УДК 517.54: 517.862

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ПРОЕКТИРОВАНИЯ И РЯД ПУАНКАРЕ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ $(q,\rho)-$ФОРМ

О. А. Сергеева

THE INTEGRAL OPERATOR OF PROJECTION AND POINCARE SERIES FOR HOLOMORPHIC $(q,\rho)-$FORMS

O. A. Sergeeva

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-31256 мол_а.

Рассматриваются пространства интегрируемых мультипликативных автоморфных форм на плоской области D и на компактной римановой поверхности D/G, где группа G изоморфна фуксовой группе 1 рода. Исследуются оператор проектирования измеримых форм на голоморфные и оператор, задающий $\rho-$ряд Пуанкаре и переводящий формы для тривиальной группы в формы для произвольной группы G. Получены универсальные оценки норм этих операторов, формула воспроизведения, свойства самосопряженности и сюръективности.

the paper addresses the spaces of multiplicate integrable automorphic forms on the plane domain D and on the compact Riemann surface D/G, where the group G is isomorphic to Fuchsian group of the first kind. The paper investigates the operator of projection of measurable forms onto holomorphic ones and the operator determining Poincare ρ-series and translating forms for trivial group into forms for any group G. Universal estimates of norms of these operators, the reproduction formula, the self-conjugation and surjection properties were received.

Ключевые слова: мультипликативные интегрируемые автоморфные формы, оператор проектирования, ряд Пуанкаре, характеры.

Keywords: multiplicative integrable automorphic forms, operator of projection, Poincare series, characters.

1. Предварительные сведения

Пусть *D* – ограниченное открытое множество в C с не менее чем тремя граничными точками, конформно эквивалентное единичному кругу $\Delta=\{z\in C:|z|<1\}$; *G* – отмеченная конечнопорожденная разрывная группа конформных преобразований множества *D* на себя такая, что *D/G = F* – отмеченная компактная риманова поверхность рода $g\geq 2$.

Пусть $\lambda=\lambda_D$ задает метрику Пуанкаре на D по правилу: для конформного отображения $f:\Delta\to D$

$$\lambda_D(f(z))|f'(z)|=\lambda_\Delta(z),\ \ z\in\Delta,$$

где $\lambda_\Delta(z)=\dfrac{1}{1-|z|^2}-$ коэффициент метрики Пуанкаре в единичном круге Δ. Известно [1, с. 38], что для любого конформного преобразования *A* множества *D* справедливо равенство

$$\lambda_{A(D)}(Az)|A'(z)|=\lambda_D(z),\ \ z\in D.$$

Обозначим через $Hom(G,C^*)$ группу всех характеров (одномерных представлений) ρ из *G* в $C^*=C\setminus\{0\}$ с естественной операцией умножения.

Определение. Измеримой (голоморфной) мультипликативной автоморфной формой порядка *q* с характером ρ на *F* ($(q,\rho)-$формой) называется однозначная измеримая (голоморфная) функция φ на *D* с условием:

$$\varphi(Az)A'(z)^q=\rho(A)\varphi(z), A\in G, z\in D.$$

Мультипликативная автоморфная форма f нулевого порядка с характером ρ называется мультипликативной функцией для ρ. Если f_1- мультипликативная функция для ρ_1 без нулей и полюсов на *D*, то характер ρ_1 называется несущественным [2, с. 129; 3, с. 23], а сама такая функция f_1 называется мультипликативной единицей для ρ_1.

Ключевая роль в развитии мультипликативной теории измеримых автоморфных форм принадлежит разложению Фаркаша-Кра [2, с. 130; 3, с. 30]: для произвольного характера $\rho\in Hom(G,C^*)$ существует и единственно представление в виде $\rho=\rho_0\cdot\rho_1$, где ρ_0- нормированный характер, то есть $|\rho_0(A)|=1$ для любого $A\in G$, а ρ_1- несущественный характер с мультипликативной единицей f_1.

