УДК 517.9

ОБОСНОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер, О. Д. Киселева

RATIONALE OF DIFFERENTIAL SPLITTING SCHEMES FOR EQUATIONS OF VISCOUS COMPLRESSIBLE FLUIDS MIXTURE MOVEMENT

N. A. Kucher, O. D. Kiseleva

В работе рассматривается дифференциальная схема расщепления по физическим процессам системы уравнений одномерного движения смесей вязких сжимаемых жидкостей. Доказывается сходимость в шкале Соболевских пространств предлагаемой схемы расщепления. Результаты работы могут быть положены в основу построения и математического анализа соответствующей конечно-разностной схемы расщепления. Кроме того, доказанная в работе теорема о сходимости одновременно доказывает существование решения рассматриваемой начально-краевой задачи.

We consider the differential splitting scheme on physical processes on the system one-dimensional equations viscous compressible fluid mixtures movement. Prove the convergence at the scale of Sobolev spaces in the proposed scheme of splitting. The results can be used as the basis on the construction of mathematical analysis and the corresponding finite-difference splitting scheme. In addition, proved theorem on the convergence proves the existence of a solution to the initial-boundary value problem.

Ключевые слова: вязкая жидкость, смеси жидкостей, схема расщепления, сходимость.

Keywords: viscous fluids, the mixture of fluids, splitting scheme, convergence.

Практика использования методов математического моделирования различных физических процессов стимулировала теоретическое исследование моделей механики сплошной среды. Ввиду нелинейности и многомерности этих моделей аналитические методы исследования не позволяют в общем случае получить полного решения задачи. Одним из основных методов, позволяющих как проводить теоретические исследования самих моделей, так и применять их к решению практических важных задач, являются численные методы. Многомерность таких задач выдвигает в число главных проблему построения и исследования экономичных численных алгоритмов, одним из основных приемов построения которых, является метод расщепления (метод слабой аппроксимации) дифференциальных уравнений.

Метод слабой аппроксимации, занимая промежуточное положение между дифференциальной задачей и соответствующей разностной моделью, может быть использован в двух вариантах:

– как один из методов исследования корректности задачи;

– как метод построения и строгого математического анализа соответствующих разностных схем расщепления, которые с этой точки зрения представляют собой простые разностные аппроксимации дифференциальных задач на дробных шагах.

Для линейных задач в настоящее время имеются результаты о сходимости метода слабой аппроксимации при весьма общих предположениях относительно классов операторов. Для нелинейных уравнений аналогичные результаты установлены лишь для частных моделей. Достаточно полный обзор литературы на эту тему имеется в работах [1; 2].

Уравнения одномерного движения с плоскими волнами бинарной смеси вязких сжимаемых жидкостей описывается уравнениями [3]:

$$p_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)+ \tag{1a}$$
$$+\frac{\partial p_i}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{j=1}^{2}\left(2u_{ij}+\lambda_{ij}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x}\right]+I^{(i)},\ i=1,2$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(p_j u_j\right)=0,\ j=1,2 \tag{1b}$$

первые два, из которых, представляют собой закон сохранения импульса компонентов смеси, а два последних выражают закон сохранения массы каждой из компонент смеси.

Здесь p_i – плотность i-ой составляющей смеси, $\rho_i=p_i^{\gamma_i}, i=1,2$ – давление соответствующей компоненты. u_i – скорость i-ой компоненты.

Коэффициенты вязкости λ_{ij},μ_{ij} предполагаются постоянными, удовлетворяющими следующим условиям (вытекающим из второго закона термодинамики):

$$\mu_{11}>0,\ 4\mu_{11}\cdot\mu_{22}-\left(\mu_{12}+\mu_{21}\right)^2>0, \tag{1c}$$
$$\nu_{ij}=\lambda_{ij}+2\mu_{ij},\quad \nu_{11}>0,$$
$$4\nu_{11}\cdot\nu_{22}-\left(\nu_{12}+\nu_{21}\right)^2>0.$$

Слагаемые $I^{(i)}$, выражающие интенсивность обмена импульсами между компонентами смеси, определяют по формуле:

$$I^{(i)}=\left(-1\right)^{i+1}\cdot a\left(\overline{u}^{(2)}-\overline{u}^{(1)}\right), \tag{1d}$$
$$a=const>0, i=1,2.$$

