УДК 517.9

О КОРРЕКТНОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПРЕПЯТСТВИЯ ПОТОКОМ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер, А. А. Жалнина

ON WELL-POSEDNESS OF STEADY PROBLEM FOR MIXTURE OF COMPRESSIBLE VISCOUS FLUIDS FLOW AROUND AN OBSTACLE

N. A. Kucher, A. A. Zhalnina

Рассматривается неоднородная краевая задача для уравнений, описывающих стационарное обтекание препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей. Доказывается существование и единственность сильного решения данной задачи. На основании полученных результатов может быть проведен анализ оптимальной формы препятствий при обтекании смесью вязких сжимаемых жидкостей.

The inhomogeneous boundary value problems for equations of mixture of compressible viscous fluids steady flow around an obstacle are considered. Existence and uniqueness of strong solution for such problem is proved. The results established in the paper can be used to analyze the optimal shape for obstacles in compressible flow of mixture of viscous fluids.

Ключевые слова: краевая задача, смесь вязких сжимаемых жидкостей, сильное решение, обтекание препятствия.

Keywords: boundary value problem, mixture of viscous compressible fluids, strong solution, flow around an obstacle.

Предположим, что бинарная смесь вязких сжимаемых жидкостей заполняет область $\Omega = B \setminus S$, евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, где B – ограниченная область с границей $\Sigma = \partial B$ класса C^3 (например, B – шар достаточно большого радиуса), S – компактное множество с достаточно гладкой границей ∂S, лежащее строго внутри B. Стационарное движение смеси в области Ω характеризуется полями скоростей $\vec{u}^{(1)}$, $\vec{u}^{(2)}$, плотностями ρ_1, ρ_2 и давлениями p_1, p_2 составляющих ее компонент, которые удовлетворяют следующим уравнениям [6] (представленным в безразмерной форме):

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\left(\vec{u}^{(j)}\right) + \operatorname{Re}\rho_i\left(\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\right)\vec{u}^{(i)} + \frac{\operatorname{Re}}{Ma^2}\nabla p_i + (-1)^i a\left(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}\right) = 0 \tag{1a}$$

в $\Omega, i = 1, 2,$

$$\operatorname{div}\left(\rho_i \vec{u}^{(i)}\right) = 0 \text{ в } \Omega,\ i = 1,2. \tag{1b}$$

Здесь $p_i = p_i(\rho_i), i = 1,2$ – заданная гладкая функция, Re и Ma обозначают числа Рейнольдса и Маха соответственно

$$\operatorname{Re} = \frac{V \cdot l \cdot \rho_c}{\mu}, \operatorname{Ma}^2 = \frac{\rho_c \cdot V^2}{p_c},$$

V, l, μ, ρ_c и p_c – характерные величины скорости, линейного размера, вязкости, плотности и давления соответственно), a – заданное положительное число, такое что слагаемое $\vec{J}^{(i)} = (-1)^{(i)} a\left(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}\right)$ характеризует интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси [1; 2],

$$L_{ij}(\vec{u}^{(j)}) = -\mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} - (\mu_{ij} + \lambda_{ij})\nabla\operatorname{div}\vec{u}^{(j)}, i, j = 1, 2,$$

причем постоянные (безразмерные) коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij} удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &\mu_{11} > 0,\ 4\mu_{11}\cdot\mu_{22} - \\ &-(\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0,\ \lambda_{11} + \mu_{11} > 0, \\ &4(\lambda_{11} + 2\mu_{11})(\lambda_{22} + 2\mu_{22}) - \\ &-(\lambda_{12} + 2\mu_{12} + \lambda_{21} + 2\mu_{21})^2 > 0. \end{aligned} \tag{1c}$$

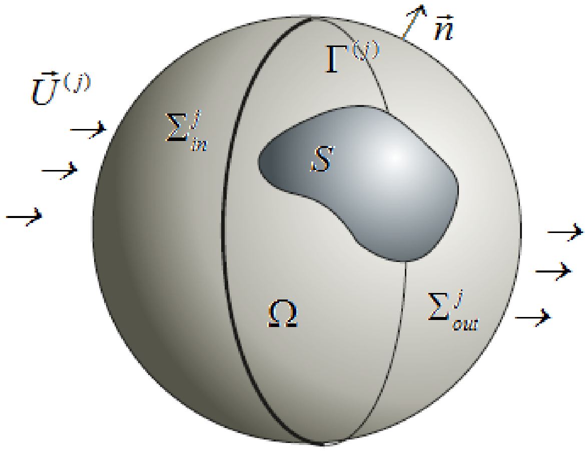

Рис. 1. ***Область течения j-ой компоненты смеси***

Пусть $\vec{U}^{(j)}, j = 1,2$ – заданные векторные поля класса $C^3(R^3)$, обращающиеся в нуль в окрестности множества S. На границе Σ области B, выделим так называемые участки «втекания»:

$$\Sigma^j_{in} = \{x \in \Sigma : \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} < 0\},\ j = 1,2,$$

и участки «вытекания»:

$$\Sigma^j_{out} = \{x \in \Sigma : \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} > 0\},\ j = 1,2,$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе Σ (рис. 1).