Для целого $q\geq 2$, $\rho\in Hom(G,C^*)$ и $1\leq p\in R$ рассмотрим измеримые $(q,\rho)-$ формы φ на *D* с условием

$$\|\varphi\|^p_{q,\rho,G,p}=\iint\limits_{D/G}\lambda(z)^{2-pq}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\bar z|<\infty,$$

где f_1- мультипликативная единица для несущественной составляющей ρ_1 характера ρ. Такие формы образуют банахово пространство $L^p_{q,\rho}(D,G)$ $p-$ интегрируемых $(q,\rho)-$ форм [4, с. 73].

$(q,\rho)-$Формы ψ, для которых

$$\|\psi\|_{q,\rho,\infty} = \sup_{z\in D}\left\{\lambda(z)^{-q}\left|\frac{\psi(z)}{f_1(z)}\right|\right\} < \infty,$$

образуют банахово пространство $L^\infty_{q,\rho}(D,G)$ ограниченных $(q,\rho)-$форм [4, с. 73].

При любом p голоморфные формы в $L^p_{q,\rho}(D,G)$ образуют замкнутое подпространство $A^p_{q,\rho}(D,G)$. Если *G={id}*, то в обозначениях рассматриваемых пространств символ *G* будем опускать.

Для $(q,\rho)-$ форм $\varphi\in L^p_{q,\rho}(D,G)$, $\psi\in L^{p'}_{q,\rho}(D,G)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, определено билинейное спаривание [4, с. 73]:

$$(\varphi,\psi)_{q,\rho,G} = \frac{i}{2}\iint_{D/G}\lambda(z)^{2-2q}\frac{\varphi(z)\overline{\psi(z)}}{|f_1(z)|^2}dz\wedge d\bar z.$$

2. Интегральный оператор проектирования

Рассмотрим на $D\times D$ мультипликативную функцию двух переменных

$$K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta) = K_{q,D}(z,\zeta)\,f_1(z)\overline{f_1(\zeta)}, z\in D, \zeta\in D, \quad (1)$$

однозначная составляющая которой – функция $K_{q,D}-$ также как и в классическом случае (для $\rho=1$) имеет явный вид:

$$K_{q,D}(z,\zeta) = \frac{(2q-1)\pi^{q-1}i}{2}k_D(z,\zeta)^q,$$

где $k_D(z,\zeta)-$ кернфункция Бергмана, определённая формулой $k_\Delta(z,\zeta)=\left[\pi(1-z\bar\zeta)^2\right]^{-1}, z\in\Delta, \zeta\in\Delta$ и требованием конформной инвариантности выражения $k_D(z,\zeta)dz\wedge d\bar\zeta$. Мультипликативная единица f_1 в формуле (1) отвечает за мультипликативный характер функции $K_{q,\rho_1,D}$.

С учётом известных свойств функций $K_{q,D}$ и f_1 [1, с. 64; 2, с. 129; 3, с. 23] получаем лемму.

Лемма. Мультипликативная функция $K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)$, определённая на $D\times D$ по формуле (1), голоморфна по первой координате (как функция от $z\in D$ при фиксированном $\zeta\in D$) и удовлетворяет следующим условиям:

$$K_{q,\rho_1,D}(\zeta,z) = -\overline{K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)};$$

для всех $z\in D, \zeta\in D$ и любого конформного преобразования $A\in G$ множества *D* на себя

$$K_{q,\rho_1,A(D)}(Az,A\zeta)A'(z)^q\,\overline{A'(\zeta)}^q = K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)|\rho_1(A)|^2;$$

для $z\in D$ имеет место оценка

$$\iint_D \lambda(\zeta)^{2-q}\left|\frac{K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)}{f_1(\zeta)}\right||d\zeta\wedge d\bar\zeta| \le c_q\lambda(z)^q|f_1(z)|, c_q=\frac{2q-1}{q-1};$$

для $z\in D$ и $\varphi\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$, где $1\le p\le\infty$, ρ_1- несущественный характер для *G*, справедлива формула воспроизведения:

$$\varphi(z) = \iint_D \lambda(\zeta)^{2-2q}\frac{|K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)|}{|f_1(\zeta)|^2}\varphi(\zeta)d\zeta\wedge d\bar\zeta. \quad (2)$$

Доказательство. Так как $f_1(z)$ – мультипликативная голоморфная функция для ρ_1 и при фиксированном ζ (как функция от z) $K_{q,D}(\cdot,\zeta)\in A^p_q(D)$ [1, с. 64], то функция $K_{q,\rho_1,D}(\cdot,\zeta)$ голоморфна по z как произведение двух голоморфных функций.

