\sum_{k=0}^{+\infty}(\phi_i^{2k}+\right.$$
$$+\phi_i^{2k+1}\exp\{-P_1\})\exp\{-k(P_1+P_2)\}]+$$
$$\left.+\, r_n(x,\varepsilon)\right\} = \exp\{-P_0\}(g_n+r_n).$$

Из (3) – (5) имеем:

$$L^\varepsilon[y] = L^\varepsilon[\exp\{-P_0\}g_0] =$$

$$= \exp\{-P_0\}L_0^\varepsilon[g_0] = exp\{-P_0\}L_0^\varepsilon[g_n+r_n] =$$

$$= \exp\{-P_0\}(L_0^\varepsilon[g_n] + L_0^\varepsilon[r_n]) =$$

$$= \exp(-P_0)(L_0^\varepsilon\left\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i[\sum_{k=0}^{+\infty}(\phi_i^{2k}+\right.$$

$$\left.+\phi_i^{2k+1}\exp(-P_1))\exp(-k(P_1+P_2))]\ \right\} + L_0^\varepsilon[r_n(x,\varepsilon)])\} = 0.$$

Вычислим:

$$L_0^\varepsilon[g_n] = L_0^\varepsilon[.\sum_{k=0}^{+\infty}(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\phi_i^{2k} + \exp\{-P_1\}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\phi_i^{2k+1}])\exp\{-k(P_1+P_2)\}] =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(L_0^\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\phi_i^{2k}] + \exp\{-P_1\}L_1^\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\phi_i^{2k+1}])\exp\{-k(P_1+P_2)\}] =$$
$$= \varepsilon^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}g_1^k(x)\exp\{-k(P_1+P_2)\}+\varepsilon^{n+1}\exp\{-P_1\}\sum_{k=0}^{+\infty}g_2^k(x)\exp\{-k(P_1+P_2)\}= \mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}),$$

равномерно на G, так как ряды в последнем соотношении равномерно сходящиеся. Нетрудно видеть, что в силу выбора граничных условий для $\varphi_i^k(x) = \varphi_i^k$, $P_i(x,\varepsilon)$, $i = 1,2,3,...$, имеют место равенства: $r_n(x,\varepsilon)|_{\Gamma_i} = 0$ $i = 1,2$.

Таким образом, остаток является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[r_n] = -L_0^\varepsilon[g_n]; \\ r_n(x,\varepsilon)|_{\Gamma_i} = 0\ i = 1,2.. \end{cases}.$$

Отсюда, в силу принципа максимума, $\sup r_n(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ равномерно на $\overline{G}$, что доказывает теорему.

Литература

[1] Шалаумов, В. А. *Об асимптотике в целом экспоненциально малых решений задачи Дирихле сингулярно зависящей от малого параметра* / В. А. Шалаумов // Электронный журнал "Исследовано в России". – 2009. – Т. 108. – С. 1430 – 1440.