Будем считать выполненными следующие условия.

Условие А.

1. *Граница* Σ *есть замкнутая поверхность класса* C^3 *и множества* $\Gamma^{(j)} = cl\Sigma_{in}^{(j)} \cap \left(\Sigma \setminus \Sigma_{in}^{(j)}\right), j = 1,2$ – *замкнутые одномерные многообразия такие, что* $\Sigma = \Sigma_{in}^{(j)} \cup \Gamma^{(j)} \cup \Sigma_{out}^{(j)}$.
2. *Векторные поля* $\vec{U}^{(j)} \in C^3(\partial\Omega)$ *удовлетворяют условиям:* $\int\limits_{\Sigma} \vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n} ds = 0, j = 1,2$.
3. *Существует такая постоянная* $C > 0$, *что* $\vec{U}^{(j)} \cdot \nabla\left(\vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n}\right) > C > 0,$ *на* $\Gamma^{(j)}, j = 1,2.$

Так как векторные поля $\vec{U}^{(j)}$ являются касательными к $\partial\Omega$ на $\Gamma^{(j)}$, то величина $\vec{U}^{(j)} \cdot \nabla\left(\vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n}\right)$ определена значениями $\vec{U}^{(j)}$ на $\Gamma^{(j)}$. Очевидно, что условие А(3) выполнено для всех строго выпуклых областей и постоянных векторных полей. Геометрическая интерпретация условия А(3) состоит в том, что величины $\vec{U}^{(j)} \cdot \vec{n}$ обращаются в нуль на $\Gamma^{(j)}$ только до первого порядка, в любой точке $P \in \Gamma^{(j)}$ вектор $\vec{U}^{(j)}(P)$ касается части $\partial\Omega$, где $\vec{U}^{(j)}$ – внешнее векторное поле.

К уравнениям (1a) – (1b) присоединим граничные условия:

$$\vec{u}^{(j)} = \vec{U}^{(j)} \text{ на } \Sigma,\ \vec{u}^{(j)} = 0 \text{ на } \partial S,\ j = 1,2, \tag{1d}$$

$$\rho_j = \rho_j^0 \text{ на } \Sigma_{in}^j,\ j = 1,2, \tag{1e}$$

где $\rho_j^0, j = 1,2$ – заданные положительные постоянные.

Выберем векторное поле $\vec{T} \in C^2(R^3)$, равное нулю в окрестности границы Σ и определим отображение $y = \vec{T}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\vec{T}(x),$ которое задает возмущение формы обтекаемого препятствия S. Для малых ε отображение $x \mapsto \vec{T}_\varepsilon(x)$ является диффеоморфизмом области течения Ω на область $\Omega_\varepsilon = B \setminus S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = \vec{T}_\varepsilon(S)$ – возмущенное обтекаемое препятствие.

В возмущенной области Ω_ε мы рассмотрим краевую задачу (1) и ее решение обозначим через $(\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)}, \overline{\rho}_{i\varepsilon}), i = 1,2$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\mu_{ij}\Delta\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(j)} + \left(\mu_{ij} + \lambda_{ij}\right)\nabla\operatorname{div}\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(j)}\right] - $$
$$- \operatorname{Re}\overline{\rho}_{i\varepsilon}\left(\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla\right)\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)} - \frac{\operatorname{Re}}{Ma^2}\nabla p_i + \tag{2a}$$
$$+ (-1)^{i+1} a\left(\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(2)} - \overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(1)}\right) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, i = 1,2,$$

$$\operatorname{div}\left(\overline{\rho}_{i\varepsilon}\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)}\right) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon,\ i = 1,2, \tag{2b}$$

$$\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma,\ \overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S_\varepsilon, i = 1,2, \tag{2c}$$

$$\overline{\rho}_{i\varepsilon} = \rho_i^0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i = 1,2. \tag{2d}$$

Таким образом решения краевой задачи (2) и функционалы от $\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)}$, $\overline{\rho}_{i\varepsilon}$ становятся функциями параметра ε, и мы приходим к анализу зависимости решений краевой задачи для уравнений динамики смеси вязких сжимаемых жидкостей от формы области течения.

Данную задачу удобно свести к исследованию зависимости решений от коэффициентов системы дифференциальных уравнений, которая возникает в результате замены пространственных переменных.

