УДК 519.83

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКО-ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕГИОНА С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИГР С ПРИРОДОЙ

Н. С. Самойленко, В. В. Мешечкин

MATHEMATICAL MODELING OF THE REGIONAL ECONOMIC-ECOLOGICAL SYSTEM USING THE THEORY OF DYNAMICAL GAMES WITH NATURE

N. S. Samoylenko, V. V. Meshechkin

Статья посвящена исследованию приложений динамических игр с природой как нового класса игровых моделей, предложенного в работах профессора Кемеровского государственного университета Н. Н. Данилова. В виде динамической игры с природой построена математическая модель экономико-экологической системы региона, проведен ее анализ и выполнены расчеты оптимальных (в смысле критериев Вальда, Гурвица, Сэвиджа) стратегий.

The article is devoted to researching applications for dynamical games with nature as a new class of game models proposed in the works of professor N. N. Danilov, Kemerovo State University. Mathematical model of a regional economic-ecological system as a dynamical game with nature is built, its analysis is carried out and calculations of optimal (in terms of Wald, Hurwicz, Savage criteria) strategies are made.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория игр, экономико-экологические системы.

Keywords: mathematical modeling, game theory, economic-ecological systems.

Введение

Теория игр – совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций – имеет широкое применение в вопросах бизнеса в условиях конкуренции, в планировании военных операций и управлении военной техникой, в самых разнообразных задачах организации народного хозяйства и управления производством. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учетом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках [1].

В последнее время наблюдается стремительное повышение интереса к теории игр и значительное возрастание ее роли. Одним из бурно развивающихся разделов теории игр являются динамические игры, с помощью которых удается создавать адекватные модели для исследования практических задач из области экологии, экономики, менеджмента, международных отношений, охраны окружающей среды и др. Это обусловливается необходимостью учитывать временной аспект в многочисленных взаимодействиях между субъектами: фирмы, работающие на одном и том же рынке, знают, что они встретятся снова в последующих периодах, из аналогичного предположения исходит правительство, определяя свою внешнеторговую политику. Кроме того, многие экономические параметры, такие как инвестиции в производственные мощности, расходы на рекламу и пр., оказывают свое влияние на предложение и спрос лишь в будущем. Поэтому методы теории динамических игр все чаще применяются при анализе вопросов стратегического поведения в сложных социально-экономических и экологических системах, развивающихся во времени (см., напр., [2]). Сама теория динамических игр тоже не стоит на месте, в ней появляются новые разделы, позволяющие описывать различные варианты динамического взаимодействия игроков, и новые методы для их анализа. К таким новым разделам можно отнести динамические матричные игры, динамические игры с природой и динамические биматричные игры, предложенные профессором математического факультета Кемеровского государственного университета Н. Н. Даниловым [3; 4].

Данная работа посвящена применению теории динамических игр с природой для моделирования деятельности производственного сектора региона как экономико-экологической системы, в которой учитывается как экономическая выгода от производственной деятельности, так и ущерб от загрязнения окружающей среды. В основу положена методология статьи [4], где автор предложил понятие динамических игр с природой, введя в модель игры с природой фактор времени, определил классы допустимых стратегий и проанализировал динамические аналоги принципов оптимальности Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

Построение математической модели экономико-экологической системы региона в виде динамической игры с природой

Рассматривается производственный сектор региона, выпускающий некоторую продукцию. При этом в процессе производства образуются вредные вещества, которые выбрасываются в окружающую среду и в возмещение ущерба от которых производители вынуждены уплачивать штрафы. Тогда целью производственного сектора будет максимизация экономической прибыли с учетом выплат за загрязнение природной среды.

Для получения математической модели производственного сектора построим динамическую модель игры с природой, применив терминологию и аппарат работы [4].

Исследуемая система сознательно будет рассматриваться в упрощенной форме, с одной стороны, удобной для представления в матричном виде и для интерпретации, а с другой, – в достаточной мере отражающей специфику изучаемого объекта.

Введем обозначения для построения модели.

t – параметр времени, соответствующий году и принимающий дискретные значения ($t = 0, 1, ..., T$).

$K(t)$ – величина основных фондов производственного сектора в момент времени t.

$I(t)$ – инвестиции (валовые капитальные вложения) в момент t. Их величина для производственного сектора в каждый момент ограничена сверху максимальным значением $I_{\max(t)}$.

Валовые капитальные вложения идут на приращение основных фондов $K(t)$ (чистые капитальные вложения) и на замещение изношенного капитала, то есть на восстановление изношенной части основных производственных фондов (амортизационные отчисления).

Тогда, зная размер инвестиций, можно построить уравнение динамики основных фондов:

$$K(t+1) = I(t) + K(t) - \mu(t)\cdot K(t)\,, \qquad (1)$$

где $\mu(t)$ – темп изнашивания основных фондов (за год t из строя выходит $\mu(t)\cdot K(t)$ единиц основных фондов) [5].

В начальный момент $t=0$ заданы основные фонды производственного сектора:

$$K(0) = K^0\,. \qquad (2)$$

Условия (1), (2) определяют динамику основных фондов на отрезке [0, T].

Через $F: R^1 \to R^1$ обозначим функцию, описывающую производственные возможности региона в зависимости от размера основных фондов. Величина $F(K(t))$ представляет собой объем выпуска производственного сектора, если основные фонды равны $K(t)$.