Уравнение (1a) и (1b) должны быть дополнены начальными условиями:

$$p_i\big|_{t=0} = p_i^0(x),$$

$$u_i\big|_{t=0} = u_i^0(x), x \in \Omega = (0,1), i = 1,2 \qquad (1e)$$

и граничными условиями, в качестве которых, мы примем условие периодичности:

$$u_i\big|_{x=0} = u_i\big|_{x=1},$$

$$p_i\big|_{x=0} = p_i\big|_{x=1}, i = 1,2, \quad t \in (0,T). \qquad (1f)$$

Для системы дифференциальных уравнений (1a) и (1b) рассмотрим расщепление по физическим процессам заключающееся в том, что на каждом целом шаге [nτ,(n+1)τ], n = 0,1,..,N-1, $N \cdot \tau = T$ системе (1a) и (1b) сопоставляются следующие системы:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\frac{\partial p_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \frac{1}{5}\frac{\partial p_2}{\partial t} + u_2\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{1}{5}p_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + p_1 u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = \\ = 0, \frac{1}{5}p_2\frac{\partial u_2}{\partial t} + p_2 u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ n\tau < t \le n\tau + \frac{1}{5}\tau. \end{cases} \qquad (I_n)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\frac{\partial p_1}{\partial t} + p_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \frac{1}{5}\frac{\partial p_2}{\partial t} + p_2\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{1}{5}p_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}p_1^{\gamma_1} = \\ = 0, \frac{1}{5}p_2\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}p_2^{\gamma_2} = 0, \\ n\tau + \frac{1}{5}\tau < t \le n\tau + \frac{2}{5}\tau. \end{cases} \qquad (II_n)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\frac{\partial p_1}{\partial t} = 0, \frac{1}{5}\frac{\partial p_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{1}{5}p_1\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\nu_{11}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}\right], \\ \frac{1}{5}p_2\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\nu_{22}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}\right], \\ n\tau + \frac{2}{5}\tau < t \le n\tau + \frac{3}{5}\tau. \end{cases} \qquad (III_n)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\frac{\partial p_1}{\partial t} = 0, \frac{1}{5}\frac{\partial p_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{1}{5}p_1\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\nu_{11}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \\ +\nu_{12}\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\left(t - \frac{1}{5}\tau\right), \\ \frac{1}{5}p_2\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\nu_{22}\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \\ +\nu_{21}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\left(t - \frac{1}{5}\tau\right), \\ n\tau + \frac{3}{5}\tau < t \le n\tau + \frac{4}{5}\tau. \end{cases} \qquad (IV_n)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\frac{\partial p_1}{\partial t} = 0, \frac{1}{5}\frac{\partial p_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{1}{5}p_1\frac{\partial u_1}{\partial t} = a\left(u_2 - u_1\right), \\ \frac{1}{5}p_2\frac{\partial u_2}{\partial t} = -a\left(u_2 - u_1\right), \\ n\tau + \frac{4}{5}\tau < t \le n\tau + \tau. \end{cases} \qquad (V_n)$$

Уравнения (I_n) учитывают эффекты переноса частиц среды. В уравнениях (II_n) учтены члены с давлением в уравнениях движения и члены вида $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ в уравнениях неразрывности. Системы (III_n) и (IV_n) учитывают диссипативные члены в уравнениях сохранения импульса. Уравнения (V_n) отражают эффекты вследствие обмена импульсами между компонентами.

Для каждой из систем уравнений (I_n) – (V_n) ставятся граничные условия в виде условий периодичности вида (1f) по пространственной переменной *x,* в качестве начальных данных для каждой их этих систем уравнений принимаются решения, полученные на предыдущем дробном шаге.