С этой целью введем функции $\vec{u}_\varepsilon^{(i)}$ и $\rho_{i\varepsilon}, i = 1,2,$ определенные в невозмущенной области Ω по формулам:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x) = \mathbf{N}(x)\,\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)}(x + \varepsilon\vec{T}(x)), \\ &\rho_{i\varepsilon}(x) = \overline{\rho}_{i\varepsilon}(x + \varepsilon\vec{T}(x)), x \in \Omega, i = 1,2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{N}(x) = (\det\mathbf{M}(x))\mathbf{M}^{-1}(x)$,

$\mathbf{M}(x) = \mathbf{I} + \varepsilon\, D\vec{T}(x)$,

$D\vec{T}(x) = \left\{\dfrac{\partial\vec{T}_i}{\partial x_j}(x)\right\}$ – матрица Якоби отображения $x \mapsto \vec{T}(x)$. Введем обозначение

$$g(x) = \sqrt{\det\mathbf{N}(x)}.$$

Лемма. Пусть $(\overline{\vec{u}}_\varepsilon^{(i)}(y), \overline{\rho}_{i\varepsilon}(y)), i = 1,2$ – решение задачи (2). Тогда пары

$$(\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(x), \rho_{i\varepsilon}(x)), i = 1,2,$$

определенные по формулам (3), являются решением следующей задачи:

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}+$$
$$+\nabla\left(g^{-1}\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_{ij}+\lambda_{ij}\right)\nabla\operatorname{div}\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}-\frac{\mathrm{Re}}{Ma^{2}}\nabla p_{i}\right)= \quad (4a)$$
$$=\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)})+\mathrm{Re}\,\mathcal{B}\left(\rho_{i\varepsilon},\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)},\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\right)+$$
$$+\left(-1\right)^{i}\mathcal{S}\left(\vec{u}_{\varepsilon}^{(2)}-\vec{u}_{\varepsilon}^{(1)}\right)=0 \text{ в } \Omega,\quad i=1,2,$$
$$\operatorname{div}\left(\rho_{i\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\right)=0 \text{ в } \Omega,\, i=1,2, \quad (4b)$$
$$\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}=\vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma,\ \vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}=0 \text{ на } \partial S,\, i=1,2, \quad (4c)$$
$$\rho_{i\varepsilon}=\rho_{i}^{0} \text{ на } \Sigma_{in}^{i},\, i=1,2. \quad (4d)$$

Здесь линейные операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ и нелинейное отображение $\mathcal{B}$ определены по формулам:

$$\mathcal{A}(\vec{u})=\Delta\vec{u}-\left(\mathbf{N}^{T}\right)^{-1}\operatorname{div}\left(g^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^{T}\nabla\left(\mathbf{N}^{-1}\vec{u}\right)\right), \quad (4e)$$
$$\mathcal{B}(\rho,\vec{u},\vec{w})=\rho\left(\mathbf{N}^{T}\right)^{-1}\left(\vec{u}\,\nabla\left(\mathbf{N}^{-1}\vec{w}\right)\right),$$
$$\mathcal{S}(\vec{u})=g\cdot a\left(\mathbf{N}^{T}\right)^{-1}\mathbf{N}^{-1}\vec{u}. \quad (4f)$$

Доказательство. Заметим, что для любой функции $\varphi(y)\in C^{1}(\Omega_{\varepsilon})$ справедливо равенство

$$(\nabla_{y}\,\varphi)(y(x))=\left(\left(\mathbf{M}^{T}\right)^{-1}\nabla_{x}\,\tilde{\varphi}\right)(x),$$
$$\text{где } \tilde{\varphi}=\varphi\left(y(x)\right), \quad (5)$$

а для векторного поля $\vec{a}\in C^{1}(\Omega_{\varepsilon})$ имеет место формула:

$$(\operatorname{div}_{y}\vec{a})\left(y(x)\right)=g^{-1}\operatorname{div}_{x}\left(\mathbf{N}\cdot\vec{a}\left(y(x)\right)\right). \quad (6)$$

Полагая $\vec{a}(y)=\overline{\rho}_{i\varepsilon}(y)\cdot\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(i)}(y)$, в силу формулы (6) имеем:

$$\operatorname{div}_{y}\left(\overline{\rho}_{i\varepsilon}\cdot\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(i)}\right)\left(y(x)\right)=$$
$$=g^{-1}\operatorname{div}_{x}\left(\rho_{i\varepsilon}\left(x\right)\cdot\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\left(x\right)\right),$$

поэтому в силу уравнений (2b) приходим к уравнениям (4b). Учитывая тождество $\left(\mathbf{M}^{T}\right)^{-1}=g^{-1}\mathbf{N}^{T}$, из равенства:

$$\operatorname{div}_{y}\left(\sum_{j=1}^{2}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\right)\left(y(x)\right)=$$
$$=g^{-1}(x)\operatorname{div}_{x}\left(\sum_{j=1}^{2}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}(x)\right)$$

