УДК 519.248: 519.6

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ ВХОДЯЩИХ ПОТОКОВ

В. А. Чекменев, Т. Д. Чекменева

MULTICRITERIAL OPTIMIZATION FOR QUEUEING SYSTEMS WITH WAITING OPERATING AT COMPETITIVE INPUT FLOWS

V. A. Chekmenev, T. D. Chekmeneva

В статье рассматривается подход к оптимизации функционирования систем обслуживания, основанный на принципах устойчивости, выгодности и справедливости при распределении заявок на обслуживание от разных клиентов. Ставится задача многокритериальной оптимизации, для решения которой применяются методы теории игр. Получены аналитические решения для ряда систем обслуживания с ожиданием.

The paper describes an approach to optimizing the functioning of queueing systems based on the principles of sustainability, profitability and equity in the allocation of support requests from different clients. The methods of the theory of games are applied to mee t the objective of multicriterial optimization. The analytical solutions to some of queueing systems with waiting have been obtained.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, многокритериальная оптимизация, теория игр.

Keywords: queueing systems, multicriterial optimization, theory of games.

Введение

Во многих информационных и других обслуживающих системах возникает проблема наиболее оптимального распределения заявок клиентов к каналам обслуживания. Так как часто в таких системах входящие потоки заявок поступают от разных клиентов, то между ними возникает конкуренция за ресурсы системы. В этих случаях целесообразно искать оптимальное решение с точки зрения нескольких критериев: устойчивости, выгодности и справедливости принимаемых решений для всех пользователей (клиентов) информационной или обслуживающей системы [2].

В статье ставится и решается задача оптимизации распределения входящих потоков по каналам обслуживания для ряда математических моделей информационных систем, описываемых системами массового обслуживания (СМО) с ожиданием, с точки зрения нескольких критериев, предложенных в [4].

Постановки задач для разных типов систем отличаются числом каналов (рассматриваются двух- и многоканальные системы), а также законами распределения времени обслуживания (экспоненциальным и произвольным с известными первыми моментами). Общим для всех задач является предположение о входящих потоках, которые образуются разными пользователями. Приведем общую часть постановки задачи оптимизации распределения заявок по каналам обслуживания с точки зрения минимизации среднего времени их пребывания в системе или в очереди.

Постановка задачи. Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с ожиданием с m (в общем случае) параллельно функционирующими обслуживающими приборами (каналами). На вход СМО поступают n независимых простейших потоков интенсивности λ_i (i=1,…,n). Будем считать, что требования (заявки) каждого потока генерируются отдельным пользователем A_i (i=1,…,n). Пользователь A_i направляет свои требования на каждый обслуживающий прибор с определённой вероятностью x_{ij} (j – номер прибора). Требования обслуживаются в порядке поступления (FIFO). Задача оптимизации состоит в определении оптимального распределения $(x_1^*,\ldots, x_n^*)$ заявок для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за средства обслуживания. Здесь $x_i^* = (x_{i1}^*,\ldots, x_{im}^*)$, i=1,…,n.

В качестве показателей эффективности L_i распределения заявок по приборам берутся потери, приходящиеся на суммарное среднее время γ пребывания в системе (в очереди) требований, поступивших за единицу времени от каждого пользователя A_i (i=1,…,n). Очевидно, потери каждого пользователя зависят от выбора всех пользователей, т. е. $L_i = L_i\,(x_1,\ldots,x_n)$. Таким образом, получаем многокритериальную задачу оптимизации, которая формулируется как задача теории игр. Оптимальное решение рассматривается как решение бескоалиционной игры n лиц с использованием принципов равновесия и Парето-оптимальности, описанных в [6, с. 78 – 85], а также на основе вышеуказанных представлений об устойчивости, выгодности и справедливости оптимальных решений.

Для поиска Парето-оптимальной ситуации, как и в [6], пользуемся следующим утверждением [1].

Утверждение. Если для некоторых $\alpha_i > 0, i \in I, x^* \in X$ имеет место равенство:

$$\min_{x\in X} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x^*)\ , \qquad (1)$$

то ситуация x^* оптимальна по Парето.