Для определенности будем считать, что объем производства в каждый момент t прямо пропорционален основным фондам, то есть функция F имеет следующий вид:

$$F(K(t)) = \gamma(t)\cdot K(t)\,. \qquad (3)$$

Обозначим через p цену выпускаемого продукта, тогда доход производственного сектора в момент t будет равен $p\cdot F(K(t))$.

При этом производственный сектор будет нести производственные издержки $C(K(t))$, величина которых определяется формулой:

$$C(K(t)) = \omega\cdot\beta(t)\cdot F(K(t))\,, \qquad (4)$$

где ω – цена затрат, а $\beta(t)$ – величина затрат на единицу выпуска в момент времени t.

Обозначим $G(K(t))$ сумму штрафов, назначаемых за выбросы загрязняющих веществ в окружающую среду. Будем предполагать, что они пропорциональны объему производства:

$$G(K(t)) = S\cdot\alpha(t)\cdot F(K(t))\,, \qquad (5)$$

где $\alpha(t)$ – величина загрязнения на единицу выпуска, S – цена за выброс одной единицы загрязнителя.

Итоговой характеристикой для производственного сектора, оценивающей эффективность его работы, будет суммарная прибыль за весь период [0, T].

Прибыль производственного сектора в каждый момент t определяется не только доходом от реализации продукции, но и производственными издержками, а также издержками, вызванными загрязнением окружающей среды:

$$\Pi(K(t)) = p\cdot F(K(t)) - C(K(t)) - G(K(t))\,. \qquad (6)$$

Подставляя (4) и (5) в (6), получаем:

$$\Pi(K(t)) = p\cdot F(K(t)) - \\ -\omega\cdot\beta(t)\cdot F(K(t)) - S\cdot\alpha(t)\cdot F(K(t)) = \\ = (p - \omega\cdot\beta(t) - S\cdot\alpha(t))\cdot(F(K(t))),\ \ t = 1,\ldots,T.$$

Тогда суммарная прибыль за весь период времени, которую и будет максимизировать производственный сектор, равна

$$\sum_{t=1}^{T}(p - \omega\cdot\beta(t) - S\cdot\alpha(t))\cdot(F(K(t)))\,.$$

На размер прибыли производственного сектора будет влиять его стратегия при выборе объема выпускаемой продукции, а также природоохранное законодательство, политика администрации региона и территориальных органов Министерства природных ресурсов и экологии Российской Федерации в области экологического регулирования.

В настоящее время величина и порядок выплаты штрафов за возмещение ущерба от негативного воздействия на природу в России определяются Законом «Об охране окружающей природной среды» [6]. В данной статье примем в качестве допущения, что величина штрафа за единицу выброса заранее производственному сектору не известна и может принимать значения в некотором диапазоне [0, $S_{\max}$], где $S_{\max}$ – максимально допустимая величина штрафа за единицу выбросов. Такое предположение приводит к возникновению ситуации неопределенности и позволяет построить модель в виде игры с природой, где 1-м игроком является производственный сектор, который распоряжается инвестициями $I(t)$, а 2-м игроком будет выступать «природа» как состояние природоохранного законодательства, в условиях которого функционирует производственный сектор, со стратегиями, соответствующими устанавливаемым значениям штрафа на единицу загрязнения окружающей среды. При этом считается, что 2-й игрок пассивный и характеризуется тем или иным состоянием [7].

Интервал возможных значений штрафов $[0, S_{\max}]$ разобьем дискретными точками $S_1(t) = 0$, $S_2(t)$, $S_3(t)$, ..., $S_n(t) = S_{\max}$, которые и будут стратегиями «природы» в каждый момент t.

Аналогично, учитывая максимальный размер инвестиций $I_{\max(t)}$ для каждого момента времени t, произведем дискретизацию диапазона $[0, I_{\max(t)}]$: $I_1(t) = 0$, $I_2(t)$, $I_3(t)$, ..., $I_m(t) = I_{\max(t)}$. Эти величины будут стратегиями 1-го игрока – производственного сектора.

При выборе производственным сектором стратегии $I_i(t)$ на следующем шаге он перейдет в состояние $K(t+1) = I_i(t) + (1-\mu(t))\cdot K(t)$. Если при этом «природа» окажется в состоянии $S_j(t)$, то прибыль производственного сектора будет равна:

$$\Pi_{ij}(K(t)) = \Pi_{ij}(K(t), S_j(t), I_i(t)) = \\ = p\cdot F(K(t)) - \omega\cdot\beta(t)\cdot F(K(t)) - \\ -S_j(t)\cdot\alpha(t)\cdot F(K(t)).$$

Перебирая все возможные значения *i*, *j*, получаем матрицу значений $\Pi_{ij}(K(t))$, которая является матрицей выигрыша игрока 1 для данного момента времени *t*:

$$A(K(t))=\begin{pmatrix} \Pi_{11}(K(t)) & \Pi_{12}(K(t)) & ... & \Pi_{1n}(K(t)) \\ \Pi_{21}(K(t)) & \Pi_{22}(K(t)) & ... & \Pi_{2n}(K(t)) \\ ... & ... & ... & ... \\ \Pi_{m1}(K(t)) & \Pi_{m2}(K(t)) & ... & \Pi_{mn}(K(t)) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Изменяя *t* от 1 до *T*, получаем последовательность игровых матриц, в которых стратегии «природы» не известны. Для каждого *t* эти матрицы определяют игру с природой, в которой производственный сектор вынужден выбирать свою стратегию выпуска продукции с учетом состояний «природы».