АВТОРЫ ВЫПУСКА

Абросимов Николай Владимирович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории теории функций ИМ СО РАН ***Abrosimov Nikolay Vladimirovich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Research Fellow of Laboratory of Function Theory, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences	8(383)363-46-42 abrosimov@math.nsc.ru
Байгонакова Галия Аманболдыновна – аспирант кафедры математического анализа ГАГУ ***Baigonakova Galia Amanboldinovna*** – post-graduate students of the mathematical analysis chair GASU	8(913)-691-8816 alyaab@mail.ru
Бардаков Валерий Георгиевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИМ СО РАН, доцент кафедры алгебры и математической логики НГУ ***Bardakov Valery Georgievich*** – the doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher of Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Associated Professor of Algebra and Mathematical Logic chair, NSU	8(383)363-46-69 bardakov@math.nsc.ru
Бердинский Дмитрий Александрович – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры высшей математики физического факультета Новосибирского государственного университета ***Berdinsky Dmitry Alexandrovich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, teacher of chair of general mathematics of Physics faculty, NSU	berdinsky@gmail.com
Берестовский Валерий Николаевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН ***Berestovskii Valery Nikolaevich*** – the doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher of Omsk branch of Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences	8(3812)97-22-51 berestov@ofim.oscsbras.ru
Водопьянов Сергей Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, руководитель лаборатории геометрии и теории функций вещественных переменных ***Vodopianov Sergey Konstantinovich*** – the doctor of Physics and Mathematics, professor, Head of Laboratory of Geometry and the Theory of Real Functions	8(383)363-45-34 vodopis@math.nsc.ru
Гладунова Олеся Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа АлтГУ ***Gladunova Olesia Pavlovna*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of mathematical analysis chair, AltSU	8(3852)36-70-18 gladunova_olesya@mail.ru
Маурисио Годой-Молина – кандидат физико-математических наук, Франция Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique Route de Saclay, France ***Maurisio Godoy-Molina*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique Route de Saclay, France	8(913)-691-8816 mauricio.godoy@gmail.com
Головина Марина Ивановна – ассистент кафедры математического анализа Горно-Алтайского государственного университета ***Golovina Marina Ivanovna*** – assistant of the mathematical analysis chair, GASU	8(913)990-70-53 aniram.ru@googlemail.com
Гордеева Ирина Александровна – ассистент кафедры информатики Владимирского государственного университета ***Gordeeva Irina Alexandrovna*** – assistant of the informatics chair, Vladimir state university	igordeeva@list.ru

Дауруцева Наталия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа КемГУ ***Daurtseva Nataliya Alexandrovna*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of mathematical analysis chair, KemSU	8(3842)54-33-90 natali0112@ngs.ru
Зиндинова Мадина Александровна – аспирант кафедры теории функций НГУ ***Zindinova Madina Alexandrovna*** – post-graduate students of Theory Of Functions chair, NSU	8-985-193-89-51 madinaz@rambler.ru
Зубарева Ирина Александровна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН ***Zubareva Irina Alexandrovna*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Junior Researcher of Omsk branch of Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences	8(3812)97-22-51 i_gribanova@mail.ru
Зыкова Татьяна Викторовна – аспирант кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности ИКИТ СФУ ***Zykova Tatiana Victorovna*** – post-graduate students of Applied Mathematics and Computer Security chair of Institute of Space and Information Technology SFU	8(391)291-27-90 zykovatv@mail.ru
Исангулова Дарья Васильевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геометрии и теории функций вещественных переменных ИМ СО РАН, секретарь кафедры математического анализа НГУ ***Isangulova Daria Vasilievna*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of Laboratory of Geometry and the Theory of Reak Functione, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, secretary of mathematical analisis chair, NSU	8(383)3634-534 dasha@math.nsc.ru
Кацунова Анастасия Сергеевна – ассистент кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности СФУ ***Katsunova Anastasia Sergeevna*** – assistant of Applied Mathematics and Computer Security chair of Institute of Space and Information Technology SFU	8(391)2-912-790 askatsunova@gmail.com
Качуровский Александр Григорьевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН ***Kachurovskii Alexander Grigorievich*** – the doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher of Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences	8(383)363-46-46 agk@math.nsc.ru
Ким Виталий Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа КемГУ ***Kim Vitaly Borisovich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of mathematical analysis chair, KemSU	8(3842)54-34-18 dekim @ kemsu.ru
Козаченко Марина Сергеевна – аспирантка кафедры высшей математики Югорского государственного университета ***Kozachenko Marina Sergeevna*** – post-graduate students of General Mathematics chair, USU	8(908)88-18116 Marina-Kozachenko@yandex.ru
Козловская Татьяна Анатольевна – выпускница аспирантуры, НГУ ***Kozlovskaya Tatiana Anatolievna*** – postgraduate, NSU	8(913)705-36-74 konus_magadan@mail.ru
Кораблев Филипп Глебович – старший преподаватель кафедры компьютерной топологии и алгебры ЧелГУ ***Korablev Philip Glebovich*** – teacher of computer topology and algebra chair ChelSU	8(351)799-72-02 korablev@csu.ru
Корнев Евгений Сергеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий инженер кафедры математического анализа КемГУ ***Kornev Evgeny Sergeevich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, engineer of mathematical analysis chair, KemSU	8(3842)54-33-90 q148@mail.ru

