

**НЕЛИНЕЙНЫЙ СГЛАЖИВАЮЩИЙ ФИЛЬТР  
С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ВЕСОВЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ**

*В. А. Толстунов, Ю. В. Шлындова*

**NONLINEAR AVERAGING FILTER WITH HYPERBOLIC WEIGHTS**

*V. A. Tolstunov, Yu. V. Shlyndova*

Предлагается алгоритм сглаживающего цифрового фильтра, весовые коэффициенты которого зависят от значений входного сигнала. Приведены результаты цифрового моделирования работы данного фильтра при обработке одномерных сигналов и при обработке черно-белых изображений.

The algorithm of a digital averaging filter, using hyperbolic weights for input values of the signal, is suggested. The results of digital modeling of the given filter are shown when processing monochrome images.

**Ключевые слова:** фильтр, мешающий шум, погрешность фильтрации, цифровое моделирование.

**Keywords:** filter, disturbing noise, inaccuracy of filtering, digital modeling.

Простейшим усредняющим фильтром является линейный фильтр, выходной сигнал которого формируется как среднее арифметическое отсчетов входного сигнала из апертуры фильтра. Такой фильтр достаточно хорошо сглаживает слабый гауссовский шум, однако, импульсный шум им удаляется плохо. Лучшие результаты при сглаживании дают фильтры взвешенного усреднения. В этом случае выходом фильтра является среднее значение отсчетов из апертуры, взятых с разными весами. Обычно для таких фильтров больший вес придается отсчету, находящемуся в середине апертуры фильтра. Сглаживающие фильтры взвешенного усреднения нашли широкое применение при решении ряда практических задач.

В настоящей работе, в отличие от классического подхода, строится сглаживающий фильтр, у которого весовые коэффициенты, с которыми суммируются отсчеты входного сигнала, зависят от значений этих отсчетов и не зависят от их положения в апертуре. Такой подход, как правило, приводит к нелинейной фильтрации, которая позволяет хорошо удалять импульсный шум большой амплитуды и высокой интенсивности.

Пусть на вход фильтра с длиной апертуры  $n + 1$  поступают дискретные сигналы  $x_i = s_i + n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , где  $s_i = s(t_i)$  – отсчеты полезного детерминированного сигнала,  $n_i = n(t_i)$  – отсчеты мешающего шума. Будем полагать, что в пределах апертуры фильтра отсчеты полезного сигнала практически одинаковы. Тогда  $x_i = s_k + n_i$ ,

$$i = (k - \frac{n}{2}, \dots, k, \dots, k + \frac{n}{2}).$$

По значениям входного сигнала  $(x_{k-n/2}, \dots, x_k, \dots, x_{k+n/2})$  будем определять значение выхода фильтра  $y_k$ , соответствующего отсчету  $x_k$ .

В качестве выхода сглаживающего фильтра возьмем среднее значение отсчетов  $x_i$ , с весовыми множителями  $f(x_i)$ , то есть

$$y_k = \frac{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i f(x_i)}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} f(x_i)}. \tag{1}$$

Веса  $f(x_i)$  выберем таким образом, чтобы слагаемые в числителе (1) имели относительно близкие значения. Выберем, в частности, для  $f(x)$  гиперболическую зависимость порядка  $\alpha$

$$f(x_i) = \frac{1}{x_i^\alpha}, \forall i \in [k - n/2, k + n/2],$$

$$\alpha = const > 0.$$

Тогда из (1)

$$y_k = \frac{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i^{-\alpha+1}}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i^{-\alpha}}. \tag{2}$$