Записанные соотношения формируют модель производственного сектора на отрезке [0, *T*], в которой основные фонды играют роль фазовых переменных, характеризующих состояние производственного сектора в каждый момент времени, инвестиции являются управляющими переменными, а суммарная прибыль – критерием качества. Однако при этом принятие решения производственным сектором происходит в условиях неопределенности, так как величины штрафов в конкретные моменты ему не известны.

Поэтому построенную модель будем рассматривать как динамическую игру с природой и для ее решения используем соответствующие игровые принципы оптимальности (Вальда, Гурвица, Сэвиджа), распространив их на динамику.

Формализация игровых принципов оптимальности для динамической игры с природой

С помощью системы (1) – (2) функционирование производственного сектора можно представить следующим образом: в состоянии K^0 под действием выбранных в момент $t=0$ управлений $I_i(0)$ производственный сектор переходит в новое состояние $K(1)=I_i(0)+(1-\mu(0))\cdot K(0)$. Если при этом величина штрафов (стратегия «природы») окажется равной $S_j(0)$, то прибыль производственного сектора будет равна

$$\Pi_{ij}(K(1))=(p-\omega\cdot\beta(1)-S_j(0)\cdot\alpha(1))\cdot(F(K(1))).$$

Под влиянием выбранных в состоянии $K(1)$ управлений производственный сектор переходит в новое состояние $K(2)=I_i(1)+(1-\mu(1))\cdot K(1)$, получая при этом прибыль

$$\Pi_{ij}(K(2))=(p-\beta(2)-S_j(1)\cdot\alpha(2))\cdot(F(K(2)))$$

и так далее. На последнем шаге $(t=T-1)$, находясь в состоянии $K(T-1)$, под действием выбранных управлений производственный сектор переходит в состояние $K(T)=I_i(T-1)+(1-\mu(T-1))\cdot K(T-1)$ с прибылью:

$$\Pi_{ij}(K(T))=(p-\omega\cdot\beta(T)-S_j(T-1)\cdot\alpha(T))\cdot(F(K(T))).$$

В результате получается хронологически упорядоченная последовательность значений основных фондов производственного сектора

$$K(\cdot)=\{K^0,K(1),...,K(T)\},$$

которую будем называть траекторией системы (1) – (2), соответствующей последовательности управлений

$$I(\cdot)=\{I_{i_0}(0),I_{i_1}(1),...,I_{i_{T-1}}(T-1)\}.$$

Стратегии «природы» $S_j(t)$ также можно объединить в последовательность, получив траекторию

$$S(\cdot)=\{S_{j_0}(0),S_{j_1}(1),...,S_{j_{T-1}}(T-1)\}.$$

Построенные последовательности стратегий будут являться допустимыми управлениями 1-го и 2-го игроков соответственно.

Цель игрока 1 представим как максимизацию значения следующего функционала:

$$F(K)(\cdot),\ \mathrm{I}(\cdot),\ \mathrm{S}(\cdot))=\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\Pi_{\mathrm{i}_{t-1}j_{t-1}}(K(t)=$$

$$=\sum_{t=0}^{T-1}(p-\omega\cdot\beta(t)-S_{j_t}(t)\cdot\alpha(t))\cdot(F(K(t))),$$

где $I(\cdot)$ и $S(\cdot)$ – последовательности стратегий игроков, выбираемых ими в играх с природой с матрицами $A(K(t))$, $t=1,...,T$.

Используя формализацию работы [4], определим классы допустимых стратегий игроков в рассматриваемой модели.

Множество всех стратегий игроков 1 и 2 обозначим символами Φ_I и Φ_S соответственно.

Совокупность

$$\Gamma(K^0,T)=\left\langle\sum(K^0,T);\Phi_I,\Phi_S;F\right\rangle, \quad (8)$$

где $\sum(K^0,T)$ – символическое обозначение системы (1) – (2), назовем динамической игрой с природой.

Процесс управления производственным сектором с помощью модели (8) можно представить следующим образом. В начальном состоянии K^0 игроки выбирают некоторые стратегии

$$\phi_I(\cdot)=\{I_{i_0}(0),I_{i_1}(1),...,I_{i_{T-1}}(T-1)\}\in\Phi_I,$$

$$\phi_S(\cdot)=\{S_{j_0}(0),S_{j_1}(1),...,S_{j_{T-1}}(T-1)\}\in\Phi_S,$$

которые порождают траекторию

$$K(\cdot)=K(\cdot,K^0,\phi_I(\cdot),\phi_S(\cdot))=\{K^0,K(1),...,K(T)\}.$$

Во всех точках траектории $K(\cdot)$ (кроме K^0) заданы игры с природой с матрицами вида (7) для $t=1,...,T$. Пары стратегий $(I_{i_0}(0),S_{j_0}(0))$, ..., $(I_{i_{T-1}}(T-1),S_{j_{T-1}}(T-1))$ определяют выигрыши

$$\Pi_{i_0,j_0}(K(1)),\ ...,\ \Pi_{i_{T-1}j_{T-1}}(K(T))$$

первого игрока. Следовательно, при выборе управлений $(\phi_I(\cdot),\phi_S(\cdot))=(I(\cdot),S(\cdot))$ выигрыш первого игрока равен величине

$$F(K^0,\phi_I(\cdot),\phi_S(\cdot))=F(K(\cdot),I(\cdot),S(\cdot))=\sum_{t=1}^{T}\Pi_{i_{t-1},j_{t-1}}(K(t)).$$

Для построения принципов оптимального выбора стратегий игроком 1 в динамической игре (8) используем приведенные в [4] определения.