Данной постановке задачи удовлетворяют многоканальные марковские и полумарковские СМО с ожиданием, рассмотренные ниже.

1. Марковские СМО с ожиданием

Постановка задачи. Рассмотрим марковскую систему массового обслуживания (СМО) с ожиданием, в которой параллельно функционируют m узлов (приборов). На вход системы поступают n простейших потоков заявок интенсивности λ_i, i=1,…,n. Требования каждого потока генерируются отдельным пользователем и направляются в очередь к j-му прибору с вероятностью x_{ij}. На основании теоремы просеивания и объединения простейших потоков по полиномиальной схеме образуется *m* простейших потоков заявок к обслуживающим приборам с интенсивностями

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\lambda_i, \quad j = 1,..,m.$$

Средние потери на ожидание *i*-го пользователя в единицу времени определяются выражением:

$$L_i(x_1,..,x_n) = \lambda_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} K_j v_j, \ i = 1,..,n,$$

где

$x_i = (x_{i1},..,x_{im})$ – вектор вероятностей распределения заявок *i*-го пользователя по *m* очередям;

K_j – стоимость единицы времени ожидания заявки у *j*-го прибора;

$v_j = \dfrac{\Lambda_j}{\mu_j(\mu_j - \Lambda_j)}, (j = 1,...,m)$ – среднее время ожидания в очереди у *j*-го прибора [3];

μ_j – интенсивность обслуживания заявки на *j*-ом приборе.

Ставится задача: найти оптимальное распределение заявок для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за средства обслуживания.

Оптимизация. Решением поставленной задачи будет являться точка равновесия бескоалиционной игры. Задачу поиска ситуации равновесия можно сформулировать в виде многокритериальной задачи нелинейного программирования с ограничениями:

$$\begin{cases} L_i(x_1,..,x_n) \to \min, i = 1,..,n \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, i = 1,..,n \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,..,n; \ j = 1,..,m. \end{cases}$$

Тогда для нахождения ситуации равновесии, являющейся внутренней точкой множества стратегий, можно воспользоваться методом множителей Лагранжа. Необходимо минимизировать функции Лагранжа

$$Z_i(x_1,..,x_n) = L_i(x_1,..,x_n) - \beta_i(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - 1), \ i = 1,...,n,$$

где β_i – множители Лагранжа.

Покажем выпуклость функций Z_i. Для этого вычислим второй дифференциал:

$$d^2_{x_{ij}x_{ik}} Z_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij}\partial x_{ik}} dx_{ij}\, dx_{ik}.$$

Находим:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x_{ij}} = \lambda_i K_j \frac{\mu_j(\lambda_i x_{ij} + \Lambda_j) - \Lambda_j^2}{\mu_j(\mu_j - \Lambda_j)^2} - \beta_i,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij}\partial x_{ik}} = 0, \ j \ne k, \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij}^2} = 2\lambda_i^2 K_j \frac{(\mu_j - \Lambda_j)^2 + (\mu_j - \Lambda_j)\Lambda_j + \mu_j\lambda_i x_{ij}}{\mu_j(\mu_j - \Lambda_j)^3}.$$

Так как система функционирует в стационарном режиме ($\dfrac{\Lambda_j}{\mu_j} < 1$), то $\dfrac{\partial^2 Z_i}{\partial x_{ij}^2} > 0$ для любого $x_{ij} \in [0,1]$. Таким образом, второй дифференциал функции Z_i по переменной x_i – это положительно определенная квадратичная форма. Следовательно, функция Z_i выпукла на множестве X_i, а ее минимум определяется из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z_i}{\partial x_{ij}} = 0, i = 1,..,n; \ j = 1,..,m; \\ \dfrac{\partial Z_i}{\partial \beta_i} = 0, i = 1,..,n. \end{cases} \quad (2)$$