Фильтр (2) был промоделирован численно, в случае, когда шум  $n(t)$  является аддитивной смесью независимых стационарной гауссовской  $\xi(t)$  и импульсной  $\eta(t)$  помех. При этом полагаем, что  $\xi(t)$  имеет нулевое среднее значение и дисперсию  $\sigma^2$ , а  $\eta(t)$  принимает значения:  $A > 0$ ,  $-A$ ,  $0$  с вероятностями соответственно:

$$P(\eta = A) = p, P(\eta = -A) = q,$$

$$P(\eta = 0) = 1 - p - q,$$

Тогда

$$x_i = s_k + \xi_i + \eta_i, \quad \forall i \in [k - n/2, k + n/2].$$

Прежде всего, для алгоритма (2) в случае, когда входной сигнал нормировался на единицу ( $\forall i \ x_i \in [0,1]$ ), была определена зависимость погрешности фильтрации

$$R = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |s_i - y_i|,$$

от параметра нелинейности  $\alpha$ . Было получено, что при удалении положительных значений импульсного шума хорошие результаты достигаются при  $\alpha \geq 16$ , при удалении отрицательных значений импульсного шума  $-\alpha \leq -16$ , при удалении только гауссовского шума  $-0 \leq \alpha \leq 0,001$ .

Погрешность фильтра (2) сравнивалась с погрешностью фильтрации классического медианного фильтра [1]. В таблице 1 приведены примеры наложения на прямоугольный импульс гауссовского шума, импульсного шума различной полярности и результаты обработки сравниваемыми фильтрами.

Алгоритм (2) легко обобщается для обработки изображений. Пусть на вход фильтра с квадратной апертурой размером  $(n + 1)(m + 1)$  поступают отсчеты изображения  $x_{ij} = s_{ij} + n_{ij}$ , где  $s_{ij}$  – отсчеты неискаженного детерминированного изображения,  $n_{ij}$  – отсчеты мешающего шума. В качестве выходного сигнала фильтра возьмем соотношение

$$y_{kl} = \frac{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \sum_{j=l-m/2}^{l+m/2} x_{ij}^{-\alpha+1}}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \sum_{j=l-m/2}^{l+m/2} x_{ij}^{-\alpha}}, \quad (3)$$

где  $\alpha = const > 0$ .

Фильтр (3) был промоделирован численно для той же модели шумового сигнала. Погрешность фильтрации

$$R = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |s_{ij} - y_{ij}| \quad (4)$$

сравнивалась с погрешностью фильтрации классического медианного фильтра [1] и гармонического фильтра [2]

$$y_{kl} = \left( \frac{(n+1)(m+1)}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \sum_{j=l-m/2}^{l+m/2} x_{ij}^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (5)$$

При моделировании на исходное изображение «Марина» наносились последовательно однополярный положительный импульсный шум, однополярный отрицательный импульсный шум, гауссовский шум. При удалении положительного импульсного шума параметрами фильтра являлись значения:  $m + 1 = n + 1 = 3$ ,  $\beta = 16$ ,  $\alpha = -16$ . При удалении отрицательного импульсного шума  $-m + 1 = n + 1 = 3$ ,  $\beta = -16$ ,  $\alpha = 16$ . При удалении гауссовского шума  $-m + 1 = n + 1 = 3$ ,  $\beta = 0,001$ ,  $\alpha = 0,001$ .

В таблице 2 приведены погрешности фильтрации при удалении однополярного положительного импульсного шума.

Как видно из этой таблицы, при малой интенсивности импульсного шума ( $p \leq 0,2$ ) погрешности фильтрации трех сравниваемых алгоритмов практически одинаковы. С увеличением  $p$  гармонический и исследуемый фильтры существенно лучше медианного удаляют положительный импульсный шум. При очень высокой интенсивности шума ( $p = 0,7$ ) исследуемый фильтр имеет лучшие характеристики и его погрешность на порядок ниже погрешности медианного фильтра.