1. Каждой траектории $K(\cdot)$ поставим в соответствие число $V_B(K(\cdot))=\sum_{t=1}^{T}\max_{i_{t-1}=1,...,m}\min_{j_{t-1}=1,...,n}\Pi_{i_{t-1},j_{t-1}}(K(t))$,

которое будет называться ценой Вальда для траектории $K(\cdot)$.

<u>Определение 1.</u> Стратегия $\phi_I^*(\cdot)\in\Phi_I$ называется

оптимальной по Вальду стратегией 1-го игрока в игре (8), если

$$\min_{S(\cdot)\in\Phi_S} V_B(K(\cdot,K^0,I^*(\cdot),S(\cdot)))=$$

$$\max_{I(\cdot)\in\Phi_I}\min_{S(\cdot)\in\Phi_S} V_B(K(\cdot,K^0,I(\cdot),S(\cdot))),$$

где $I^*(\cdot)$ – управление, входящее в состав стратегии $\phi_I^*(\cdot)$.

Критерием Вальда, как правило, руководствуется при выборе рисковых решений в условиях неопределенности субъект, не склонный к риску или рассматривающий возможные ситуации как пессимист.

2. Каждой траектории $K(\cdot)$ поставим в соответствие число

$$V_\Gamma(K(\cdot))=\sum_{t=1}^{T}\max_{i_{t-1}=1,\dots,m}\begin{bmatrix}\lambda\min\limits_{j_{t-1}=1,\dots,n}\Pi_{i_{t-1},j_{t-1}}(K(t))+\\ +(1-\lambda)\max\limits_{j_{t-1}=1,\dots,n}\Pi_{i_{t-1},j_{t-1}}(K(t))\end{bmatrix},$$

$$0\le\lambda\le1,$$

которое назовем ценой Гурвица для траектории $K(\cdot)$.

<u>Определение 2</u>. Стратегия $\phi_I^*(\cdot)\in\Phi_I$ называется оптимальной по Гурвицу стратегией 1-го игрока в игре (8), если

$$\min_{S(\cdot)\in\Phi_2} V_\Gamma(K(\cdot,K^0,I^*(\cdot),S(\cdot)))=$$

$$=\max_{I(\cdot)\in\Phi_I}\min_{S(\cdot)\in\Phi_2} V_\Gamma(K(\cdot,K^0,I(\cdot),S(\cdot))),$$

где $I^*(\cdot)$ – управление, входящее в состав стратегии $\phi_I^*(\cdot)$.

Критерий Гурвица позволяет руководствоваться при выборе рискового решения в условиях неопределенности некоторым средним результатом эффективности, находящимся между оптимистическим и пессимистическим значениями.

3. Наряду с матрицей (7) в состоянии $K(t)$ введем в рассмотрение матрицу риска:

$$R(K(t))=\left\|r_{i_{t-1}j_{t-1}}(K(t))\right\|=\begin{pmatrix}\max\limits_{i_{t-1}}\Pi_{i_{t-1}1}(K(t))-\Pi_{11}(K(t)) & \dots & \max\limits_{i_{t-1}}\Pi_{i_{t-1}n}(K(t))-\Pi_{1n}(K(t))\\ \max\limits_{i_{t-1}}\Pi_{i_{t-1}1}(K(t))-\Pi_{21}(K(t)) & \dots & \max\limits_{i_{t-1}}\Pi_{i_{t-1}n}(K(t))-\Pi_{2n}(K(t))\\ \dots & \dots & \dots\\ \max\limits_{i_{t-1}}\Pi_{i_{t-1}1}(K(t))-\Pi_{m1}(K(t)) & \dots & \max\limits_{i_{t-1}}\Pi_{i_{t-1}n}(K(t))-\Pi_{mn}(K(t))\end{pmatrix} \quad (9)$$

Каждой траектории $K(\cdot)$ поставим в соответствие число $V_C(K(\cdot))=\sum\limits_{t=1}^{T}\min\limits_{i_{t-1}=1,\dots,m}\max\limits_{j_{t-1}=1,\dots,n} r_{i_{t-1},j_{t-1}}(K(t))$, которое назовем оценкой риска по Сэвиджу для траектории $K(\cdot)$.

<u>Определение 3</u>. Стратегия $\phi_I^*(\cdot)\in\Phi_I$ называется оптимальной по Сэвиджу стратегией 1-го игрока в игре (8), если

$$\max_{S(\cdot)\in\Phi_S} V_C(K(\cdot,K^0,I^*(\cdot),S(\cdot)))=$$

$$=\min_{I(\cdot)\in\Phi_I}\max_{S(\cdot)\in\Phi_S} V_C(K(\cdot,K^0,I(\cdot),S(\cdot))),$$

где $I^*(\cdot)$ – управление, входящее в состав стратегии $\phi_I^*(\cdot)$.

Критерий Сэвиджа используется при выборе рисковых решений в условиях неопределенности, как правило, субъектами, не склонными к риску.

Нахождение оптимальных траекторий в построенной динамической игре с природой

Рассмотрим последовательно функционирование производственного сектора в исследуемой модели.