Для рассматриваемой СМО условия (2) представляют собой систему нелинейных уравнений по переменным x_{ij}, β_i:

$$\begin{cases} K_j \dfrac{\mu_j(\lambda_i x_{ij} + \Lambda_j) - \Lambda_j^2}{\mu_j(\mu_j - \Lambda_j)^2} = \dfrac{\beta_i}{\lambda_i}, i = 1,..,n, j = 1,..,m; \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \ i = 1,..,n. \end{cases} \quad (3)$$

Применим для решения уравнений данной системы следующий метод: суммируя уравнения по $i = 1,..,n$ и приравнивая их левые части к одной из них, получаем одно квадратное уравнение относительно Λ_j. При условии

$\dfrac{K_j}{\mu_j} = \dfrac{K_m}{\mu_m}$ $(j = 1,...,m-1)$ система принимает вид:

$$(n + C_m)\Lambda_j^2 - \mu_j(n + 1 + 2C_m)\Lambda_j + C_m\mu_j^2 = 0,$$
$$j = 1,..., m-1,$$

где $C_m = \dfrac{(n+1)\mu_m\Lambda_m - n\Lambda_m^2}{(\mu_m - \Lambda_m)^2}$. Подставляя решение этого уравнения в исходную систему (3) и определяя множители Лагранжа из условия нормировки, можно найти следующее решение:

$$x_{ij}^* = \frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j} \quad (i = 1,..,n; \ j = 1,..,m). \quad (4)$$

При этом функции потерь принимают вид:

$$L_i(x_1^*,..,x_n^*) = \\ = \lambda_i \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{\sum_{k=1}^{m}\mu_k} \sum_{j=1}^{m} \frac{K_j}{\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)} = \lambda_i \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \sum_{j=1}^{m} K_j,$$

$i = 1,..,n.$

Теперь покажем Парето-оптимальность точки $(x_1^*,..,x_n^*)$ с координатами (4), которая отражает свойства выгодности принимаемого решения. Согласно (1), рассмотрим функцию $L(x)=\sum_{i=1}^{n} L_i(x)$.

Представим $L(x)$ в виде:

$$L(x) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{x_{ij} K_j \Lambda_j}{\mu_j(\mu_j - \Lambda_j)} \right\} +$$

$$+\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\{ (1-\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}) \frac{K_m \Lambda_m}{\mu_m(\mu_m-\Lambda_m)} \right\},$$

где $x_{im} = 1-\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}$,

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\lambda_i,\ j=1,..,\ m-1,$$

$$\Lambda_m = \sum_{i=1}^{n}(1-\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij})\lambda_i.$$

Так как объединение выпуклых функций дает в результате выпуклую функцию, то функция $L(x)=\sum_{i=1}^{n} L_i(x)$ является выпуклой на множестве *X*, и её минимум определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{kl}} = 0, k=1,..,n; l=1,..,m \ .$$

Дифференцируя функцию $L(x)$ и меняя порядок суммирования, найдём:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{kl}} = \alpha \left\{ \frac{2\Lambda_l K_l \lambda_k \mu_l(\mu_l-\Lambda_l) + \Lambda_l^2 K_l \lambda_k \mu_l}{\mu_l^2(\mu_l-\Lambda_l)^2} \right\} +$$

$$+\alpha \left\{ -\frac{2\Lambda_m K_m \lambda_k \mu_m(\mu_m-\Lambda_m) + \Lambda_m^2 K_m \lambda_k \mu_m}{\mu_m^2(\mu_m-\Lambda_m)^2} \right\} =$$

$$= \alpha\lambda_k \frac{K_l}{\mu_l}\left[-1 + \frac{\mu_l^2}{(\mu_l-\Lambda_l)^2} \right] +$$

$$+\alpha\lambda_k \frac{K_m}{\mu_m}\left[1 - \frac{\mu_m^2}{(\mu_m-\Lambda_m)^2} \right],$$

$k=1,..,n; l=1,..,m-1$.