Первые два свойства проверяются непосредственным преобразованием:

$$K_{q,\rho_1,D}(\zeta,z) = \frac{(2q-1)\pi^{q-1}i}{2}k_D(\zeta,z)^q f_1(\zeta)\overline{f_1(z)} = -\overline{\frac{(2q-1)\pi^{q-1}i}{2}k_D(z,\zeta)^q f_1(z)\overline{f_1(\zeta)}} = -\overline{K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)}.$$

Пусть $A: D\to D$ – конформное преобразование области *D* из *G*. Тогда

$$K_{q,\rho_1,A(D)}(Az,A\zeta) = \frac{(2q-1)\pi^{q-1}i}{2}k(Az,A\zeta)^q f_1(Az)\overline{f_1(A\zeta)} =$$

$$= \frac{(2q-1)\pi^{q-1}i}{2}k(z,\zeta)^q\times$$

$$\times A'(z)^{-q}\,\overline{A'(\zeta)}^{-q} f_1(z)\rho_1(A)\overline{f_1(\zeta)\rho_1(A)} =$$

$$= K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)A'(z)^{-q}\,\overline{A'(\zeta)}^{-q}|\rho_1(A)|^2.$$

Отсюда

$$K_{q,\rho_1,A(D)}(Az,A\zeta)A'(z)^q\,\overline{A'(\zeta)}^q = K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)|\rho_1(A)|^2.$$

Свойство 3 получается из соответствующего свойства для однозначной формы $K_{q,D}(z,\zeta)$:

$$\iint_D \lambda(\zeta)^{2-q}\left|\frac{K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)}{f_1(z)f_1(\zeta)}\right||d\zeta\wedge d\bar\zeta| = \iint_D \lambda(\zeta)^{2-q}|K_{q,D}(z,\zeta)||d\zeta\wedge d\bar\zeta| \le c_q\lambda(z)^q.$$

Докажем свойство 4. Пусть $\varphi\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$. Тогда $\frac{\varphi}{f_1}\in A^p_q(D,G)$. Действительно, так как f_1- мультипликативная голоморфная функция без нулей, то $\frac{\varphi}{f_1}$ – голоморфная форма (как отношение голоморфной формы к голоморфной функции, нигде не обращающейся в нуль). Кроме того,

$$\frac{\varphi}{f_1}(Az) = \frac{\varphi(Az)}{f_1(Az)} =$$

$$= \frac{\varphi(z)A'(z)^{-q}\rho_1(A)}{f_1(z)\rho_1(A)} = \frac{\varphi}{f_1}(z)A'(z)^{-q}.$$

По свойству воспроизведения для однозначных автоморфных форм из $A_q^p(D,G)$ [1, с. 65] имеем:

$$\frac{\varphi}{f_1}(z) = \iint_D \lambda(\zeta)^{2-2q} K_{q,D}(z,\zeta)\frac{\varphi}{f_1}(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

или

$$\varphi(z) = \iint_D \lambda(\zeta)^{2-2q} \frac{K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)}{f_1(z)\overline{f_1(\zeta)}}\frac{f_1(z)}{f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} =$$

$$= \iint_D \lambda(\zeta)^{2-2q} \frac{K_{q,\rho_1,D}(z,\zeta)}{|f_1(\zeta)|^2}\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, z \in D.$$

Лемма доказана.

Замечание. Когда это не может привести к путанице, в обозначениях функций $K_{q,D}$ и $K_{q,\rho_1,D}$ будем для краткости опускать индексы *q* и *D* (или один из них).