В состоянии K^0 под действием выбранного в момент $t=0$ управления $I(0)$ производственный сектор переходит в новое состояние:

$$K(1)=I(0)+(1-\mu(0))\cdot K(0).$$

Под влиянием выбранных в состоянии $K(1)$ управлений производственный сектор переходит в состояние

$$K(2)=I(1)+(1-\mu(1))\cdot K(1)=I(1)+(1-\mu(1))\cdot I(0)+$$
$$+(1-\mu(1))\cdot(1-\mu(0))\cdot K(0).$$

Аналогично, на следующем шаге осуществляется переход в состояние

$$K(3)=I(2)+(1-\mu(2))\cdot K(2)=$$
$$=I(2)+(1-\mu(2))\cdot I(1)+$$
$$+(1-\mu(2))\cdot(1-\mu(1))\cdot I(0)+$$
$$+(1-\mu(2))\cdot(1-\mu(1))\cdot(1-\mu(0))\cdot K(0),$$

и так далее.

Из (3) – (5) следует, что производственные издержки $C(K(t))$ должны вычисляться по формуле:

$$C(K(t))=\omega\cdot\beta(t)\cdot\gamma(t)\cdot K(t),$$

а сумма штрафов $G(K(t))$, назначаемых за выбросы загрязняющих веществ в окружающую среду, – по формуле:

$$G(K(t))=S(t)\cdot\alpha(t)\cdot\gamma(t)\cdot K(t).$$

Если в момент времени $t=0$ величина штрафов (стратегия «природы») окажется равной $S(0)$, то прибыль производственного сектора для $t=1$ будет равна:

$$\Pi(K(1))=(I(0)+(1-\mu(0))\cdot K(0))\cdot$$
$$\cdot\gamma(0)\cdot(p-\omega\cdot\beta(1)-S(0)\cdot\alpha(1)).$$

Аналогично, в состоянии $K(2)$ игрок 1 получает прибыль:

$$\Pi(K(2))=(I(1)+(1-\mu(1))\cdot I_i(0)+$$
$$+(1-\mu(1))\cdot(1-\mu(0))\cdot K(0))\cdot\gamma(1)\cdot$$
$$\cdot(p-\omega\cdot\beta(2)-S(1)\cdot\alpha(2)).$$

В состоянии $K(3)$ игрок 1 получает прибыль:

$$\Pi(K(3)) = (I(2) + (1-\mu(2))\cdot I(1) + \\ +(1-\mu(2))\cdot(1-\mu(1))\cdot I(0) + \\ +(1-\mu(2))\cdot(1-\mu(1))\cdot(1-\mu(0))\cdot K(0))\cdot\gamma(2)\cdot \\ \cdot(p-\omega\cdot\beta(3) - S(2)\cdot\alpha(3)).$$

Остановимся пока на этом состоянии и зафиксируем индексами i_t, j_t номера выбиравшихся на отрезке времени [0, 3] стратегий. Тогда суммарная прибыль игрока 1 на этом промежутке вычисляется по следующей формуле:

$$\sum_{t=1}^{3}\Pi_{i_{t-1},j_{t-1}}(K(t)) = I_{i_0}(0)\cdot\Big(\gamma(0)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(1)-S_{j_0}(0)\cdot\alpha(1)\big)\Big)+ \\ +\Big((1-\mu(1))\cdot\gamma(1)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(2)-S_{j_1}(1)\cdot\alpha(2)\big)\Big)+ \\ +\Big((1-\mu(2))\cdot(1-\mu(1))\cdot\gamma(2)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_{j_2}(2)\cdot\alpha(3)\big)\Big)+ \\ +I_{i_1}(1)\cdot\begin{pmatrix}\gamma(1)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(2)-S_{j_1}(1)\cdot\alpha(2)\big)+ \\ +\begin{pmatrix}(1-\mu(2))\cdot(1-\mu(1))\cdot\gamma(2)\cdot \\ \cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_{j_2}(2)\cdot\alpha(3)\big)\end{pmatrix}\end{pmatrix}+ \\ +I_{i_2}(2)\cdot\Big(\gamma(2)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_{j_2}(2)\cdot\alpha(3)\big)\Big)+ \\ +K(0)\cdot\Big((1-\mu(0))\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(1)-S_{j_0}(0)\cdot\alpha(1)\big)\cdot\gamma(0)+ \\ +(1-\mu(1))\cdot(1-\mu(0))\cdot\gamma(1)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(2)-S_{j_1}(1)\cdot\alpha(2)\big)+ \\ \left.\begin{matrix}+(1-\mu(2))\cdot(1-\mu(1))\cdot(1-\mu(0))\cdot \\ \cdot\gamma(2)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_{j_2}(2)\cdot\alpha(3)\big)\end{matrix}\right),$$

где $\gamma(t)$ – коэффициент пропорциональности между основными фондами и объемом выпуска в (3).

Разобьем полученную формулу на части, выделив в ней стратегии природы $S_j(t)$ и производственного сектора $I_i(t)$ на каждый момент t. При этом получим следующие выражения для отдельных компонент:

$$H_{ij}(K(1)) = I_i(0)\cdot\Big(\gamma(0)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(1)-S_j(0)\cdot\alpha(1)\big)\Big)+ \\ +K(0)\cdot\big(1-\mu(0)\big)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(1)-S_j(0)\cdot\alpha(1)\big)\cdot\gamma(0), \quad (10)$$

$$H_{ij}(K(2)) = I^*_{i_0}(0)\cdot\begin{pmatrix}\big(1-\mu(1)\big)\cdot \\ \cdot\gamma(1)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(2)-S_j(1)\cdot\alpha(2)\big)\end{pmatrix}+ \\ +I_i(1)\cdot\Big(\gamma(1)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(2)-S_j(1)\cdot\alpha(2)\big)\Big)+ \quad (11) \\ +K(0)\cdot\begin{pmatrix}\big(1-\mu(1)\big)\cdot\big(1-\mu(0)\big)\cdot \\ \cdot\big(p-\omega\cdot\beta(2)-S_j(1)\cdot\alpha(2)\big)\cdot\gamma(1)\end{pmatrix},$$