Предположим, что

$\frac{K_l}{\mu_l} = \frac{K_m}{\mu_m} = \tau\ (l=1,...,m-1)$. Тогда можно записать:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{kl}} = \alpha\lambda_k\tau \left[\frac{\mu_l^2}{(\mu_l-\Lambda_l)^2} - \frac{\mu_m^2}{(\mu_m-\Lambda_m)^2} \right]. \quad (5)$$

Выразим интенсивности объединённых потоков Λ_j через найденные значения x_{ij}^* (4) и, используя обозначения $\mu=\sum_{j=1}^{m}\mu_j$, $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$, получим:

$$\Lambda_j(x_{1j}^*,..,x_{mj}^*) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^*\lambda_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_j}{\mu}\lambda_i = \frac{\mu_j}{\mu}\lambda,\ j=1,...,m-1,$$

$$\Lambda_m(x_{1m}^*,.., x_{mm}^*) = \sum_{i=1}^{n}(1-\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}^*)\lambda_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(1-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\mu_j}{\mu})\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{m-1}\mu_j)\lambda_i =$$

$$= \left\{ \text{так как } \sum_{j=1}^{m-1}\mu_j = \mu-\mu_m \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(1-\frac{\mu-\mu_m}{\mu})\lambda_i = \frac{\mu_m}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \frac{\lambda\mu_m}{\mu}.$$

Подставляя найденные выражения в (5), получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{kl}} = \alpha\lambda_k\tau \left[\frac{\mu_l^2}{\left(\mu_l - \frac{\mu_l}{\mu}\lambda\right)^2} - \frac{\mu_m^2}{\left(\mu_m - \frac{\mu_m}{\mu}\lambda\right)^2} \right] =$$

$$= \alpha\lambda_k\tau \left[\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} - \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \right] = 0,$$

$k=1,..,n; l=1,..,m-1$.

Таким образом, точка

$$x_{ij}^* = \frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j} \qquad (i=1,...,n;\ j=1,\dots,m)$$

доставляет минимум функции $L(x)$, следовательно, является Парето-оптимальной точкой при условии

$$\frac{K_j}{\mu_j} = \frac{K_m}{\mu_m},\ j=1,..,m-1. \qquad (6)$$

Условие (6) отражает естественное предположение о том, что стоимость пребывания заявки в очереди пропорциональна скорости обслуживания.

Частный случай. В случае двулинейной СМО (m = 2) пользователь A_i с вероятностью x_i ($0 \le x_i \le 1$) направляет свои требования в очередь к 1-му прибору, а с вероятностью ($1- x_i$) – ко второму. Время обслуживания требования на каждом приборе есть случайная величина, подчиненная показательному распределению с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Потери, приходящиеся на суммарное среднее время пребывания γ в системе требований, поступивших за единицу времени:

$$L_i(x_1,...,x_n) = K_1\lambda_i x_i \mathrm{M}\{\gamma_1(x_1,...,x_n)\} +$$

$$+K_2\lambda_i(1-x_i)\mathrm{M}\{\gamma_2(x_1,...,x_n)\}\ (i=1,...,n),$$

где $\mathrm{M}\{\gamma_1(x_1,...,x_n)\}$ и $\mathrm{M}\{\gamma_2(x_1,...,x_n)\}$ – среднее время пребывания заявки в первой и второй очередях и на приборах соответственно, найденное по стационарному распределению вероятностей состояний системы, K_1 и K_2 – потери от пребывания одной заявки в очереди и на обслуживании у первого и второго приборов соответственно.

Так как в результате декомпозиции СМО образуется два простейших потока к очередям с интенсивностями $\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ и $\Lambda_2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-x_i)$ соответственно, то, используя известные результаты для однолинейных СМО с ожиданием, функционирующих в стационарном режиме, т. е. при условии:

$$\rho_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big/ \mu_1 < 1,$$

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1 - x_i) \Big/ \mu_2 < 1,$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,\dots, n$$