Преобразуем расщепленную систему (I_n) – (V_n), выбирая в качестве искомых функций Q_i, u_i, $Q_i = \ln p_i, i = 1,2$ и при этом проведем линеаризацию полученных уравнений в пределах каждого расщепленного шага [nτ,(n+1)τ]. Тем самым задаче (1) сопоставляется следующая вспомогательная задача:

Задача A_τ

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\frac{\partial Q_1}{\partial t} + u_1^n\frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0, \frac{1}{5}\frac{\partial Q_2}{\partial t} + u_2^n\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0, \\ R_1\left(Q_1^n\right)\frac{\partial u_1}{\partial t} + 5R_1\left(Q_1^n\right)u_1^n\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ R_2\left(Q_2^n\right)\frac{\partial u_2}{\partial t} + 5R_2\left(Q_2^n\right)u_2^n\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ n\tau < t \le n\tau + \frac{1}{5}\tau. \end{cases} \qquad (2a)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\partial Q_1}{\partial t}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0,\ \dfrac{1}{5}\dfrac{\partial Q_2}{\partial t}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ R_1\left(Q_1^n\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\dfrac{\partial Q_1}{\partial x}= \\ =0,\ R_2\left(Q_2^n\right)\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\dfrac{\partial Q_2}{\partial x}=0, \\ n\tau+\dfrac{1}{5}\tau<t\le n\tau+\dfrac{2}{5}\tau. \end{cases} \tag{2b}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\partial Q_1}{\partial t}=0,\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial Q_2}{\partial t}=0 \\ R_1\left(Q_1^n\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=S_1\left(Q_1^n\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{2}\nu_{11}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right], \\ R_2\left(Q_2^n\right)\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=S_2\left(Q_2^n\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{2}\nu_{22}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right], \\ n\tau+\dfrac{2}{5}\tau<t\le n\tau+\dfrac{3}{5}\tau. \end{cases} \tag{2c}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\partial Q_1}{\partial t}=0,\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial Q_2}{\partial t}=0, \\ R_1\left(Q_1^n\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=S_1\left(Q_1^n\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{2}\nu_{11}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right]+ \\ +S_1\left(Q_1^n\right)\nu_{12}\cdot\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\left(t-\dfrac{1}{5}\tau\right), \\ R_2\left(Q_2^n\right)\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=S_2\left(Q_2^n\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{2}\nu_{22}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right]+ \\ +S_2\left(Q_2^n\right)\nu_{21}\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\left(t-\dfrac{1}{5}\tau\right), \\ n\tau+\dfrac{3}{5}\tau<t\le n\tau+\dfrac{4}{5}\tau. \end{cases} \tag{2d}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\partial Q_1}{\partial t}=0,\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial Q_2}{\partial t}=0 \\ R_1\left(Q_1^n\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=S_1\left(Q_1^n\right)a\left(u_2-u_1\right), \\ R_2\left(Q_2^n\right)\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=-S_2\left(Q_2^n\right)a\left(u_2-u_1\right), \\ n\tau+\dfrac{4}{5}\tau\le t<n\tau+\tau. \end{cases} \tag{2e}$$

Здесь $R_0(Q)=\dfrac{1}{5}\exp Q,$

$$R_i(Q)=\frac{1}{5}\frac{1}{\gamma_i}\exp\left\{\left(1-\gamma_i\right)Q\right\},$$

$$S_i(Q)=\frac{1}{\gamma_i}\exp\left\{-\gamma_i Q\right\} \tag{2f}$$

Априорные оценки решений расщепленной задачи A_τ

В работе используются общепринятые обозначения функциональных пространств [4; 5]. В частности L^p – норма, определяется формулой:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}=|f|_{0,p}=\left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p},1\le p<\infty.$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)}=|f|_{0,\infty}=\lim_{p\to\infty}\|f\|_{L^p(\Omega)} \tag{3}$$

Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве с кусочно-гладкой границей.

Пространство С. Л. Соболева $W^{l,p}(\Omega)$ (l – натуральное, $1\le p<\infty$) состоит из функций f, имеющих обобщенные производные $D^\alpha f$ в смысле С. Л. Соболева до порядка l включительно, принадлежащих $L^p(\Omega)$. Норма в $W^{l,p}(\Omega)$ определяется формулой:

$$\|f\|_{l,p}^p=\sum_{m=0}^l |f|_{m,l}^p,$$

$$|f|_{m,p}^p=\sum_{|\alpha|=m}\left|D^\alpha f\right|_{0,p}^p \tag{4}$$

В пространстве $C^l\left(\overline{\Omega}\right)$ функций, обладающих в $\overline{\Omega}$ непрерывными частными производными до порядка l включительно, норма определяется по формуле:

$$\|f\|_{l,\infty}=\sum_{|\alpha|\le l}\sup_{x\in\bar\Omega}\left|D^\alpha f\right|.$$

Если $x,t\to f(x,t)$ – функция, зависящая от пространственной переменной $x\in\Omega$ и времени $t\in(0,T)$, то положим:

$$f(x)=<<x\to f(x,t)>>$$

и будем рассматривать f как функцию аргумента t со значением в пространстве функций, определенных на Ω.