$$H_{ij}(K(3)) = I^*_{i_0}(0)\cdot\begin{pmatrix}\big(1-\mu(2)\big)\cdot\big(1-\mu(1)\big)\cdot \\ \cdot\gamma(2)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_j(2)\cdot\alpha(3)\big)\end{pmatrix}+ \\ +I^*_{i_1}(1)\cdot\Big(\gamma(2)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_j(2)\cdot\alpha(3)\big)\cdot\big(1-\mu(2)\big)\Big)+ \\ I_i(2)\cdot\Big(\gamma(2)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_j(2)\cdot\alpha(3)\big)\Big)+ \quad (12) \\ +K(0)\cdot\begin{pmatrix}\big(1-\mu(2)\big)\cdot\big(1-\mu(1)\big)\cdot\big(1-\mu(0)\big)\cdot \\ \cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_j(2)\cdot\alpha(3)\big)\cdot\gamma(2)\end{pmatrix},$$

где $I^*_{i_t}(t)$ – оптимальная стратегия, выбранная игроком 1 в момент времени t.

Преобразуем (10) – (12), переписав эти выражения следующим образом:

$$H_{ij}(K(1)) = \gamma(0)\cdot\big(I_i(0)+K(0)\cdot(1-\mu(0))\big)\cdot \\ \cdot\big(p-\omega\cdot\beta(1)-S_j(0)\cdot\alpha(1)\big),$$

$$H_{ij}(K(2)) = \gamma(1)\cdot\big(I^*_{i_0}(0)\cdot(1-\mu(1))+I_i(1)+ \\ +K(0)\cdot(1-\mu(1))\cdot(1-\mu(0))\big)\cdot\big(p-\omega\cdot\beta(2)-S_j(1)\cdot\alpha(2)\big),$$

$$H_{ij}(K(3)) = \gamma(2)\cdot\begin{pmatrix}I^*_{i_0}(0)\cdot(1-\mu(2))(1-\mu(1))+ \\ +I^*_{i_1}(1)(1-\mu(2))+I_i(2)+\end{pmatrix} \\ +K(0)\cdot(1-\mu(2))\cdot(1-\mu(1))\cdot(1-\mu(0))\big)\cdot \\ \cdot\big(p-\omega\cdot\beta(3)-S_j(2)\cdot\alpha(3)\big).$$

Полученные соотношения позволяют проследить закономерность изменения величины H_{ij} во времени и записать общий вид выражения для произвольного t:

$$H_{ij}(K(t)) = \gamma(t-1)\cdot \\ \cdot\big(p-\omega\cdot\beta(t)-S_j(t-1)\cdot\alpha(t)\big)\cdot \quad (13) \\ \cdot\begin{pmatrix}I_i(t-1)+\sum_{\tau=0}^{t-2}I^*_{i_\tau}(\tau)\cdot \\ \cdot\prod_{\theta=\tau+1}^{t-1}(1-\mu(\theta))+K(0)\cdot\prod_{\tau=0}^{t-1}(1-\mu(\tau))\end{pmatrix},\ t=2,3,4,...$$

Из величин (13) при разных значениях $i=1,...,m$ и $j=1,...,n$ составляем вспомогательные матрицы выигрышей $H(K(t))$ для каждого момента t.

Как видно из формулы (13), элементы вспомогательной матрицы $H(K(t))$ на каждом шаге зависят от оптимальных стратегий, выбранных игроком 1 на предыдущих шагах. Таким образом, взяв в качестве оптимальной одну из своих m стратегий при $t=1$, игрок 1 может получить в момент $t=2$ одну из m возможных вспомогательных матриц $H(K(2))$. Оптимальная стратегия на втором шаге для каждой такой матрицы, в свою очередь, также определяет m возможных продолжений, то есть всего получается m^2 вспомогательных матриц $H(K(3))$, зависящих от выбора оптимальных стратегий $I^*(0)$ и $I^*(1)$ и так далее.

Последовательно увеличивая t и применяя к вспомогательным матрицам (13) критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа, можно определить оптимальные стратегии в соответствующие моменты времени и построить оптимальную траекторию для игрока 1 (производственного сектора).

Пример

Для иллюстрации описанного выше теоретического материала приведем расчеты модельного примера, позволяющие определить оптимальные стратегии производственного сектора в условиях неопределенности, вызванной неизвестными значениями штрафов за выбросы вредных веществ в окружающую среду.

Пусть в модели производственного сектора $T = 3$, начальное значение основных фондов $K(0) = 300$, цена товара $p = 12$, цена затрат $\omega = 15$.

Величина затрат на единицу выпуска $\alpha(t) = 0,45$, $t = 0,1,2,3$.

Коэффициент пропорциональности между основными фондами и загрязнением $\beta(t) = 0,6$, $t = 0,1,2,3$.

Темп изнашивания основных фондов $\mu(t) = 0,45$, $t = 0,1,2,3$.

Коэффициент пропорциональности между основными фондами и объемом выпуска $\gamma(t) = 0,5$, $t = 0,1,2,3$.

Будем предполагать, что возможные величины штрафов в каждый момент *t* реализуются из множества $S(t) = \{S_1(t), S_2(t), S_3(t), S_4(t)\} = \{2,5,8,11\}$, а возможные размеры инвестиций выбираются из множества $I(t) = \{I_1(t), I_2(t), I_3(t), I_4(t)\} = \{0,9,18,23\}$.