Крепицина Татьяна Сергеевна – выпускница магистратуры КемГУ ***Krepizina Tatiana Sergeevna*** – graduate of magistracy, KemSU	8(950)597-56-95 kc-fabira@mail.ru
Максимова Екатерина Васильевна – студент магистратуры КемГУ ***Maksimova Ekaterina Vasilievna*** – student of magistracy, KemSU	
Малькович Евгений Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, секретарь кафедры геометрии и топологии НГУ ***Malkovich Evgeny Gennadievich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, secretary of Geometry and Topology chair, NSU	8-383-363-4510 malkovicheugen@ngs.ru
Манфреди Энрико – аспирант, Болонский университет, Италия ***Manfredi Enrico*** – post-graduate student, Bologna University, Italy	
Матвеев Сергей Владимирович – член-корреспондент РАН, профессор кафедры компьютерной топологии и алгебры ЧелГУ ***Matveev Sergey Vladimirovich*** – corresponding member of RAS, professor of computer topology and algebra chair ChelSU	8(3517)99-72-02 matveev@csu.ru
Медных Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функции НГУ, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН ***Mednykh Aleksander Dmitirievich*** – the doctor of Physics and Mathematics, professor of Theory of Functions, NSU, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences	8(913)-691-8816 smedn@mail.ru
Медных Илья Александрович – аспирант Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН ***Mednykh Ilia Aleksandrovich*** – post-graduate students of Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences	8(383)226-65-28 ilyamednykh@mail.ru
Мищенко Евгения Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Новосибирского государственного университета,научный сотрудник Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН ***Mishchenko Evgenia Vasilievna*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Dofferential Equation chair, NSU, Research Fellow of Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences	8(383)363-46-59 mish@math.nsc.ru
Молчанова Анастасия Олеговна – студентка магистратуры НГУ ***Molchanova Anastasia Olegovna*** – student of magistracy, NSU	8-923-123-51-46 mol239@yandex.ru
Мулаццани Микеле – PhD, профессор, Болонский университет, Италия ***Mulazzani Michele*** – PhD, professor, Bologna University, Italy	
Нещадим Михаил Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИМ СО РАН, доцент кафедры высшей математики НГУ ***Neshchadim Michail Vladimirovich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Senior Research of Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Associate Professor of general mathematics chair, NSU	8(383)363-46-70 neshch@math.nsc.ru
Овчинников Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики ЧелГУ ***Ovchinnikov Michail Alexeevich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Computational Mathematics chair, ChelSU	8(3517)99-72-31 ovch@csu.ru