Например, если X – некоторое Банахово пространство, то C(0,T; X) – совокупность непрерывных отображений $f:[0,T]\to X$ с нормой

$$\|f\|_{c(0,T;X)}=\sup_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_X.$$

Условимся обозначать в дальнейшем через $H^l(\Omega)(l\ge 0-\textit{целое})$ гильбертово пространство, полученное замыкание множества бесконечно-дифференцируемых во всем пространстве R^k и периодических (с единичным периодом) по каждой переменной x_i i=1,..,k скалярных или вектор-функций по норме $\|f\|_{l,2}=\|f\|_{W^{l,2}(\Omega)}$, где интегрирование производится по области

$$\Omega=\left\{x=\left(x_1,..,x_k\right),0<x_i=1,i=1,..,k\right\}.$$

Основным результатом этого раздела является утверждение.

Лемма 1. Пусть начальные условия в (1е) удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$Q_i^0(x)=\ln p_i^0(x)\in H^l(\Omega),i=1,2$$

$$u_i^0(x)\in H^l(\Omega),i=1,2$$

a) тогда на произвольном конечном промежутке 0<t<T задача A_τ для каждого τ ϵ (0,T) однозначно разрешима в классе:

$\left\{Q_{1,\tau}(t),\ Q_{2,\tau}(t),\ u_{1,\tau}(t),\ u_{2,\tau}(t)\right\} \in C(0,\ T;\ H^l)$;

b) на некотором промежутке (0, T), определяемом нормой в H^l начальных функций, имеют место следующие, равномерные по τ, оценки:

$$\left\|Q_{i,\tau}(t)\right\|_{C(0,T;H^l)},$$

$$\left\|u_{i,\tau}(t)\right\|_{C(0,T;H^l)} \le K, i = 1,2; \tag{5}$$

$$\left\|\frac{\partial Q_{i,\tau}}{\partial t}(t)\right\|_{L^\infty(0,T;H^{l-1})} \le K, i = 1,2; \tag{6}$$

$$\left\|\frac{\partial u_{i,\tau}}{\partial t}(t)\right\|_{L^2(0,T;H^{l-1})} \le K, i = 1,2. \tag{7}$$

Краткая схема доказательства Леммы 1. Поскольку при фиксированном τ на каждом дробном шаге соответствующая система уравнений имеет бесконечно-дифференцируемое периодическое по x решение, если таковыми являются соответствующие начальные функции, то доказательство Леммы 1 сводится к получению априорных оценок в $H^l(\Omega)$ для каждой из систем (2) и равномерных относительно параметра τ неравенств (5) – (7) для расщепления A_τ в целом.

Для получения априорных оценок решения задачи A_τ на отдельных дробных шагах целесообразно рассмотреть следующую модельную систему:

$$R_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial t} = S_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\nu_{11}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}\right] + $$
$$+S_1(x)\nu_{12}\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\left(t-\frac{1}{5}\tau\right),$$
$$R_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial t} = S_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\nu_{22}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}\right] + \tag{8}$$
$$+S_2(x)\nu_{21}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\left(t-\frac{1}{5}\tau\right),$$
$$t_0 < t < t_0 + \frac{1}{5}\tau,$$

где $R_i(x),\ S_i(x),\ i = 1,2$ – известные функции, принадлежащие пространству $H^l(\Omega), l > 2$, причем все они строго положительные и ограниченные.