и формулы (5) получим:

$$\nabla_{y}\begin{bmatrix}\operatorname{div}_{y}\left(\sum_{j=1}^{2}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\left(y\right)\right)- \\ -\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^{2}}\,p_{i}\left(\overline{\rho}_{i\varepsilon}\left(y\right)\right)\end{bmatrix}\left(y(x)\right)=$$
$$=g^{-1}\mathbf{N}^{T}\nabla_{x}\begin{bmatrix}g^{-1}\operatorname{div}_{x}\left(\sum_{j=1}^{2}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}\left(x\right)\right)- \\ -\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^{2}}\,p_{i}\left(\overline{\rho}_{i\varepsilon}\left(x\right)\right)\end{bmatrix}. \quad (7)$$

В силу формул (5), (6) имеет место равенство:

$$\left(\Delta\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\right)\ (y(x))=\left(\operatorname{div}_{y}\left(\nabla_{y}\,\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\right)\right)\ \left(y(x)\right)=$$
$$=g^{-1}\operatorname{div}_{x}\left(g^{-1}\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}^{T}\cdot\nabla_{x}\left(\mathbf{N}^{-1}\cdot\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}\right)\right)(x).$$

Поэтому, если ввести линейный оператор $\mathcal{A}(\vec{u})$ по формуле (4e), то получаем тождество:

$$\left(\Delta\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\right)\ \left(y(x)\right)=$$
$$=g^{-1}\mathbf{N}^{T}\left[\Delta\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}-\mathcal{A}(\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)})\right]\ (x). \quad (8)$$

Рассмотрим теперь выражение $\left(\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\cdot\nabla\right)\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}$:

$$\left(\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\cdot\nabla\right)\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\left(y(x)\right)=\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\left(y(x)\right)\cdot\left(\nabla_{y}\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\right)\ \left(y(x)\right)=$$
$$=\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\left(y(x)\right)\cdot g^{-1}\mathbf{N}^{T}\nabla_{x}\left(\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\left(y(x)\right)\right)=$$
$$=g^{-1}\mathbf{N}\,\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(j)}\left(y(x)\right)\ \nabla_{x}\left(\mathbf{N}^{-1}\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}\right)\ (x)=$$
$$=g^{-1}\,\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}(x)\nabla\left(\mathbf{N}^{-1}\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}\right)\ (x).$$

Вводя обозначение

$$\mathcal{B}(\rho,\vec{u},\vec{w})=\rho\left(\mathbf{N}^{T}\right)^{-1}\vec{u}\cdot\nabla\left(\mathbf{N}^{-1}\vec{w}\right),$$

получаем соотношение

$$\overline{\rho}_{i\varepsilon}(\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(i)}\cdot\nabla)\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(i)}\left(y(x)\right)=$$
$$=g^{-1}\mathbf{N}^{T}\mathcal{B}(\rho_{i\varepsilon},\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)},\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}). \quad (9)$$

Наконец, вводя линейный оператор

$$\mathcal{S}(\vec{u})=ga\left(\mathbf{N}^{T}\right)^{-1}\mathbf{N}^{-1}\,\vec{u},$$
$$\mathcal{S}(\vec{u})=ga\left(\mathbf{N}^{T}\right)^{-1}\mathbf{N}^{-1}\,\vec{u},$$

можем записать, что

$$(-1)^{i+1}a(\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(2)}-\overline{\vec{u}}_{\varepsilon}^{(1)})\left(y(x)\right)=$$
$$=(-1)^{i+1}g^{-1}\mathbf{N}^{T}\mathcal{S}(\vec{u}_{\varepsilon}^{(2)}-\vec{u}_{\varepsilon}^{(1)})(x). \quad (10)$$

Из формул (7) – (10) и уравнений (2a) вытекают уравнения (4a). Лемма доказана.

Задачу (4) удобно переписать в несколько иной форме, опуская ради краткости записи параметр ε.

Введем эффективные вязкие потоки по формулам:

$$q_i = -\sum_{j=1}^{2} g^{-1}(\mu_{ij}+\lambda_{ij})\mathrm{div}\vec{u}^{(j)} + \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^2} p_i, i=1,2.$$

Тогда краевая задача (4) может быть переписана в виде:

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} - \nabla q_i = \sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\mathcal{A}\left(\vec{u}^{(j)}\right) + \mathrm{Re}\,\mathcal{B}\left(\rho_i, \vec{u}^{(i)}, \vec{u}^{(i)}\right) + (-1)^i \mathcal{S}(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \text{ в } \Omega, i=1,2, \tag{11a}$$

$$\mathrm{div}\vec{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2} g\sigma_{ij}p_j - \sum_{j=1}^{2} g\gamma_{ij}q_j \text{ в } \Omega, i=1,2, \tag{11b}$$

$$\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\rho_i + \rho_i\sum_{j=1}^{2} g\sigma_{ij}p_j = \rho_i \sum_{j=1}^{2} g\gamma_{ij}q_j \text{ в } \Omega, i=1,2, \tag{11c}$$