Для измеримой мультипликативной формы φ с характером $\rho = \rho_0 \cdot \rho_1$ на *D* определим оператор $\beta_{q,\rho}$ следующим образом:

$$(\beta_{q,\rho}\varphi)(z) = \iint_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2} K_{\rho_1}(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \quad (3)$$

для всех $z \in D$, при которых интеграл абсолютно сходится. Здесь ρ_0 и ρ_1 – нормированный и несущественный характеры соответственно.

Теорема 1. Для целого $q \geq 2$ оператор $\beta_{q,\rho}$ является ограниченным линейным отображением пространства $L_{q,\rho}^p(D,G)$ в $A_{q,\rho}^p(D,G)$, $1 \leq p \leq \infty$, обладающим свойствами:

1) норма $\|\beta_{q,\rho}\| \leq c_q$, где $c_q = \frac{2q-1}{q-1}$;

2) для всех $\varphi \in L_{q,\rho}^p(D,G)$, $\psi \in L_{q,\rho}^{p'}(D,G)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, выполняется свойство самосопряженности оператора $\beta_{q,\rho}$:

$$(\beta_{q,\rho}\varphi,\psi)_{q,\rho,G} = (\varphi,\beta_{q,\rho}\psi)_{q,\rho,G}; \quad (4)$$

3) в случае несущественного характера $\rho = \rho_1$ отображение $\beta_{q,\rho}$ является проекцией пространства $L_{q,\rho_1}^p(D,G)$ на $A_{q,\rho_1}^p(D,G)$, то есть для любого $\varphi \in A_{q,\rho_1}^p(D,G)$ верно равенство $\beta_{q,\rho_1}\varphi = \varphi$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in L_{q,\rho}^p(D,G)$, где $1 \leq p < \infty$. Тогда если ω локально-конечная фундаментальная область для *G* в *D*, то имеем:

$$\|\beta_{q,\rho}\varphi\|_{q,\rho,G,p}^p = \iint_\omega \lambda(z)^{2-pq}\left|\frac{\beta_{q,\rho}\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\overline{z}| =$$

$$= \iint_\omega \frac{\lambda(z)^{2-pq}}{|f_1(z)|^p}\left|\iint_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2}K_{\rho_1}(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\right|^p |dz \wedge d\overline{z}| \leq$$

$$\leq \iint_\omega \frac{\lambda(z)^{2-pq}}{|f_1(z)|^p}\left(\iint_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2}|K_{\rho_1}(z,\zeta)||\varphi(\zeta)||d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|\right)^p |dz \wedge d\overline{z}| \leq$$

$$\leq \iint_\omega \lambda(z)^{2-pq}\left(\iint_D \lambda(\zeta)^{2-q}\frac{|K_{\rho_1}(z,\zeta)|}{|f_1(\zeta)||f_1(z)|}|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|\right)^{\frac{p}{p'}} \times$$

$$\times \left(\iint_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-q(p+1)}}{|f_1(\zeta)|^{p+1}|f_1(z)|}|K_{\rho_1}(z,\zeta)||\varphi(\zeta)|^p|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|\right)|dz \wedge d\overline{z}|.$$

Последнее неравенство получается из неравенства Гёльдера:

$$\left(\iint_D |x(\zeta)y(\zeta)|d\sigma\right)^p \leq \iint_D |x(\zeta)|^p d\sigma\left(\iint_D |y(\zeta)|^{p'}d\sigma\right)^{\frac{p}{p'}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

для случая, когда мера $d\sigma = \lambda(\zeta)^{2-q}|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|$ и функции:

$$x(\zeta) = \lambda(\zeta)^{-q}\varphi(\zeta)\frac{K_{\rho_1}(z,\zeta)^{\frac{1}{p}}}{f_1(\zeta)^{1+\frac{1}{p}}f_1(z)^{\frac{1}{p}}}, \quad y(\zeta) = \frac{K_{\rho_1}(z,\zeta)^{\frac{1}{p'}}}{f_1(\zeta)^{\frac{1}{p'}}f_1(z)^{\frac{1}{p'}}}.$$