получим [4]:

$$\mathrm{M}\{\gamma_1(x_1,\dots, x_n)\} = \frac{1}{\mu_1(1-\rho_1)},$$

$$\mathrm{M}\{\gamma_2(x_1,\dots, x_n)\} = \frac{1}{\mu_2(1-\rho_2)}.$$

Тогда функция потерь каждого игрока принимает вид:

$$L_i(x_1,\dots,x_n) = K_1 \frac{\lambda_i x_i}{\mu_1(1-\rho_1)} + K_2 \frac{\lambda_i(1-x_i)}{\mu_2(1-\rho_2)}$$

или

$$L_i(x_1,\dots,x_n) = \frac{K_1\lambda_i x_i}{\mu_1 - \Lambda_1} + \frac{K_2\lambda_i(1-x_i)}{\mu_2 - \Lambda_2}.$$

Определим оптимальное распределение заявок по очередям как ситуацию равновесия $(x_1^*,\dots,x_n^*)$, исходя из необходимого условия экстремума. Если ситуация равновесия является внутренней точкой множества стратегий, и функции потерь $L_i(x_1^*,\dots,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,\dots,x_n^*)$ непрерывно дифференцируемы по $x_i \in X_i$, то эквивалентным определением равновесности будут условия:

$$\frac{\partial L_i(x_1^*,\dots,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,\dots,x_n^*)}{\partial x_i} = 0, \tag{7}$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$\frac{\partial^2 L_i(x_1^*,\dots,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,\dots,x_n^*)}{\partial x_i^2} \ge 0, \quad i = 1,\dots,n. \tag{8}$$

Для рассматриваемой СМО условия (7) представляют собой систему нелинейных уравнений по переменным $(x_1,\dots, x_n)$:

$$K_1 \frac{\mu_1 - \Lambda_1 + \lambda_i x_i}{(\mu_1 - \Lambda_1)^2} -$$

$$- K_2 \frac{\mu_2 - \Lambda_2 + \lambda_i (1 - x_i)}{(\mu_2 - \Lambda_2)^2} = 0, \quad i = 1,\dots, n,$$

которая сводится к одному уравнению относительно переменной Λ_1. Представляя уравнения системы в виде:

$$\lambda_i x_i = \frac{\lambda_i K_2(\mu_1 - \Lambda_1)^2 + (\mu_1 - \Lambda_1)(\mu_2 - \Lambda_2)[K_2(\mu_1 - \Lambda_1) - K_1(\mu_2 - \Lambda_2)]}{K_1(\mu_2 - \Lambda_2)^2 + K_2(\mu_1 - \Lambda_1)^2} \tag{9}$$

и суммируя их по $i = 1,\dots,n$, получим одно уравнение относительно неизвестного

Λ_1 ($\Lambda_2 = \lambda - \Lambda_1$, $\lambda = \sum \lambda_i$):

$$a\Lambda_1^3 + b\Lambda_1^2 + c\Lambda_1 + d = 0, \tag{10}$$

где $a = (K_1 + K_2)(n-1)$,

$$b = n(K_1 + K_2)(\mu_2 - \lambda - \mu_1) + n(K_1\mu_2 - K_2\mu_1 - K_1\lambda) - 2K_1(\mu_2 - \lambda) + K_2(2\mu_1 + \lambda),$$

$$c = -n(K_1 + K_2)\mu_1(\mu_2 - \lambda) + n(K_1\mu_2 - K_2\mu_1 - K_1\lambda)(\mu_2 - \lambda - \mu_1) - K_1(\mu_2 - \lambda)^2 - K_2\mu_1(\mu_1 + 2\lambda),$$

$$d = n\mu_1(\mu_2 - \lambda)(K_1\mu_2 - K_2\mu_1 - K_1\lambda) + K_2\lambda\mu_1^2.$$

Решение полученного уравнения при численных значениях его коэффициентов, а также выводы о характере его корней, можно получить с помощью известных из алгебры формул Кардано, согласно которым кубическое уравнение $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет один либо три действительных корня в зависимости от знака величины $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, где $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$, $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$.