Таблица 1

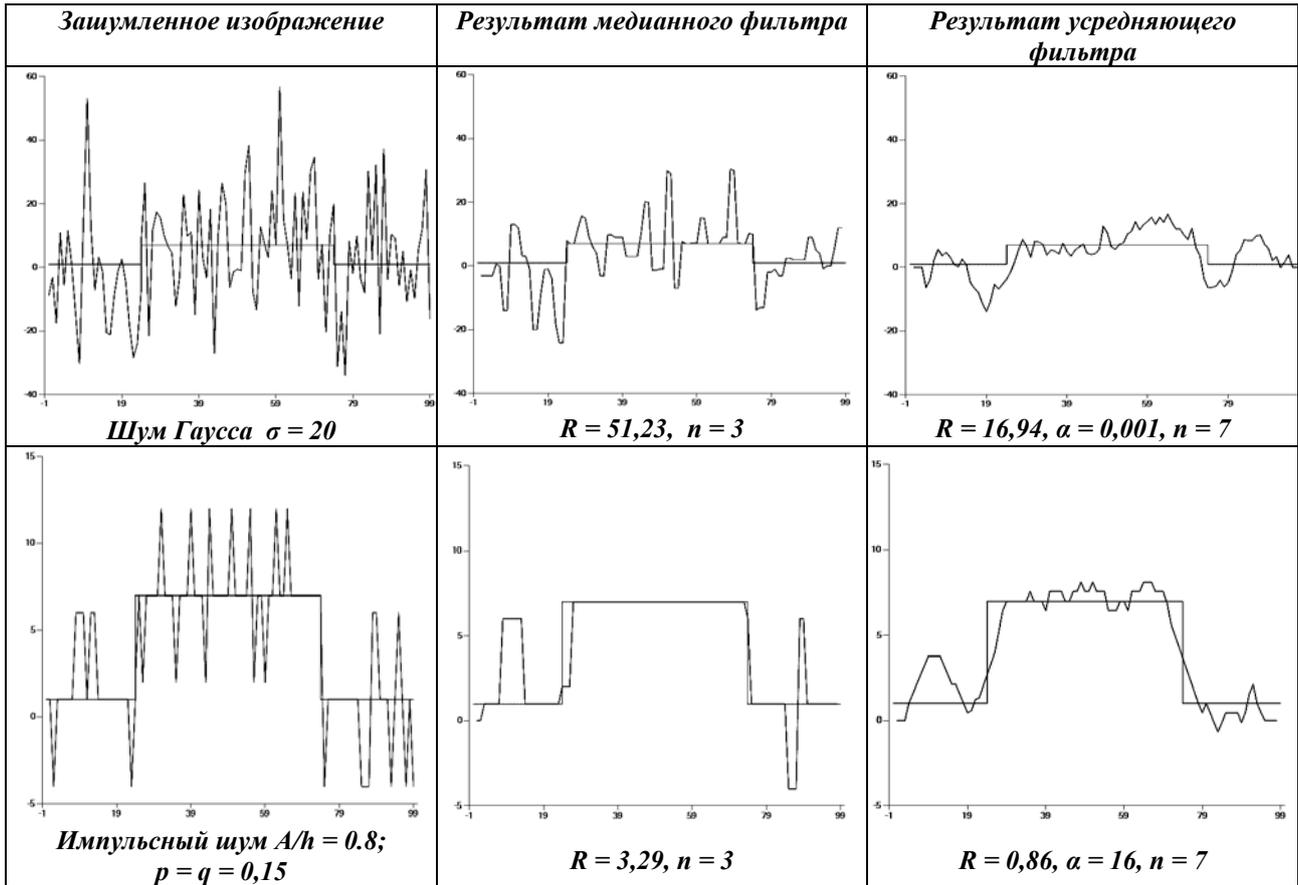


Таблица 2

| <i>Параметры накладываемого импульсного шума</i> |           | <i>Без фильтрации</i> | <i>Медианный фильтр</i> | <i>Гармонический фильтр <math>\beta = 16</math></i> | <i>Исследуемый фильтр <math>\alpha = -16</math></i> |
|--|-----------|-----------------------|-------------------------|---|---|
| $q = 0$<br>$A = 100$                             | $p = 0,2$ | 0,0783                | 0,0186                  | 0,0210  | 0,0221  |
|  | $p = 0,4$ | 0,1569                | 0,1121                  | 0,0467  | 0,0688  |
|  | $p = 0,7$ | 0,2737                | 0,3432                  | 0,0603  | 0,0331  |