Последовательно применяя свойство 3 леммы, свойства инвариантности функций $\lambda, K_{\rho_1}, \varphi, f_1$ и теорему Фубини для измеримых функций, получаем:

$$\left\|\beta_{q,\rho}\varphi\right\|_{q,\rho,G,p}^{p} \le c_q^{\frac{p}{p'}} \iint_{\omega} \frac{\lambda(z)^{2-q}}{|f_1(z)|}\left(\iint_{D} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q(p+1)}}{|f_1(\zeta)|^{p+1}}\left|K_{\rho_1}(z,\zeta)\right|\left|\varphi(\zeta)\right|^p\left|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\right|\right)\left|dz \wedge d\overline{z}\right| =$$

$$= c_q^{\frac{p}{p'}} \iint_{\omega} \frac{\lambda(z)^{2-q}}{|f_1(z)|}\left(\sum_{A\in G}\iint_{A^{-1}(\omega)} \frac{\lambda(A\zeta)^{2-q(p+1)}\left|A'(\zeta)\right|^{2-q(p+1)}}{|f_1(A\zeta)|^{p+1}|\rho_1(A)|^{-(p+1)}} \frac{\left|K_{\rho_1}(Az,A\zeta)\right|}{|\rho_1(A)|^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left|A'(z)\right|^q\left|A'(\zeta)\right|^q \frac{|\varphi(A\zeta)|^p|A'(\zeta)|^{qp}}{|\rho(A)|^p}\left|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\right|\right)\left|dz \wedge d\overline{z}\right| = c_q^{\frac{p}{p'}}\iint_{\omega}\frac{\lambda(z)^{2-q}}{|f_1(z)|}\sum_{A\in G}\frac{1}{|\rho_1(A)|}\times$$

$$\times\left(\iint_{A^{-1}(\omega)} \frac{\lambda(A\zeta)^{2-q(p+1)}}{|f_1(A\zeta)|^{p+1}}\left|K_{\rho_1}(Az,A\zeta)\right|\left|A'(z)\right|^q\left|\varphi(A\zeta)\right|^p\left|dA\zeta \wedge d\overline{A\zeta}\right|\right)\left|dz\wedge d\overline{z}\right| =$$

$$= c_q^{\frac{p}{p'}}\sum_{A\in G}\frac{1}{|\rho_1(A)|}\iint_{\omega}\frac{\lambda(z)^{2-q}\left|A'(z)\right|^q}{|f_1(z)|}\left(\iint_{\omega}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q(p+1)}}{|f_1(\zeta)|^{p+1}}\left|K_{\rho_1}(Az,\zeta)\right|\left|\varphi(\zeta)\right|^p\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|\right)\times$$

$$\times\left|dz\wedge d\overline{z}\right| = c_q^{\frac{p}{p'}}\sum_{A\in G}\frac{1}{|\rho_1(A)|}\iint_{\omega}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q(p+1)}}{|f_1(\zeta)|^{p+1}}\left|\varphi(\zeta)\right|^p\left(\iint_{\omega}\frac{\lambda(z)^{2-q}\left|A'(z)\right|^q}{|f_1(z)|}\left|K_{\rho_1}(Az,\zeta)\right|\left|dz\wedge d\overline{z}\right|\right)\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right| =$$

$$= c_q^{\frac{p}{p'}}\sum_{A\in G}\frac{1}{|\rho_1(A)|}\iint_{\omega}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q(p+1)}}{|f_1(\zeta)|^{p+1}}\left|\varphi(\zeta)\right|^p\left(\iint_{\omega}\frac{\lambda(Az)^{2-q}\left|A'(z)\right|^{2-q}}{|f_1(Az)||\rho_1(A)|^{-1}}\left|A'(z)\right|^q\left|K_{\rho_1}(Az,\zeta)\right|\left|dz\wedge d\overline{z}\right|\right)\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right| =$$