Дифференцируя уравнение (8) по пространственной переменной *x,* умножая затем на подходящую функцию и интегрируя по частям, подходим к неравенству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\vec{u}(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R})} + \sigma_{11}\cdot\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_1)} +$$
$$+\sigma_{22}\cdot\left\|\frac{\partial u_2}{\partial x}(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_2)} \le$$
$$\le H\cdot\left\|\vec{u}\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R})} + \varepsilon_1\cdot\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}(t-\frac{1}{5}\tau)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_1)} +$$
$$+\varepsilon_2\cdot\left\|\frac{\partial u_2}{\partial x}(t-\frac{1}{5}\tau)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_2)} +$$
$$+\frac{|\nu_{21}|}{\varepsilon_3}\cdot\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}(t-\frac{1}{5}\tau)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_2)} +$$
$$+\frac{|\nu_{12}|}{\varepsilon_4}\cdot\left\|\frac{\partial u_2}{\partial x}(t-\frac{1}{5}\tau)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_1).} \tag{9}$$

Здесь $\vec{u} = (u_1, u_2)$,

$$\left\|\vec{u}\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R})} = \left\|u_1\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,R_1)} + \left\|u_2\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,R_2)},$$

а весовая норма $\|f\|_{W^{l,2}(\Omega,R\ )}$ определяется по формуле:

$$\|f\|^2{}_{W^{l,2}(\Omega,R\ )} = \sum_{|\alpha|\le l}\int_\Omega R(D^\alpha f)^2\,dx.$$

Положительная величина H зависит от норм $\|S_i\|_{l,2}, \|R_i\|_{l,2}$ и нижних граней функции S_i, R_i. Параметры $\sigma_{11},\ \sigma_{22}$ есть линейные функции коэффициентов вязкости ν_{ij} и величины $\varepsilon_j,\ j = \overline{1,4}$, которые суть произвольные вещественные числа.

Если принять, что

$$R_i = R_i(Q_i^n), S_i = S_i(Q_i^n), i = 1,2,$$

то неравенство вида (9) имеет место на четвертом дробном шаге $n\tau + \frac{3}{5}\tau < t < n\tau + \frac{4}{5}\tau$. Для системы уравнений на третьем дробном шаге

$$n\tau + \frac{2}{5}\tau < t < n\tau + \frac{3}{5}\tau$$

также справедливо неравенство вида (9), но в более простом варианте, поскольку отсутствуют слагаемые со сдвинутым аргументом.

Интегрируя упомянутые неравенства по t в соответствующих пределах, складывая полученные неравенства и выбирая надлежащим образом произвольные числа ε_j приходим к соотношению:

$$\frac{1}{2}\left\|\vec{u}^{\,n+4/5}\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R}^n)} - \frac{1}{2}\left\|\vec{u}^{\,n+2/5}\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R}^n)} +$$

$$+C_0\int_{n\tau+\frac{2}{5}\tau}^{n\tau+\frac{4}{5}\tau}\left(\begin{array}{l}\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_1^n)}+\\+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial x}(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_2^n)}\end{array}\right)dt\le$$

$$\le H_1\left(\left\|Q_1^n\right\|_{l,2},\left\|Q_2^n\right\|_{l,2}\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{n\tau+\frac{2}{5}\tau}^{n\tau+\frac{4}{5}\tau}\left\|\vec{u}^{\,n}(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R}^n)}dt, \qquad (10)$$

где $S^n{}_i=S_i(Q_i^n),\vec{R}^n=(R_1(Q_1^n),R_2(Q_2^n)).C_0$ – положительная постоянная, зависящая от коэффициентов вязкости $\lambda_{ij},\mu_{ij},H_1$ – известная функция своих аргументов, определяемая функциями (2f).

Оценки решений уравнений (2b) и (2a) имеются в работе [1], комбинируя которые с неравенством (10), приходим к ключевому неравенству:

$$\frac{1}{2}\left\|Z^{n+1}\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R}^n)}-\frac{1}{2}\left\|Z^n\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R}^n)}+$$

$$+C_0\int_{n\tau+\frac{2}{5}\tau}^{n\tau+\frac{4}{5}\tau}\left(\begin{array}{l}\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_1^n)}+\\+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial x}(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,S_2^n)}\end{array}\right)dt\le$$

$$\le\frac{1}{2}M\left(\left\|Z^n\right\|_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R}^n)}\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{n\tau}^{n\tau+\tau}\left\|Z(t)\right\|^2_{W^{l,2}(\Omega,\vec{R}^n)}dt. \qquad (11)$$

где M – известная положительная локально ограниченная функция.

Из оценок (13) рассуждениями, аналогичными [1] получаем оценки (5) – (7).