При $t = 1$ по формуле (10) строим вспомогательную матрицу:

$$H(K(1)) = \begin{pmatrix} 346,5 & 123,75 & -99 & -321,75 \\ 355,95 & 127,12 & -101,7 & -330,52 \\ 365,4 & 130,5 & -104,4 & -339,3 \\ 370,65 & 132,37 & -105,9 & -344,17 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для критерия Вальда в каждой строке этой матрицы находим минимальное значение, а из полученных чисел выбираем максимальное: –321,75.

Это число соответствует стратегии I_1, которая будет являться оптимальной для $t = 1$. С использованием этой стратегии и формул (10) рассчитывается следующая вспомогательная матрица для $t = 2$:

$$H(K(2)) = \begin{pmatrix} 95,28 & 18,71 & -8,23 & -14,72 \\ 104,73 & 23,11 & -12,20 & -28,41 \\ 114,18 & 27,5 & -16,16 & -42,10 \\ 119,43 & 29,95 & -18,37 & -49,71 \end{pmatrix}.$$

В каждой строке полученной матрицы находим минимальное значение и из них выбираем максимальное: –14,72.

Это число соответствует стратегии I_1, которая снова (как и для $t = 1$) будет оптимальной. По данной стратегии рассчитывается следующая вспомогательная матрица для $t = 3$:

$$H(K(3)) = \begin{pmatrix} 18,71 & -8,23 & -14,72 & 12,45 \\ 22,09 & -11,38 & -25,79 & 30,11 \\ 25,46 & -14,53 & -36,79 & 47,77 \\ 27,34 & -16,28 & -42,92 & 57,58 \end{pmatrix}.$$

В каждой строке матрицы определяем минимальное значение, из них выбираем максимальное (–14,72) и для последнего шага снова в качестве оптимальной получаем стратегию I_1.

В результате находим оптимальную траекторию для игрока 1 по критерию Вальда:

$$I_B^*(\cdot) = \{I_B^*(0), I_B^*(1), I_B^*(2)\} = \{1,1,1\}.$$

Далее применим критерий Гурвица. Пусть $\lambda = 0,5$, то есть позиция игрока 1 – средняя между крайним оптимизмом и крайним пессимизмом.

Возьмем начальную матрицу (14) и в каждой ее строке найдем минимальное и максимальное значения.

По правилу выбора оптимальной стратегии в критерии Гурвица вычисляем линейную комбинацию для первой строки:

$$-321,75 \cdot 0,5 + (1 - 0,5) \cdot 123,75 = 12,375.$$

Аналогичные расчеты проводим для остальных строк. В результате получаем следующий набор чисел:

12,375; 12,71; 13,05; 13,23.

Из этих значений выбираем наибольшее (13,23), соответствующее стратегии I_4, которая будет оптимальной при $t = 1$.

По стратегии I_4 рассчитываем следующую вспомогательную матрицу для $t = 2$:

$$H(K(2)) = \begin{pmatrix} 108,57 & 23,46 & -12,03 & -27,05 \\ 118,02 & 27,85 & -15,99 & -40,74 \\ 127,47 & 32,25 & -19,96 & -54,43 \\ 132,72 & 34,69 & -22,16 & -62,04 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в силу выбора при $t = 1$ другой стратегии (I_4 в отличие от I_1) эта матрица не совпадает со вспомогательной матрицей, использовавшейся на соответствующем шаге при вычислении критерия Вальда.

В каждой строке полученной матрицы находим минимальное и максимальное значения и применяем методику нахождения оптимальной стратегии по Гурвицу, что дает нам набор чисел:

40,75; 38,68; 36,51; 35,33.

Из этих величин выбираем наибольшую (40,75), соответствующую стратегии I_1, которая будет оптимальной для $t = 2$.

Используя эту стратегию, рассчитываем вспомогательную матрицу для $t = 3$:

$$H(K(3)) = \begin{pmatrix} 18,71 & -8,23 & -14,72 & 12,45 \\ 22,09 & -11,38 & -25,79 & 30,11 \\ 25,46 & -14,53 & -36,79 & 47,77 \\ 27,34 & -16,28 & -42,92 & 57,58 \end{pmatrix}.$$

В каждой строке матрицы находим минимальное и максимальное значения, применяем формулу критерия Гурвица и из чисел –10,33; –10,15; –6,84; –5,003 выбираем наибольшее, соответствующее стратегии I_4, которая будет оптимальной для $t=3$.

В итоге получаем оптимальную траекторию производственного сектора по критерию Гурвица:

$$I^*_Г(\cdot)=\{I^*_Г(0),I^*_Г(1),I^*_Г(2)\}=\{4,1,4\}.$$

И, наконец, рассмотрим критерий Сэвиджа.

В каждом столбце начальной вспомогательной матрицы (14) находим максимальное значение:

370,65; 132,37; –99; –321,75.

Далее строим матрицу риска по формуле (9):

$$R(K(1))=\begin{pmatrix}24,15 & 8,625 & 0 & 0\\ 14,7 & 5,25 & 2,7 & 8,77\\ 5,25 & 1,87 & 5,4 & 17,55\\ 0 & 0 & 6,9 & 22,42\end{pmatrix}.$$

В каждой строке этой матрицы находим максимальное значение и выбираем из них минимальное (14,7), соответствующее стратегии I_2, которая будет оптимальной при $t=1$.