$$= c_q^{\frac{p}{p'}}\iint_{\omega}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q(p+1)}}{|f_1(\zeta)|^{p}}\left|\varphi(\zeta)\right|^p\left(\iint_{D}\frac{\lambda(z)^{2-q}}{|f_1(\zeta)||f_1(z)|}\left|K_{\rho_1}(\zeta,z)\right|\left|dz\wedge d\overline{z}\right|\right)\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right| \le$$

$$\le c_q^{\frac{p}{p'}+1}\iint_{\omega}\frac{\lambda(\zeta)^{2-pq}}{|f_1(\zeta)|^{p}}\left|\varphi(\zeta)\right|^p\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right| = c_q^p\left\|\varphi\right\|_{q,\rho,G,p}^p.$$

Если $p=\infty$, то также применяя свойство 3 леммы, получаем:

$$\left\|\beta_{q,\rho}\varphi\right\|_{q,\rho,\infty} = \sup_{z\in D}\left\{\frac{\lambda(z)^{-q}}{|f_1(z)|}\left|\iint_{D}\frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2}K_{\rho_1}(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|\right\} \le$$

$$\le \sup_{z\in D}\left\{\frac{\lambda(z)^{-q}}{|f_1(z)|}\iint_{D}\frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2}\left|K_{\rho_1}(z,\zeta)\right|\left|\varphi(\zeta)\right|\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|\right\} \le$$

$$\le \sup_{\zeta\in D}\left\{\frac{\lambda(\zeta)^{-q}}{|f_1(\zeta)|}\left|\varphi(\zeta)\right|\right\}\cdot\sup_{z\in D}\left\{\frac{\lambda(z)^{-q}}{|f_1(z)|}\iint_{D}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q}}{|f_1(\zeta)|}\left|K_{\rho_1}(z,\zeta)\right|\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|\right\} \le c_q\left\|\varphi\right\|_{q,\rho,\infty}.$$

Таким образом, получили, что для всех $1 \le p \le \infty$ верна оценка

$$\left\|\beta_{q,\rho}\varphi\right\|_{q,\rho,G,p} \le c_q\left\|\varphi\right\|_{q,\rho,G,p}.$$

Отсюда $\left\|\beta_{q,\rho}\right\| = \sup_{\varphi\ne 0}\dfrac{\left\|\beta_{q,\rho}\varphi\right\|}{\left\|\varphi\right\|} \le c_q$.

Поэтому по теореме Фубини $\beta_{q,\rho}\varphi$ сходится абсолютно для почти всех $z\in D$. Используя обычные свойства инвариантности можно предположить, что $D=\Delta$. При фиксированном $\zeta\in\Delta$ значение $k_\Delta(\cdot,\zeta)$ ограничено и отграничено от нуля, а $f_1(z)$ – мультипликативная голоморфная функция без нулей и полюсов. Поэтому интеграл в определении оператора $\beta_{q,\rho}$ абсолютно сходится при всех z. Так как интеграл

$$\iint_{\Delta}\frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{\rho_1}(z,\zeta)\right)\varphi(\zeta)d\zeta\wedge d\overline{\zeta}, \quad z\in D,$$

также сходится абсолютно, то форма $\beta_{q,\rho}\varphi$ голоморфна.

Пусть $\varphi \in L^p_{q,\rho}(D,G)$. Тогда для $A \in G$ и $z \in D$ в силу инвариантности множества D относительно действия группы G имеем равенства:

$$\left(\beta_{q,\rho}\varphi\right)(Az)A'(z)^q = A'(z)^q \iint_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2} K_{\rho_1}(Az,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} =$$

$$= A'(z)^q \iint_D \frac{\lambda(A\zeta_1)^{2-2q}}{\left|f_1(A\zeta_1)\right|^2} K_{\rho_1}(Az, A\zeta_1)\varphi(A\zeta_1)d(A\zeta_1) \wedge d\overline{(A\zeta_1)} =$$

$$= \iint_D \frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q}\left|A'(\zeta_1)\right|^{2q-2}}{\left|f_1(\zeta_1)\right|^2\left|\rho_1(A)\right|^2} \frac{K_{\rho_1}(z,\zeta_1)\left|\rho_1(A)\right|^2}{\overline{A'(\zeta_1)}^q} \frac{\varphi(\zeta_1)\rho(A)}{A'(\zeta_1)^q}\left|A'(\zeta_1)\right|^2 d\zeta_1 \wedge d\overline{\zeta_1} =$$

$$= \rho(A)\iint_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2} K_{\rho_1}(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \rho(A)\left(\beta_{q,\rho}\varphi\right)(z).$$