Сходимость схемы расщепления A_τ

В этом разделе докажем сходимость решения расщепленной задачи A_τ к точному решению задачи (1).

Поскольку вектор функция

$$z=(Q_{1,\tau},Q_{2,\tau},u_{1,\tau},u_{2,\tau})$$

удовлетворяет системе уравнений (2a) – (2e), то для средних функций:

$$\widetilde{Q}_{i,\tau}(t)=T_\tau(Q_{i,\tau})(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}Q_{i,\tau}(s)ds,i=1,2,$$

$$\widetilde{u}_{i,\tau}(t)=T_\tau(u_{i,\tau})(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}u_{i,\tau}(s)ds,i=1,2 \qquad (12)$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\widetilde{Q}_{i,\tau}}{\partial t}+\widetilde{u}_{i,\tau}\frac{\partial\widetilde{Q}_{i,\tau}}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}_{i,\tau}}{\partial x}=\varphi_{i,\tau} \qquad (13a)$$

$$R_i\left(Q_{i,\tau}(t)\right)\cdot\left(\frac{\partial\tilde{u}_{i,\tau}}{\partial t}+\tilde{u}_{i,\tau}\frac{\partial\tilde{u}_{i,\tau}}{\partial x}\right)+\frac{\partial\tilde{Q}_{i,\tau}}{\partial x}=$$

$$=S_i\left(Q_{i,\tau}(t)\right)\cdot\sum\nolimits_{j=1}^2\nu_{ij}\frac{\partial^2u_j}{\partial x^2}+$$

$$+S_i\left(Q_{i,\tau}(t)\right)\left(-1\right)^{i+1}\cdot$$

$$\cdot a\left(\tilde{u}_{2,\tau}-\tilde{u}_{1,\tau}\right)+\psi_{i,\tau},i=1,2. \qquad (13b)$$

Функции $\psi_{i,\tau},\varphi_{j,\tau},i,j=1,2$ представляют собой весьма громоздкие выражения и по этой причине мы их не выписываем, но отметим, что в силу априорных оценок (5) – (7) справедливы неравенства:

$$\sup\nolimits_{0\le t\le T}\left\|\varphi_{j,\tau}(t)\right\|_{l-2,2}\le C_1\sqrt{\tau},j=1,2, \qquad (14)$$

$$\sup\nolimits_{0\le t\le T}\left\|\psi_{i,\tau}(t)\right\|_{l-3,2}\le C_1\sqrt{\tau},i=1,2,$$

с постоянной C_1, не зависящей от параметра τ.

В силу оценок (5) – (7) можно выделить подпоследовательность $\{\tau_k\}\subset\{\tau\}$ такую, что

$Q_{i,\tau_k}(t)\to Q_i(t)$ * – слабо в $L^\infty(0,T;H^l(\Omega))$,

$Q_{i,\tau_k}(t)\to Q_i(t)$ – сильно в $C(0,T;H^{l-1}(\Omega))$, (15)

$\frac{\partial Q_{i,\tau_k}}{\partial t}(t)\to\frac{\partial Q_i}{\partial t}(t)$ * – слабо в $L^\infty(0,T;H^{l-1}(\Omega)),\ i=1,2$,

$u_{i,\tau_k}(t)\to u_i(t)$ * – слабо в $L^\infty(0,T;H^l(\Omega))$,

$u_{i,\tau_k}(t)\to u_i(t)$ – сильно в $C(0,T;H^{l-1}(\Omega))$, (16)

$\frac{\partial u_{i,\tau_k}}{\partial t}(t)\to\frac{\partial u_i}{\partial t}(t)$ – слабо в $L^2(0,T;H^{l-1}(\Omega)),i=1,2$.

Поскольку имеет место компактное вложение $H^l(0,\ 1)$ в пространство (l-1) – раз непрерывно дифференцируемых функций $C^{l-1}\left[0,\ 1\right]$, то из (15) и (16), в частности, следует:

$$\frac{\partial^\alpha Q_{i,\tau_k}}{\partial x^\alpha}\to\frac{\partial^\alpha Q_i}{\partial x^\alpha}$$

равномерно в $\Omega\times(0,T),\alpha\le l-1$,

$\frac{\partial^\alpha u_{i,\tau_k}}{\partial x}\to\frac{\partial^\alpha u_i}{\partial x}$ равномерно в

$$\Omega\times(0,T),\alpha\le l-1. \qquad (17)$$

Из свойств оператора усреднения (T_τ) и соотношений (15), (16) вытекает, что семейство усредненных функций $\widetilde{Q}_{i,\tau_k}$ и $\widetilde{u}_{i,\tau_k},i=1,2$ определенных в (12) обладают свойствами, аналогичными, (15), (16).