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \ \vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S, i=1,2, \tag{11d}$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i=1,2. \tag{11e}$$

Здесь $\gamma_{ij}, i,j=1,2$ – элементы матрицы $\varkappa^{-1}$, обратной к матрице $\varkappa = \{\mu_{ij}+\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{2}$ (из условий (1c) следует невырожденность матрицы $\varkappa$);

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^2}\gamma_{ij}, i,j=1,2.$$

Решение задачи (11) ищем в виде возмущения в окрестности данного

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{u}_*^{(i)} + \vec{v}^{(i)}, \quad \rho_i = \rho_i^* + \varphi_i, \ q_i = q_i^* + \pi_i + \Lambda\cdot p_i(\rho_i^*) + \sum_{j=1}^{2}\left(\mu_{ij}+\lambda_{ij}\right)m_j, \tag{12}$$

где $\rho_i^* = \rho_i^0$, $\Lambda = \dfrac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}^2}$, и $\vec{u}_*^{(1)}$, $\vec{u}_*^{(2)}$, $q_1^{(*)}$, $q_2^{(*)}$ – достаточно гладкие решения следующей краевой задачи:

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{u}_*^{(j)} - \nabla q_i^* = 0, \mathrm{div}\vec{u}_*^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega, i=1,2,$$

$$\vec{u}_*^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \text{ на } \Sigma, \ \vec{u}_*^{(i)} = 0 \text{ на } \partial S,$$

$$\Pi q_i^* = q_i^* \ i=1,2, \text{ где } \Pi q = q - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega q\,dx..$$

На основании уравнений (11) получим для вектора $\vec{\theta} = \left(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \pi_1, \pi_2, \varphi_1, \varphi_2\right)$ краевую задачу:

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{v}^{(j)} - \nabla\pi_i = \sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\mathcal{A}\left(\vec{u}^{(j)}\right) + \mathrm{Re}\,\mathcal{B}\left(\rho_i, \vec{u}^{(i)}, \vec{u}^{(i)}\right) + (-1)^i\mathcal{S}(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}) \text{ в } \Omega, i=1,2, \tag{13a}$$

$$\mathrm{div}\vec{v}^{(i)} = g\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho_i^*}\tau_{ij}\varphi_j - g\Phi_i[\vec{\theta}] - gm_i \text{ в } \Omega, i=1,2, \tag{13b}$$

$$\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\varphi_i + \tau_{ii}\varphi_i = \Psi_i[\vec{\theta}] + g\,m_i\rho_i \text{ в } \Omega, i=1,2, \tag{13c}$$

$$\vec{v}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \varphi_i = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, \ \Pi\pi_i = \pi_i, \ i=1,2, \tag{13d}$$

где

$$\Phi_i[\vec{\theta}] = \frac{1}{\Lambda}\sum_{j=1}^{2}\frac{\tau_{ij}}{p_j'(\rho_j^*)\cdot\rho_j^*}\left(q_j^* + \pi_j\right) - \sum_{j=1}^{2}\frac{\tau_{ij}}{p_j'(\rho_j^*)\cdot\rho_j^*}H_j(\varphi_j), \ i=1,2,$$

$$\Psi_1[\vec{\theta}] = -g\tau_{12}\varphi_2 - g\frac{1}{\rho_1^*}\sum_{j=1}^{2}\tau_{1j}\varphi_1\varphi_j + g\rho_1\Phi_1[\vec{\theta}] + (1-g)\tau_{11}\varphi_1,$$

$$\Psi_2[\vec{\theta}] = -g\tau_{21}\varphi_1 - g\frac{1}{\rho_2^*}\sum_{j=1}^{2}\tau_{2j}\varphi_2\varphi_j + g\rho_2\Phi_2[\vec{\theta}] + (1-g)\tau_{22}\varphi_2,$$

$$H_j(\varphi_j) = p_j\left(\rho_j^* + \varphi_j\right) - p_j\left(\rho_j^*\right) - p_j'\left(\rho_j^*\right)\varphi_j, j=1,2,$$

τ_{ij} – элементы матрицы $\tau = R^*\sigma P^*$,

$$\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{2},$$

$$P^* = \begin{pmatrix} p_1'(\rho_1^*) & 0 \\ 0 & p_2'(\rho_2^*) \end{pmatrix}, R^* = \begin{pmatrix} \rho_1^* & 0 \\ 0 & \rho_2^* \end{pmatrix},$$