Отсюда по определению $\beta_{q,\rho}\varphi \in A^p_{q,\rho}(D,G)$. Таким образом, показали, что оператор $\beta_{q,\rho}$ является ограниченным линейным отображением пространства $L^p_{q,\rho}(D,G)$ в пространство $A^p_{q,\rho}(D,G)$ с нормой, не превосходящей c_q. Если же $\varphi \in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$, где $\rho_1 -$ несущественный характер для G, то согласно формуле воспроизведения (2) имеем $\beta_{q,\rho}\varphi = \varphi$. Следовательно, в этом случае оператор $\beta_{q,\rho}$ является ограниченной линейной проекцией пространства $L^p_{q,\rho_1}(D,G)$ на $A^p_{q,\rho_1}(D,G)$.

Доказательство свойства самосопряженности оператора $\beta_{q,\rho}$ проводится непосредственными преобразованиями, используя свойства билинейного спаривания. Пусть $\varphi \in L^p_{q,\rho}(D,G)$,

$\varphi \in L^{p'}_{q,\rho}(D,G)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$ тогда имеем:

$$\left(\beta_{q,\rho}\varphi,\psi\right)_{q,\rho,G} = \iint_\omega \frac{\lambda(z)^{2-2q}}{\left|f_1(z)\right|^2}\left(\beta_{q,\rho}\varphi\right)(z)\overline{\psi(z)}dz \wedge d\overline{z} =$$

$$= \iint_\omega \frac{\lambda(z)^{2-2q}}{\left|f_1(z)\right|^2}\left(\iint_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2} K_{\rho_1}(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\right)\overline{\psi(z)}dz \wedge d\overline{z} =$$

$$= \iint_\omega \frac{\lambda(z)^{2-2q}}{\left|f_1(z)\right|^2}\overline{\psi(z)}\left(\sum_{A\in G}\iint_{A^{-1}(\omega)} \frac{\lambda(A\zeta)^{2-2q}\left|A'(\zeta)\right|^{2-2q}}{\left|f_1(A\zeta)\right|^2\left|\rho_1(A)\right|^{-2}} \frac{K_{\rho_1}(Az,A\zeta)A'(z)^q}{\left|\rho_1(A)\right|^2} \frac{\varphi(A\zeta)\left|A'(\zeta)\right|^{2q}}{\rho(A)} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\right)$$

$$\times dz \wedge d\overline{z} = \sum_{A\in G}\frac{1}{\rho(A)}\iint_\omega \frac{\lambda(z)^{2-2q}A'(z)^q}{\left|f_1(z)\right|^2}\overline{\psi(z)}\left(\iint_\omega \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2}K_{\rho_1}(Az,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\right)dz \wedge d\overline{z} =$$

$$= \sum_{A\in G}\frac{1}{\rho(A)}\iint_\omega \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2}\varphi(\zeta)\left(\iint_\omega \frac{\lambda(z)^{2-2q}A'(z)^q}{\left|f_1(z)\right|^2}K_{\rho_1}(Az,\zeta)\overline{\psi(z)}dz \wedge d\overline{z}\right)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} =$$

$$= \sum_{A\in G}\frac{1}{\rho(A)}\iint_\omega \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2}\varphi(\zeta)\left(\iint_\omega \frac{\lambda(Az)^{2-2q}\left|A'(z)\right|^{2-2q}A'(z)^q}{\left|f_1(Az)\right|^2\left|\rho_1(A)\right|^{-2}}K_{\rho_1}(Az,\zeta)\frac{\overline{\psi(Az)}\,\overline{A'(z)}^q}{\overline{\rho(A)}}dz \wedge d\overline{z}\right)$$