Подвигин Иван Викторович – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики физического факультета Новосибирского государственного университета ***Podvigin Ivan Viktorovich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, assistant of general mathematics of Physics faculty, NSU	ivan_podvigin@ngs.ru
Пушкарева Татьяна Алексеевна – ассистент кафедры математического анализа ГАГУ ***Pushkareva Tatiana Alexeevna*** – assistant of mathematical analysis chair, GASU	8-923-661-36-79 albesik@mail.ru
Родионов Евгений Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа АлтГУ ***Rodionov Evgeny Dmitrievich*** – the doctor of Physics and Mathematics, professor of mathematical analysis cgair, AltSU	8(3852)36-70-18 edr2002@mail.ru
Романов Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики СО РАН ***Romanov Alexander Sergeevich*** – the doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher of Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences	8(383)363-45-12 asrom@math.nsc.ru
Седалищев Владимир Викторович – аспирант механико-математического факультета НГУ ***Sedalishchev Vladimir Viktorovich*** – post-graduate students of Faculty of Mechanic and Mathematics, NSU	vvs1988@yandex.ru
Сергеева Ольга Алексеевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа КемГУ ***Sergeeva Olga Alexeevna*** – the Candidate of Physics and Mathematics, teacher of Mathematical Analysis chair, KemSU	8(3842)54-33-90 Okoin@yandex.ru
Славолюбова Ярославна Викторовна – старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики Российского государственного торгово-экономического университета Кемеровского института (филиала) ***Slavolubova Yaroslavna Viktorovna*** – teacher of General and Applied Mathematics chair of RSTEU, Kemerovo branch	8(3842)75-33-34 jar1984@mail.ru
Славский Виктор Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и математических методов в экономике АлтГПА ***Slavsky Victor Vladimirovich*** – the doctor of Physics and Mathematics, professor of Geometry and mathematical methods in economy chair, AltSPA	8(3852)38-88-81 slavsky2004@mail.ru
Смоленцев Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа КемГУ ***Smolentsev Nikolay Konstantinovich*** – the doctor of Physics and Mathematics, professor of Mathematical Analysis chair, KemSU	8(3842)54-33-90 smolennk@mail.ru
Степанов Сергей Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Финансового университета при правительстве РФ ***Stepanov Sergey Evgenievich*** – the doctor of Physics and Mathematics, professor of Mathematics chair of Financial university under the government of the Russian Federation	s.e.stepanov@mail.ru
Трипатхи Мукут Мани – профессор, Бенаресский индуистский университет, Варанаси, Индия ***Tripathi Mukut Mani*** – Professor of Mathematics, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi, India	mmtripathi66@yahoo.com

Фоминых Евгений Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной топологии и алгебры ЧелГУ ***Fominykh Evgeny Anatolievich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Computer Topology chair, ChelSU	8(351)799-72-02 fominykh@csu.ru
Черненко Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии КемГУ ***Chernenko Vladimir Nikolaevich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Algebra and Geometry chair, KemSU	8(3842)54-18-31 chernenko@kemsu.ru
Чуешев Виктор Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа КемГУ ***Chueshev Victor Vasilievich*** – the doctor of Physics and Mathematics, professor of Mathematical Analysis chair, KemSU	8(3842)54-33-90 chueshev_vv@ngs.ru
Чуешева Надежда Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа КеГУ ***Chuesheva Nadegda Alexandrovna*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of mathematical analysis chair, KemSU	8(3842)54-33-90 chuesheva@ngs.ru
Шалаумов Владимир Андриянович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа КеГУ ***Shalaumov Vladimir Andrianovich*** – the Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of mathematical analysis chair, KemSU	8(3842)54-33-90 shalaumov@ngs.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ
"Вестника Кемеровского государственного университета"

Для публикации в «Вестнике КемГУ» принимаются статьи, в которых отражаются результаты актуальных фундаментальных и прикладных научных исследований, передовых наукоемких технологий, научных и научно-методических работ, посвященных проблемам высшего образования и развитию науки в высшей школе и соответствующие тематике журнала.

Со второго полугодия 2004 г. производится подписка на журнал (индекс 42150 по каталогу *«Пресса России»,* 51944 по каталогу российской прессы «Почта России»,). Электронная версия журнала представлена на сайте http://www.kemsu.ru/science/bulletin.htm. С 2008 г. полнотекстовая версия журнала в открытом доступе представлена в Научной электронной библиотеке eLIBRARY.RU и включена в реферативную базу данных **«Российский индекс научного цитирования»** (РИНЦ).

ПОРЯДОК ПРЕДОСТАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛА В РЕДАКЦИЮ

1. Текст статьи представляется в редакцию на русском языке, на электронном носителе, проверенном на отсутствие вирусов, в виде файла с расширением *.doc,* построенного средствами Microsoft Word 97-2003 или последующих версий, и одного печатного экземпляра на стандартных листах формата 210x297 мм. Иногородние авторы могут представлять указанные материалы по электронной почте gos@kemsu.ru. Электронная версия должна быть идентична распечатанному тексту, в случае расхождения за основу берется печатный вариант.