По стратегии I_2 рассчитывается следующая вспомогательная матрица для $t=2$:

$$H(K(2))=\begin{pmatrix}100,48 & 20,57 & -9,72 & -19,54\\ 109,93 & 24,96 & -13,68 & -33,23\\ 119,38 & 29,36 & -17,65 & -46,9\\ 124,63 & 31,8 & -19,85 & -54,53\end{pmatrix}.$$

В каждом столбце матрицы $H(K(2))$ находим максимальное значение:

124,63; 31,8; –9,72; –19,54.

По полученным данным рассчитываем матрицу риска:

$$R(K(2))=\begin{pmatrix}24,15 & 11,23 & 0 & 0\\ 14,7 & 6,83 & 3,96 & 13,69\\ 5,25 & 2,44 & 7,93 & 27,38\\ 0 & 0 & 10,1 & 34,99\end{pmatrix}.$$

В каждой строке этой матрицы находим максимальное значение и из них выбираем минимальное (14,7), соответствующее стратегии I_2, которая снова оказалась оптимальной.

По стратегии I_2 рассчитывается следующая вспомогательная матрица для $t=3$:

$$H(K(3))=\begin{pmatrix}21,59 & -10,53 & -24,37 & 27,30\\ 24,96 & -13,68 & -35,41 & 44,96\\ 28,34 & -16,83 & -46,44 & 62,62\\ 30,21 & -18,58 & -52,58 & 72,43\end{pmatrix}.$$

В каждом столбце данной матрицы определяем максимальное значение:

30,21; –10,21; –24,37; 72,43,

после чего вычисляем матрицу риска:

$$R(K(3))=\begin{pmatrix}8,625 & 0 & 0 & 45,13\\ 5,25 & 3,14 & 11,03 & 27,47\\ 1,87 & 6,29 & 22,07 & 9,81\\ 0 & 8,04 & 28,208 & 0\end{pmatrix}.$$

В каждой строке матрицы $R(K(3))$ находим максимальное значение, из них выбираем минимальное (22,07) и видим, что при $t=3$ оптимальной будет стратегия I_3.

В результате получаем оптимальную траекторию производственного сектора по критерию Сэвиджа:

$$I^*_C(\cdot)=\{I^*_C(0),I^*_C(1),I^*_C(2)\}=\{2,2,3\}.$$

Номера оптимальных стратегий 1-го игрока в динамической игровой модели производственного сектора, найденные на основе различных критериев, можно свести в обобщающую таблицу.

Критерий	***Номер оптимальной стратегии игрока 1 для момента времени t***		
	$t=1$	$t=2$	$t=3$
Вальда	1	1	1
Гурвица	4	1	4
Сэвиджа	2	2	3

Окончательно оптимальная траектория производственного сектора выбирается из предложенных в зависимости от предпочтений производителей и их склонности к риску.

Заключение

Проведенные исследования продемонстрировали возможность прикладного использования новой теории динамических игр с природой для моделирования взаимодействий в различных сложных системах в условиях неопределенности на примере экономико-экологической системы региона. Применение теоретико-игрового аппарата позволяет произвести стратегический анализ, определить наиболее важные и требующие учета факторы при принятии решений, что, в конечном счете, повышает эффективность функционирования системы.

Рассмотренный в статье подход позволяет с новой точки зрения исследовать задачи со стратегически обусловленными действиями и изучать поведение человека в различных ситуациях в рамках экономической науки, политологии, социологии, психологии и пр., учитывая при этом изменение во времени условий или факторов, могущих повлиять на ситуацию.

Литература

1. Мазалов, В. В. Математическая теория игр и приложения: учеб. пособие / В. В. Мазалов. – СПб.: Лань, 2010. – 446 с.

2. Зенкевич, Н. А. Динамические игры и их приложения в менеджменте: учеб. пособие / Н. А. Зенкевич, Л. А. Петросян, Д. В. К. Янг. – СПб.: Высшая школа менеджмента, 2009. – 416 с.

3. Данилов, Н. Н. Динамические матричные игры. Обоснование применения принципа минимакса в классе чистых комбинированных стратегий / Н. Н. Данилов // Вестник КемГУ. – 2012. – Вып. 2(50). – С. 42 – 48.

4. Данилов, Н. Н. Математическая модель менеджмента в условиях неопределенности в форме динамической игры с природой / Н. Н. Данилов // Вестник КемГУ. – 2012. – Вып. 3(51). – С. 110 – 114.

5. Данилов, Н. Н. Курс математической экономики: учеб. пособие / Н. Н. Данилов. – М.: Высшая школа, 2006. – 407 с.

6. Федеральный закон Российской Федерации от 10.01.2002 № 7-ФЗ «Об охране окружающей среды» (ред. от 02.07.2013). – Режим доступа: http://www.consultant.ru/popular/okrsred/

7. Дубров, А. М. Моделирование рисковых ситуации в экономике и бизнесе: учеб. пособие / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев; под ред. Б. А. Лагоши. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 176 с.

Информация об авторах:

СамойленкоНаталья Сергеевна – студентка математического факультета КемГУ, 8 (3842) 54-25-09, nostienataly@mail.ru.

Natalia S. Samoylenko – student at the Mathematical Faculty, Kemerovo State University.

Мешечкин Владимир Викторович – научный руководитель, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики КемГУ, 8 (3842) 54-25-09, vvm@kemsu.ru.

Vladimir V. Meshechkin – research advisor, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor at the Department of Mathematical Cybernetics, Kemerovo State University.