Для рассматриваемой СМО данная величина положительна в предположении (6) о пропорциональности стоимости пребывания заявки в системе и скорости её обслуживания, которое в данном случае имеет вид: $\frac{K_1}{\mu_1} = \frac{K_2}{\mu_2}$. Следовательно, уравнение (10) имеет один действительный корень, полученный в виде:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \qquad \left(\Lambda_2 = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right).$$

Подставляя теперь полученные значения Λ_1 и Λ_2 в (9), найдем:

$$x_i = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \quad i = 1,\dots, n. \tag{11}$$

Покажем, что данное решение действительно является ситуацией равновесия. Для этого проверим выполнение условий (8). Найдем:

$$\frac{\partial^2 L_i}{\partial x_i^2} = 2\lambda_i^2 \left[K_1 \frac{\mu_1 - \Lambda_1 + \lambda_i x_i}{(\mu_1 - \Lambda_1)^3} + K_2 \frac{\mu_2 - \Lambda_2 + \lambda_i(1 - x_i)}{(\mu_2 - \Lambda_2)^3} \right].$$

Очевидно, $\frac{\partial^2 L_i}{\partial x_i^2} > 0$, так как

$$\mu_1 - \Lambda_1 > 0, \; \mu_2 - \Lambda_2 > 0.$$

Таким образом, L_i строго выпукла по своей переменной x_i. Следовательно, найденное решение (11) является единственным и представляет собой ситуацию равновесия. Каждый пользователь посылает заявку на первый прибор с одной и той же вероятностью, равной $\mu_1/(\mu_1 + \mu_2)$, а на второй прибор – с вероятностью $\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)$. При этом значения функций L_i равны:

$$L_i = \lambda_i \frac{K_1 + K_2}{\mu_1 + \mu_2 - \lambda}, \; i = 1,\dots, n.$$

Найденная ситуация равновесия (11) является также Парето-оптимальной. Это следует из того, что функция

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L_i(x)=\alpha\sum_{i=1}^{n}L_i(x)==\alpha\left[\frac{K_1\Lambda_1}{\mu_1-\Lambda_1}+\frac{K_2\Lambda_2}{\mu_2-\Lambda_2}\right]$$

достигает минимума в точке (11). Действительно, матрица Гессе функции $L(x)$ положительно определена, так как для любого $x\in X$ и любого ненулевого вектора y размерности n квадратичная форма:

$$<Hy,y>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}y_i y_j=\alpha\left[\frac{K_1(\mu_1+\Lambda_1)+\mu_1-\Lambda_1}{(\mu_1-\Lambda_1)^3}+\frac{K_2(\mu_2+\Lambda_2)+\mu_2-\Lambda_2}{(\mu_2-\Lambda_2)^3}\right]\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j y_i y_j=$$

$$=\alpha\left[\frac{K_1(\mu_1+\Lambda_1)+\mu_1-\Lambda_1}{(\mu_1-\Lambda_1)^3}+\frac{K_2(\mu_2+\Lambda_2)+\mu_2-\Lambda_2}{(\mu_2-\Lambda_2)^3}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right)^2>0.$$

Следовательно, функция $L(x)$ выпукла на множестве $X=\prod_{1}^{n}[0,1]$, а её минимум определяется из системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=-\alpha\lambda_i\left[\frac{\mu_1^2}{(\Lambda_1+\mu_1)^2}-\frac{\mu_2^2}{(\Lambda_2+\mu_2)^2}\right]=0,$$

$i=1,\ldots,n$.

Данная система сводится к одному уравнению:

$$\frac{\mu_1^2}{(\Lambda_1+\mu_1)^2}-\frac{\mu_2^2}{(\Lambda_2+\mu_2)^2}=0,$$

решение которого имеет вид:

$$\Lambda_1=\frac{\lambda\mu_1}{\mu_1+\mu_2},\quad \Lambda_2=\frac{\lambda\mu_2}{\mu_1+\mu_2}.$$

Очевидно, такие значения величин Λ_1 и Λ_2 получаются при вероятностях $x_i=\mu_1/(\mu_1+\mu_2), i=1,\ldots,n$, представляющих собой координаты ситуации равновесия. Таким образом, ситуация равновесия является Парето-оптимальной.