2. Авторам материалов естественнонаучного направления необходимо дополнительно предоставить экспертное заключение о возможности опубликования в открытой печати. Бланк экспертного заключения для авторов, являющихся сотрудниками КемГУ, представлен в приложении 1.

3. Все статьи, поступившие в редакцию, проходят внутреннее рецензирование, где анализируются актуальность темы, научная новизна и оригинальность решений, доказательная база, строгость и однозначность выводов, оснащенность научным аппаратом, качество иллюстративного материала и публикуются по решению редакционного совета журнала.

4. Редакция имеет право проводить сокращения и редакционные изменения текста рукописей.

5. Работы общественно-публицистического характера к рассмотрению и публикации не принимаются.

6. Представленные статьи могут быть возвращены автору на доработку или отклонены из-за несоответствия профилю журнала, неприемлемого объема, отрицательного итога экспертизы или несоблюдения правил оформления. Рукописи, не принятые к публикации, авторам не высылаются. Гонорар за опубликованные статьи не выплачивается.

7. Не допускается свыше двух публикаций одного автора в одном номере журнала.

8. *Статьи аспирантов печатаются в журнале бесплатно при наличии справки из отдела аспирантуры.*

9. Сторонние авторы оплачивают публикацию, статьи только после получения от редакции согласия на публикацию.

10. Представление оригинальной статьи к публикации в «Вестнике КемГУ» означает согласие авторов на передачу права автора на воспроизведение, распространение и доведение до всеобщего сведения любым способом.

СТРУКТУРА СТАТЬИ

1. Индекс универсальной десятичной классификации (УДК).
2. Название статьи.
3. Инициалы и фамилия автора (авторов).
4. Аннотация/реферат.
5. Ключевые слова.
6. Текст статьи с таблицами, рисунками, формулами.
7. Список литературы.
8. Публикуемые сведения об авторе (авторах): фамилия, имя, отчество; ученая степень, ученое звание; должность, место работы; служебные или домашние телефоны, адрес электронной почты (e-mail).

ПРАВИЛА К ОФОРМЛЕНИЮ

1. Текст набирается шрифтом Times New Roman, размер шрифта 10, межстрочный интервал – 1; поля: верхнее, нижнее и правое – 2 см, левое - 2,5 см, красная строка – 0,6 см; без колонтитулов и нумерации страниц; без сносок, ориентация – книжная (допустима, но нежелательна альбомная ориентация для отдельных страниц), перенос слов в документе – автоматический.
2. В верхнем левом углу указывается индекс УДК.
3. Заголовок статьи (не более 3 строк) необходимо предоставить' на русском и английском языках, прописными буквами, размер шрифта – 10, жирный, по центру.
4. Инициалы и фамилия автора (авторов через запятую) – строчными буквами, размер шрифта 10, полужирный, курсив.
5. Статья должна быть снабжена аннотацией и ключевыми словами (рекомендуемое количество ключевых слов – 5 – 7) на русском и английском языках.

6. При вставке формул использовать только Microsoft Equation (встроенный редактор формул Microsoft Office), расположение формул на странице – по центру. Нумеровать рекомендуется лишь формулы, на которые имеются ссылки. Например:

$$J_g^+ : g = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(z_1)i + \mathrm{Im}(z_1 / z_2)\, j + \\ + |\, z_1\,|^2 - |\, z_2\,|^2\, k \,|\, z_2 \neq 0, \\ k \,|\, z_2 = 0. \end{array} \right\} \quad (12)$$

7. Рисунки, вставленные в документ, должны допускать перемещение в тексте и возможность уменьшения размеров. Допустимо представление рисунков отдельными файлами формата *Jpg*. Рисунки необходимо представлять в черно-белой палитре. Рисунки и подписи к ним располагаются непосредственно в тексте; желательно при размещении таблиц и рисунков не делать разрыва страницы, так как это затрудняет компьютерную верстку сборника. Нумерация – подрисуночная по центру.