*a*



*b*

*Рис. 1*

На рисунке 1 представлены: *a* – исходное изображение «Марина» и *b* – результат его зашумления ( $\sigma = 0, A = 100, q = 0, p = 0,4$ ). На рисунке 2 приведены результаты удаления этого шума *a* – медианным, *b* – гармоническим и *в* – исследуемым фильтрами.

| Параметры накладываемого импульсного шума |           | Без фильтрации | Медианный фильтр $n + 1 = 3$ | Гармонический фильтр $n + 1 = 3, k = 16$ | Исследуемый фильтр $n + 1 = 3, \alpha = -16$ |
|---|-----------|----------------|------------------------------|--|--|
| $q = 0$<br>$A = 100$                      | $p = 0,2$ | 0,0785         | 0,0190                       | 0,0361                                   | 0,0594                                       |
|   | $p = 0,4$ | 0,1569         | 0,1121                       | 0,0467                                   | 0,0688                                       |
|   | $p = 0,7$ | 0,2745         | 0,3443                       | 0,0764                                   | 0,0881                                       |

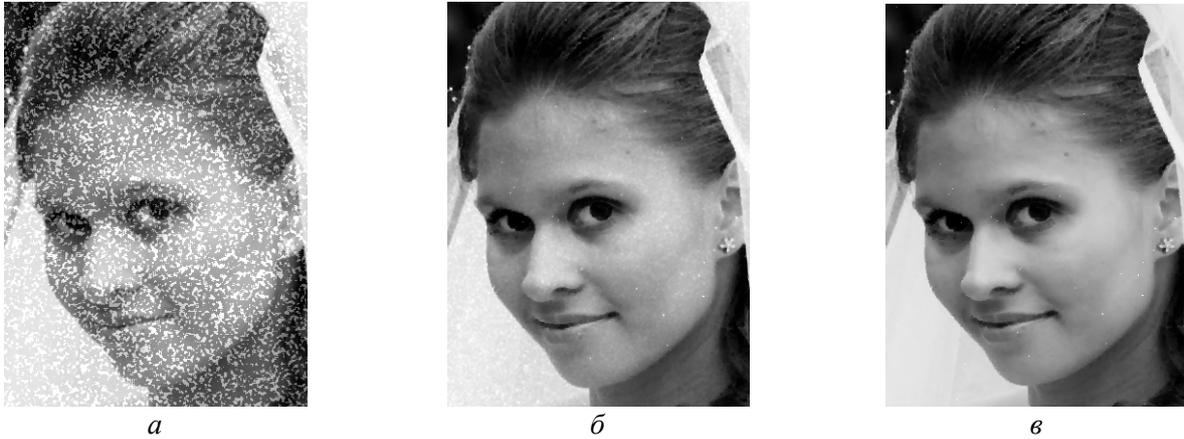


Рис. 2

В таблице 3 приведены погрешности фильтрации при удалении однополярного отрицательного импульсного шума. Моделирование показало, что при малой интенсивности отрицательного импульсного шума погрешности фильтрации сравниваемых фильтров близки. При  $0,2 < q < 0,6$  гармонический и исследуемый фильтры убирают почти все шумовые точки. При этом гармонический фильтр снижает контраст изображения и немного его размывает. При  $q < 0,6$

лучшие результаты, для наглядного восприятия, дает весовой фильтр. Медианный же фильтр уже при  $q \geq 0,2$  удаляет не все шумовые точки.

На рисунке 3 показаны зашумленное изображение и результаты удаления отрицательного импульсного шума ( $\sigma = 0, A = 100, q = 0,4, p = 0$ ) а – медианным, б – гармоническим и в – исследуемым фильтрами.