векторные поля $\vec{u}^{(i)}$ и функции ρ_i заданы в (12), $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ определены по формулам (4e), (4f). Константы m_i, служащие инструментом контроля массы компонент смеси в области Ω, определяются по формулам:

$$\vec{m} = \left(k\ \ \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\vec{f}, \ \vec{m} = (m_1, m_2)^T, \quad \vec{f} = (f_1, f_2)^T, \ k = \int_\Omega g\,dx, \quad \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{2}, \ a_{ij} = \frac{1}{\rho_i^*}\int_\Omega g\cdot\rho_j\cdot\zeta_i^{(j)}dx, \quad f_i = \frac{1}{\rho_i^*}\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega\left(\zeta_i^{(j)}\cdot\Psi_j[\vec{\theta}] - g\Phi_i[\vec{\theta}]\right)dx, \tag{13e}$$

где $\zeta_i^{(j)}$ решение следующей краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\vec{u}^{(i)}\cdot\zeta_j^{(i)})+\tau_{ii}\cdot\zeta_j^{(i)}=\tau_{ji}\,g$$
$$\text{в }\Omega,\ \zeta_j^{(i)}=0 \text{ на } \Sigma_{out}^{(i)}, i,j=1,2. \tag{13f}$$

В процессе решения задачи (13) используются пространства С. Л. Соболева $W^{l,p}(\Omega)$ с целыми показателями $l\geq 0$ (функции, обладающие обобщенными производными до порядка $l\geq 0$ включительно, суммируемые со степенью $p\geq 1$), а также $W^{s,r}(\Omega)$ с дробным показателем дифференцируемости s [3; 4].

Введем кроме того функциональные пространства:

$$X^{s,r}=W^{s,r}(\Omega)\cap W^{1,2}(\Omega),$$
$$V^{s,r}=W^{s+1,r}(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega)$$

с нормами:

$$\|\varphi\|_{X^{s,r}}=\|\varphi\|_{W^{s,r}(\Omega)}+\ \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$
$$\|v\|_{V^{s,r}}=\ \|v\|_{W^{s+1,r}(\Omega)}+\|v\|_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Принадлежность вектор-функции тому или иному функциональному пространству будем понимать как принадлежность ему каждой компоненты этой вектор-функции.

Рассмотрим замкнутое подпространство E Банахова пространства $V^{s,r}\times X^{s,r}$:

$$E=\{\vec{\theta}=(\vec{v}^{(1)},\vec{v}^{(2)},\varphi_1,\varphi_2):$$
$$:\vec{v}^{(i)}\ \in\ \mathrm{V}^{s,r},\pi_i\ \in X^{s,r},\varphi_i\in X^{s,r},$$
$$\vec{v}^{(i)}\,|_{\partial\Omega}=0,\ \varphi_i\,|_{\Sigma_{in}^i}=0,\ \Pi\,\pi_i=\pi_i, i=1,2\}.$$

Норма в пространстве E задается по формуле:

$$\|\vec{\theta}\|_E=\sum_{j=1}^{2}\Big(\ \|\vec{v}^{(j)}\|_{V^{s,r}}+\ \|\varphi_j\|_{X^{s,r}}+\ \|\pi_j\|_{X^{s,r}}\Big).$$

Замкнутый шар радиуса τ с центром в точке $\vec{\theta}=0$ из E обозначим через B_τ.

Основной результат работы доставляет следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что поверхность Σ и заданные векторные поля $\vec{U}^{(1)},\vec{U}^{(2)}$ удовлетворяют условиям А. Пусть кроме того для чисел r и s выполнены условия:*

$$1/2<s<1,\ r<\infty,\ 2s-3r^{-1}<1,$$
$$sr>3,\ (1-s)r>3.$$

Тогда существует положительное число $\sigma_*>1$, зависящее только от Ω, $\vec{U}^{(1)},\vec{U}^{(2)}, r, s$, обладающее следующими свойствами: для любых $\tau_{11}\geq\sigma_*$, $\tau_{22}\geq\sigma_*$ найдутся положительные числа τ_* и c, зависящие только от $\Omega,\vec{U}^{(1)},\vec{U}^{(2)}, r, s$ и τ_{11},τ_{22}, такие что если

$$\tau\in(0,\tau^*]\ и\ \Lambda^{-1},\ a,\ Re\in(0,\tau^2],$$
$$\|\mathbf{N}-\mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)}\leq\tau^2,\ \tau_{12},\tau_{21}\in(0,\tau],$$

то задача (13) имеет единственное решение

$$\vec{\theta}=\left(\vec{v}^{(1)},\vec{v}^{(2)},\pi_1,\pi_2,\varphi_1,\varphi_2\right)\in B_\tau,$$
$$\vec{\zeta}=\left(\zeta_1^{(1)},\zeta_2^{(1)},\zeta_1^{(1)},\zeta_2^{(1)}\right)\in X^{s,r},$$
$$\vec{m}=(m_1,m_2)\in\mathbb{R}^2,$$