Например: *Рис. 5.* ***Элементарная ячейка кубического перовскита***

8. Таблицы нумеруются, если их число более одной:

Таблица I

Динамика изменения объема продаж продавцов-консультантов

9. Ссылки на цитированную литературу приводятся в квадратных скобках (ГОСТ 7.0.5.2008).

Например: ссылка на полный текст документа [6]; ссылка на фрагмент текста документа [6, с. 24 – 28].

10. Сокращения в тексте – по ГОСТ 7,12 – 93. Допускается использование аббревиатур.

11. Список литературы располагается после текста статьи, нумеруется (начиная с первого номера) в порядке упоминания или цитирования в тексте статьи, предваряется словом «Литература» и оформляется по ГОСТ 7.1-2003. Под одним номером допустимо указывать только один источник.

12. Примечания оформляются в виде сносок.

13. В конце текста статьи указываются: **полное название учреждения, где выполнено исследование, фамилии, имена** и **отчества** (полностью), **ученая степень, звание, должность, место работы**, номера контактных телефонов, адрес электронной почты всех авторов (**на русском** и **английском языках**).

14. На последней странице статьи должны быть подписи всех авторов.

15. Рекомендуемый объем статьи, включая аннотацию и список литературы, 4 – 7 страниц компьютерного набора формата А4 (210х297 мм).

ОБРАЗЕЦ НАБОРА

УДК 14(470+571) «18/19»

ПРОБЛЕМА СУБЪЕКТА ОТЕЧЕСТВЕННОГО ФИЛОСОФСТВОВАНИЯ В XIX В.

В. И. Красиков

A PROBLEM OF SUBJECTS OF RUSSIAN PHILOSOPHIZING IN XIX CENTURY

V. I. Krasikov

В статье исследуются социальные и ментальные особенности отечественных философов XIX столетия. Автор выявляет их обусловленность со стороны материальных и культурных ресурсов, образа жизни, стремится продемонстрировать как эти черты сказывались на стиле, интенсивности и приоритетах в философских занятиях.

The article is investigated the social and mental peculiarities of Russian philosophers of XIX century. The author explains their source and strives to demonstrate their influence upon a style, intensity and priority of philosophizing.

Ключевые слова: русская философия XIX века, особенности аристократического и демократического образа жизни и мышления в их влиянии на интеллектуальные построения.

Keywords: Russian philosophy of XIX century, the peculiarities of noble and democratic style of life and thinking and their influence upon intellectual constructions.

Текст...

Литература...

Красиков Владимир Иванович – доктор философских наук, профессор межфакультетской кафедры философии КемГУ.

Krasikov Vladimir Ivanovich – doctor of philosophy, Professor of mežfakul'tetskoj philosophy KemSU.

E-mail: krasikov 1958fd).vahoo.com. Тел.:.8(384-2) 72-77-75.

РЕКВИЗИТЫ РЕДАКЦИИ

Почтовый адрес: **Ф**едеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет» (КемГУ), 650043, Кемерово, ул. Красная, 6, Редакция журнала «Вестник КемГУ».

Электронный адрес: gos(@)kemsu.ru, ***телефон:*** 8(384-2) 58-80-24.

УСЛОВИЯ ОФОРМЛЕНИЯ ПОДПИСКИ!

- *Периодичность выхода журнала – 4 выпуска в год. Минимальный период подписки – 3 месяца (1 выпуск).*
- *Подписка проводится через отделения связи по объединенному каталогу «Пресса России» по индексу 42150, по каталогу российской прессы «Почта России» по индексу 51944*
- *Стоимость подписки через подписные агентства указана в соответствующих каталогах.*