2. Полумарковские СМО с ожиданием

Постановка задачи [5, с. 157 – 158]. Рассмотрим СМО с m параллельно функционирующими приборами. На вход СМО поступают n независимых простейших потоков интенсивности λ_i ($i=1,\ldots,n$). Будем считать, что требования каждого потока генерируются отдельным лицом (пользователем) A_i ($i=1,\ldots,n$), с вероятностью x_{ij} ($0\le x_{ij}\le 1$, $\Sigma x_{ij}=1$) направляющим свои требования на j-й прибор. Время обслуживания – рекуррентное с первыми двумя моментами a_j, b_j ($j=1,\ldots,m$). В качестве показателя эффективности распределения заявок по очередям к приборам выберем средние потери на ожидание в очередях за единицу времени:

$$L_i(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_i\sum_{j=1}^{m}x_{ij}K_j v_j,\quad i=1,\ldots,n,$$

где $x_i=(x_{i1},\ldots,x_{im})$ – вектор вероятностей распределения заявок i-го пользователя по m очередям, v_j – среднее время ожидания заявки в j-й очереди ($j=1,\ldots,m$); K_j – стоимость единицы времени ожидания одной заявки в j-й очереди ($j=1,\ldots,m$).

На основании теоремы просеивания и объединения простейших потоков по полиномиальной схеме образуется m простейших потоков к обслуживающим приборам с интенсивностями

$$\Lambda_j=\sum\lambda_i x_{ij},\ j=\overline{1,m}.$$

Это позволяет провести декомпозицию СМО на m полумарковских однолинейных СМО. Опираясь на известные результаты для однолинейных СМО типа M/G/1/∞ [3, с. 210], получим выражения для v_j для стационарного режима функционирования СМО ($\rho=\Lambda_j a_j<1$ для всех j):

$$v_j=\frac{\Lambda_j b_j/2}{1-\rho_j}=\frac{\Lambda_j b_j}{2(1-\Lambda_j a_j)}\quad (j=1,\ldots,m).$$

Тогда

$$L_i(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_i\sum_{j=1}^{m}K_j x_{ij}\Lambda_j b_j/[2(1-\Lambda_j a_j)],$$

$$i=1,..,n,.$$

Ставится задача: найти оптимальное распределение заявок для каждого пользователя в условиях конкуренции пользователей за средства обслуживания. Рассмотрим задачу оптимизации данной СМО.

Оптимизация. Оптимальным решением бескоалиционной игры является ситуация равновесия $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$, для определения которой воспользуемся методом множителей Лагранжа. Для функций Лагранжа вида

$$Z_i(x_1,\ldots,x_n)=L_i(x_1,\ldots,x_n)-\beta_i\left(\sum_{j=1}^{m}x_{ij}-1\right)\quad (i=1,\ldots,n),$$

где β_i – множители Лагранжа, необходимые условия экстремума имеют вид (2). Для рассматриваемой СМО эти условия представляют собой систему нелинейных уравнений по переменным x_{ij}, β_i, ($i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$):

$$\frac{\lambda_i K_j b_j[\Lambda_j(1-\Lambda_j a_j)+x_{ij}\lambda_i]}{2(1-\Lambda_j a_j)^2}-\beta_i=0; \tag{12}$$

$i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m;$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}-1=0. \tag{13}$$

Суммируя уравнения (12) по $i=1,\ldots,n$ и применяя метод, использованный для решения системы (2), сведём систему (12) к следующей системе:

$$C_{0j}\Lambda_j^2+C_{1j}\Lambda_j+C_{2j}=0,\quad j=2,\ldots,m, \tag{14}$$

где $\Lambda_j=\sum\lambda_i x_{ij}$ ($j=1,\ldots,m$); C_{ij} – квадратные многочлены от Λ_1. Тем самым решение системы нелинейных уравнений сводится к нахождению корней многочлена (14), представляющих собой многочлены относительно Λ_1 с коэффициентами, зависящими от a_j, b_j, K_j ($j=1,\ldots,m$). С учетом очевидного равенства $\sum_{j=1}^{m}\Lambda_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ получим уравнение относительно

$$\Lambda_1: \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \Lambda_1 + \sum_{j=2}^{m} \Lambda_j .$$