удовлетворяющее неравенствам:

$$|\,\vec{m}\,|\leq c(\max\{\tau_{11},\tau_{22}\})^{1+\frac{1}{\alpha}}\tau^2,\ \alpha\in(0,s-3r^{-1}),$$
$$\left\|\xi_i^{(3-i)}\right\|_{X^{s,r}}\leq c\tau,\ \left\|\xi_i^{(i)}\right\|_{X^{s,r}}\leq c\tau_{ii},\ i=1,2,$$
$$\left\|\left(k\quad\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\right\|\leq c\cdot\sigma^{\frac{1}{\alpha}},\ \alpha\in(0,s-3r^{-1}).$$

Совокупность решений $\left(\vec{\theta},\vec{\xi},\vec{m}\right)$ задачи (13), соответствующих всем матричнозначным функциям $\mathbf{N}$ из шара $B\left(\tau^2\right)=\left\{\mathbf{N}:\|\mathbf{N}-\mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)}\leq\tau^2\right\}$, является относительно компактным подмножеством пространства $W^{s+1,r}(\Omega)\times W^{s,r}(\Omega)\times\mathbb{R}^2$.

Охарактеризуем кратко этапы доказательства этой теоремы.

Фиксируем шар B_τ радиуса $\tau\in(0,1)$ и выбираем произвольную матрицу $\mathbf{N}$ такую, что

$$\|\mathbf{N}-\mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)}\leq\tau^2.$$

Выберем теперь произвольный элемент $\vec{\theta}=\left(\vec{v}^{(1)},\vec{v}^{(2)},\pi_1,\pi_2,\varphi_1,\varphi_2\right)\in B_\tau$ и положим

$$\vec{u}^{(i)}=\vec{u}_*^{(i)}+\vec{v}^{(i)},\ \rho_i=\rho_i^*+\varphi_i,$$
$$q_i=q_i^*+\pi_i+\Lambda\cdot p_i(\rho_i^*)+\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_{ij}+\lambda_{ij}\right)m_j,$$

Рассмотрим следующую краевую задачу.
Требуется найти такое поле
$\vec{\theta}_1=\left(\vec{v}_1^{(1)},\vec{v}_1^{(2)},\pi_1^1,\pi_2^1,\varphi_1^1,\varphi_2^1\right)$, что

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{v}_1^{(j)}-\nabla\pi_i^1=$$
$$=\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\mathcal{A}\left(\vec{u}^{(j)}\right)+\operatorname{Re}\mathcal{B}\left(\rho_i,\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(i)}\right)+ \tag{14a}$$
$$+(-1)^i\mathcal{S}(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})\ \text{ в }\ \Omega, i=1,2,$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_1^{(i)}=\Pi\left(g\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho_i^*}\tau_{ij}\varphi_j^1-g\Phi_i[\vec{\theta}]-gm_i\right) \tag{14b}$$

в $\Omega, i=1,2,$

$$\vec{v}_1^{(i)}=0\ \text{ на }\partial\Omega,\Pi\pi_i^1=\pi_i^1, i=1,2, \tag{14c}$$

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla \varphi_i^1 + \tau_{ii} \varphi_i^1 = \Psi_i[\vec{\theta}] + g\, m_i \rho_i \text{ в } \Omega,$$
$$\varphi_i^1 = 0 \text{ на } \Sigma_{in}^i, i = 1,2. \quad (14d)$$

Постоянные m_i определяются по формулам:

$$\vec{m} = \left(k \quad \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \vec{f}, \quad \vec{m} = (m_1, m_2)^T,$$
$$\vec{f} = (f_1, f_2)^T, \; k = \int_\Omega g dx,$$
$$\mathbf{A} = \left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^2, \; a_{ij} = \frac{1}{\rho_i^*} \int_\Omega g \cdot \rho_j \cdot \zeta_i^{(j)} dx, \quad (14e)$$
$$f_i = \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^2 \int_\Omega \left(\zeta_i^{(j)} \cdot \Psi_j[\vec{\theta}] - g \Phi_i[\vec{\theta}]\right) dx,$$

а $\zeta_i^{(j)}$ – решение следующей краевой задачи

$$-\mathrm{div}(\vec{u}^{(i)} \cdot \zeta_j^{(i)}) + \tau_{ii} \cdot \zeta_j^{(i)} = \tau_{ji}\, g$$
$$\text{в } \Omega, \; \zeta_j^{(i)} = 0 \text{ на } \Sigma_{out}^{(i)}, i, j = 1, 2. \quad (14f)$$

Опираясь на ряд известных результатов о линейных системах Стокса и транспортных уравнениях [5], доказываем, что задача (14) доставляет полную систему уравнений и граничных условий для однозначного определения вектора $\vec{\theta}_1$ и, следовательно, определяет отображение $W : \vec{\theta} \to \vec{\theta}_1$.