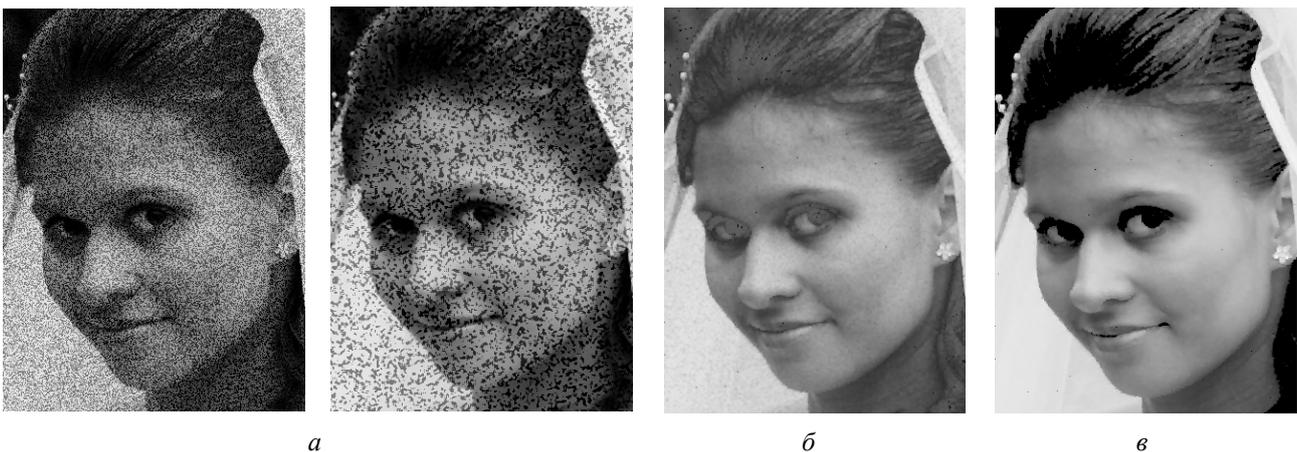


Рис. 3

Таблица 4

| Параметры накладываемого гауссовского шума |               | Без фильтрации | Медианный фильтр $n + 1 = 3$ | Гармонический фильтр $n + 1 = 3, k = 0,001$ | Исследуемый фильтр $n + 1 = 3, \alpha = 0,001$ |
|--|---------------|----------------|------------------------------|---|--|
| $p = 0$<br>$q = 0$                         | $\sigma = 10$ | 0.0314         | 0.0172                       | 0.0169                                      | 0.0158   |
|  | $\sigma = 30$ | 0.0941         | 0.0412                       | 0.0443                                      | 0.0344   |
|  | $\sigma = 50$ | 0.1571         | 0.0664                       | 0.0815                                      | 0.0544   |

В таблице 4 приведены погрешности фильтрации при удалении гауссовского шума. Как видно из приведенных данных, все три рассматриваемые фильтры в широком диапазоне изменения дисперсии шума имеют близкие погрешности.

Таким образом, проведенные исследования усредняющего фильтра с гармоническими весовыми коэффициентами показывают его способность достаточно хорошо удалять аддитивный гауссовский шум и однополярный импульсный шум большой амплитуды и высокой интенсивности.

#### Литература

1. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т. С. Хуанг [и др.]. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
2. Толстунов, В. А. Нелинейная фильтрация на основе степенного преобразования / В. А. Толстунов // Доклады ТУСУРа. – 2012. – № 1(25). – Ч. 1. – С. 71 – 75.

#### Информация об авторах:

**Толстунов Владимир Андреевич** – научный руководитель, кандидат технических наук, доцент кафедры АИТК, КемГУ, [vat@bk.ru](mailto:vat@bk.ru).

**Vladimir A. Tolstunov** – research advisor, Candidate of Technical Science, Assistant Professor at the Department of Investigations Automation and Engineering Cybernetics, Kemerovo State University.

**Шлындова Юлия Владимировна** – магистр математического факультета КемГУ, [juluy@list.ru](mailto:juluy@list.ru).

**Yulia V. Shlyndova** – Master's Degree student at the Mathematical Faculty, Kemerovo State University.