Это обстоятельство позволяет совершить предельных переход в системе уравнений (13), в результате которого получим, что предельные функции $\{Q_{1\tau},\ Q_{2\tau},\ u_{1\tau},\ u_{2\tau}\}$ удовлетворяют системе уравнений, эквивалентной исходной системе (1a), (1b).

Если l = 2, то уравнения неразрывности удовлетворяются всюду, а уравнения сохранения импульсов почти всюду в цилиндре $\Omega\times(0,T)$. Если $l\geq 3$, то $(Q_1,\ Q_2,\ u_1,\ u_2)$ – классическое решение. Начальные и граничные условия выполняются в классическом смысле.

Наконец, в силу теоремы единственности рассматриваемой задачи в данном функциональном классе, можно констатировать сходимость в указанном выше смысле всей последовательности $(Q_{1\tau},Q_{2\tau},u_{1\tau},u_{2\tau})$ решений расщепленной задачи A_τ.

Таким образом, доказана следующая теорема сходимости.

Теорема 1. Предположим, что начальная функция $Q_i^0(x)=\ln p_i^0(x)$ и $u_i^0(x), i=1,2$ принадлежит пространству $H^l(\Omega), l\geq 3$. Тогда на некотором промежутке времени (0,T) последовательность решений $Z_\tau=(Q_{1\tau},Q_{2\tau},u_{1\tau},u_{2\tau})$ вспомогательной задачи A_τ при $\tau\to 0$ сходится к точному решению $Z(t)=(Q_1,Q_2,u_1,u_2)$ задачи (1) в следующем смысле:

$Z_\tau(t)\to Z(t)*$ – слабо в $L^\infty(0,T;H^l(\Omega))$,

$Z_\tau(t)\to Z(t)$ – сильно в $C(0,T;H^{l-1}(\Omega))$,

$\frac{\partial Q_{i,\tau}}{\partial t}\to\frac{\partial Q_i}{\partial t}(t)*$ – слабо в $L^\infty(0,T;H^{l-1}(\Omega)), i=1,2$,

$\frac{\partial u_{i,\tau}}{\partial t}\to\frac{\partial u_i}{\partial t}(t)$ – слабо в $L^2(0,T;H^{l-1}(\Omega)),\ i=1,2.$

При этом вектор функция

$$Z_\tau=(Q_{1\tau},Q_{2\tau},u_{1\tau},u_{2\tau})$$

сходится к $Z(t)=(Q_1,Q_2,u_1,u_2)$ равномерно в цилиндре $\Omega\times(0,T)$, а производные до порядка (l-2) включительно сходятся равномерно в этом цилиндре к соответствующим производным от Z.

Литература

1. Кучер, Н. А. Метод слабой аппроксимации и анализ схем расщепления в газовой динамике / Н. А. Кучер. – Кемерово, 1997. – 188 с.
2. Кучер, Н. А. Некоторые замечания о схемах расщепления для уравнений газовой динамики, используемых в методе «крупных частиц» / Н. А. Кучер // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11. – С. 94 – 108.
3. Rajagopal, K. R. Mechanies of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. – Singapore: WorD Sci., 1995.
4. Соболев, С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
5. Никольский, С. М. Приближенные функции многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

Информация об авторах:

Кучер Николай Алексеевич – научный руководитель, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений математического факультета КемГУ, nakucher@rambler.ru.

Nikolay A. Kucher – research advisor, Doctor of physicist-mathematical sciences, Professor at the Department of differential equations at the Faculty of mathematic of Kemerovo State University.

Киселева Олеся Дмитриевна – магистрант математического факультета КемГУ, my_alisiia@mail.ru.

Olesia D. Kiseleva – Undergraduate of Faculty of mathematicsof Kemerovo State University.