На основании оценок решения задачи (14) доказывается, что при малых числах Рейнольдса отображение W переводит некоторый шар B_τ в себя.

Заметим кроме того, что отображение W является секвенциально слабо непрерывным. Действительно, пусть последовательность

$$\vec{\theta}_n = \left(\vec{v}_n^{(1)}, \vec{v}_n^{(2)}, \pi_1^n, \pi_2^n, \varphi_1^n, \varphi_2^n\right) \in B_\tau$$

сходится слабо в E. В силу рефлексивности пространства E [5] существует $\vec{\theta} \in E$, такой что $\vec{\theta}_n \rightharpoonup \vec{\theta}$ слабо в E. Так как шар B_τ является замкнутым и выпуклым множеством, то $\vec{\theta} \in B_\tau$. Соответствующие элементы $\vec{\theta}_{1,n} = W(\vec{\theta}_n)$ содержатся шаре B_τ. Последовательности функций $\left\{\xi_{i,n}^{(j)}\right\}$, $i, j = 1,2$, ограничены в $X^{s,r}$. Поэтому существуют подпоследовательности $\left\{\vec{\theta}_{1,n_k}\right\}$ последовательности $\left\{\vec{\theta}_{1,n}\right\}$ и $\left\{\xi_{i,n_k}^{(j)}\right\} \subset \left\{\xi_{i,n}^{(j)}\right\}$, $i, j = 1, 2$, такие что $\left\{\vec{\theta}_{1,n_k}\right\}$ сходится слабо в E к некоторому элементу $\vec{\theta}_1 \in B_\tau$, а последовательности функций $\left\{\xi_{i,n_k}^{(j)}\right\}$, $i, j = 1,2$, сходятся слабо в $X^{s,r}$ к некоторым функциям $\xi_i^{(j)} \in X^{s,r}$, $i, j = 1,2$. Так как вложение $E \mapsto C(\Omega)$ компактно,

$$\text{то } \left\{\vec{\theta}_n\right\} \to \vec{\theta} \text{ и } \left\{\vec{\theta}_{1,n_k}\right\} \to \vec{\theta}_1 \text{ в } C(\Omega), \text{ и}$$
$$\left\{\nabla \xi_{i,n_k}^{(j)}\right\} \rightharpoonup \nabla \xi_i^{(j)} \text{ слабо в } L^2(\Omega),$$
$$\left\{\xi_{i,n_k}^{(j)}\right\} \to \xi_i^{(j)} \text{ в } C(\Omega).$$

В уравнениях вида (14), соответствующих вектор-функциям $\vec{\theta}_{n_k}$ и $\vec{\theta}_{1,n_k}$, в силу вышесказанного возможен предельный переход при $n_k \to \infty$, в результате чего получим соотношение $\vec{\theta}_1 = W(\vec{\theta})$. Таким образом любая слабо сходящаяся подпоследовательность $\left\{\vec{\theta}_{1,n_k}\right\}$ последовательности $\left\{\vec{\theta}_{1,n}\right\}$ имеет своим пределом единственный элемент $\vec{\theta}_1 \in B_\tau$. Следовательно, слабо сходящейся к $\vec{\theta}_1$ является и вся последовательность $\left\{\vec{\theta}_{1,n}\right\}$, что доказывает секвенциальную слабую непрерывность отображения W.

Согласно теореме Тихонова о неподвижной точке [5] существует такой элемент $\vec{\theta} \in B_\tau$, что $\vec{\theta} = W(\vec{\theta})$. Построенная вектор – функция $\vec{\theta}$ является решением задачи (13). Единственность решения задачи (13) вытекает из анализа дифференциальных свойств решений сопряженной задачи.

Литература

1. Крайко А. Н., Нигматулин Р. Н., Старков В. К., Стернин Л. Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. (Серия: Гидромеханика). 1972. Т. 6. С. 93 – 174.
2. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
3. Никольский С. Л. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
5. Plotnikov P., Sokolowski J. Compressible Navier-Stokes equations: theory and shape optimization. Basel: Birkhauser, 2012.
6. Rajagopal K. R., Tao L. Mechanics of mixtures. London:World Scientific Publishing, 1995.

Информация об авторах:

Кучер Николай Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений КемГУ, nakycher@rambler.ru.

Nikolay A. Kucher – Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Жалнина Александра Анатольевна – старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений КемГУ, qwert1776@yandex.ru.

Alexandra A. Zhalnina – Senior Lecturer at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Статья поступила в редколлегию 31.10.2014 г.