При конкретных значениях a_j, b_j , K_j нетрудно найти (численными методами) Λ_1, решить квадратные уравнения (14) относительно Λ_j и затем найти x_{ij}^* из системы линейных уравнений:

$$\sum \lambda_i x_{ij}^* = \Lambda_j \quad (j = 1,\ldots, m).$$

Если не существует действительных решений системы (14), либо некоторые из найденных x_{ij} не принадлежат промежутку [0,1], то равновесное решение следует искать на границе множества $X = \prod_1^n [0,1]$, т. е. при некоторых x_{ij}, равных нулю либо единице и удовлетворяющих условиям (13), исследуя при этом знаки производных целевых функций в соответствующих направлениях. Проведённые на модельных примерах численные расчёты показывают, что найденные при конкретных значениях параметров СМО ситуации равновесия являются Парето-оптимальными.

В **частном случае** $m = 2$, применяя для функций:

$$L_i(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \lambda_i \left[\frac{K_1 x_i \Lambda_1 b_1}{2(1-\Lambda_1 a_1)} + \frac{K_2(1-x_i)\Lambda_2 b_2}{2(1-\Lambda_2 a_2)} \right] \quad (\Lambda_2 = \lambda - \Lambda_1)$$

необходимое условие экстремума, получаем уравнение четвертой степени относительно Λ_1 с коэффициентами, зависящими от a_j, b_j , K_j (j = 1,2) и $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Решая это уравнение при заданных значениях a_j, b_j, K_j и λ_i , можно найти интенсивности объединённых потоков Λ_1 и Λ_2, а затем оптимальные значения x_i^* из уравнений

$$\frac{\partial L_i(x_1^*,\ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,\ldots, x_n^*)}{\partial x_i} = 0,$$

$$(0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,\ldots, n),$$

разрешённых относительно $\lambda_i x_i$ (по аналогии с (9)). Оптимальность по Парето проверяется также с помощью численных расчётов и построенных по ним наглядных графических иллюстраций.

Таким образом, в данной статье рассмотрена задача оптимизации функционирования системы массового обслуживания с ожиданием с точки зрения трёх критериев: устойчивости, выгодности и справедливости принимаемых решений. Показано, что полученные решения являются равновесными и Парето-оптимальными.

Литература

1. Вилкас, Э. И. Оптимальность в играх и решениях / Э. И. Вилкас. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
2. Воробьев, Н. Н. Теория игр / Н. Н. Воробьев. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
3. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. Чекменев, В. А. Оптимизация управляемых СМО с конкурирующими потоками / В. А. Чекменев, Т. Д. Чекменева // Проблемы теоретической кибернетики: сб. мат. конф. – Горький, 1988.
5. Чекменёв, В. А. Оптимальное формирование очередей в СМО с конкурирующими потоками / В. А. Чекменев, Т. Д. Чекменева // Матем. методы иссдед. сетей связи и сетей ЭВМ: сб. мат. конф. – Минск, 1990. – 172 с.
6. Чекменев, В. А. Многокритериальная оптимизация систем обслуживания с отказами, функционирующих в условиях конкуренции входящих потоков / В. А. Чекменев, Т. Д. Чекменева // Вестник КемГУ. – 2013. – № 1.

Информация об авторах:

Чекменев Владимир Алексеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации исследований и технической кибернетики математического факультета КемГУ, 8(384-2)35-98-48, chtd42@yandex.ru.

Vladimir A. Chekmenev – Candidate of Technical Science, Associate professor, Assistant Professor at the Department of Automation of Studies and Technical Cybernetics, Kemerovo Stsate University.

Чекменева Татьяна Дмитриевна – кандидат технических наук, доцент кафедры общей и региональной экономики экономического факультета КемГУ, 8-923-612-4890.

Tatyana D. Chekmeneva – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Assistant Professor at the Department of General and Regional Economics, Kemerovo State University.