$$\times d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \iint_\omega \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2}\varphi(\zeta)\left(\iint_{\bigcup\limits_{A\in G}A(\omega)} \frac{\lambda(z)^{2-2q}}{\left|f_1(z)\right|^2}K_{\rho_1}(z,\zeta)\overline{\psi(z)}dz \wedge d\overline{z}\right)d\zeta \wedge d\overline{\zeta} =$$

$$= \iint_\omega \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2}\varphi(\zeta)\overline{\left(\iint_D \frac{\lambda(z)^{2-2q}}{\left|f_1(z)\right|^2}K_{\rho_1}(\zeta,z)\psi(z)dz \wedge d\overline{z}\right)}d\zeta \wedge d\overline{\zeta} =$$

$$= \iint_\omega \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2}\varphi(\zeta)\overline{(\beta_{q,\rho}\psi)(\zeta)}d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \left(\varphi,\beta_{q,\rho}\psi\right)_{q,\rho,G}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Мультипликативный ряд Пуанкаре

Для функции φ, голоморфной на *D*, определим мультипликативный ряд Пуанкаре ($\rho-$ряд Пуанкаре) функции φ по формуле

$$\left(\Theta_{q,\rho}\varphi\right)(z)=\sum_{A\in G}\frac{\varphi(Az)A'(z)^q}{\rho(A)} \quad (5)$$

для всех *z*, для которых правая часть сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах множества *D*.

Теорема 2. Для целого $q\geq 2$ $\Theta_{q,\rho}$ является непрерывным линейным отображением пространства $A^1_{q,\rho}(D)$ в $A^1_{q,\rho}(D,G)$ с нормой $\left\|\Theta_{q,\rho}\right\|\leq 1$, а в случае несущественного характера $\rho=\rho_1$ $\Theta_{q,\rho}$ будет даже сюръективно. Кроме того, для любого $\psi\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$, где ρ_1- несущественный характер, $1\leq p\leq\infty$, существует такое $\varphi\in A^p_{q,\rho_1}(D)$, что $\psi=\Theta_{q,\rho_1}\varphi$ и $\|\varphi\|_{q,\rho_1,p}\leq c_q\|\psi\|_{q,\rho_1,G,p}$, $c_q=\dfrac{2q-1}{q-1}$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in A^1_{q,\rho}(D)$. Оценим норму:

$$\left\|\Theta_{q,\rho}\varphi\right\|_{q,\rho,G,1}=$$

$$\iint_\omega \lambda(z)^{2-q}\left|\frac{\Theta_{q,\rho}\varphi(z)}{f_1(z)}\right||dz\wedge d\bar z|=$$

$$=\iint_\omega \frac{\lambda(z)^{2-q}}{|f_1(z)|}\left|\sum_{A\in G}\frac{\varphi(Az)A'(z)^q}{\rho(A)}\right||dz\wedge d\bar z|\leq$$

$$\leq\sum_{A\in G}\iint_\omega\frac{\lambda(z)^{2-q}}{|f_1(z)|}\frac{|\varphi(Az)||A'(z)|^q}{|\rho(A)|}|dz\wedge d\bar z|=$$

$$=\sum_{A\in G}\iint_\omega\frac{\lambda(Az)^{2-q}|A'(z)|^{2-q}}{|f_1(Az)||\rho_1(A)|^{-1}}\frac{|\varphi(Az)||A'(z)|^q}{|\rho(A)|}\frac{|dAz\wedge d\overline{Az}|}{|A'(z)|^2}=$$

$$=\sum_{A\in G}\iint_{A(\omega)}\frac{\lambda(z)^{2-q}}{|f_1(z)|}|\varphi(z)||dz\wedge d\bar z|=$$

$$=\iint_D\lambda(z)^{2-q}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right||dz\wedge d\bar z|=\|\varphi\|_{q,\rho,1}<\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\left\|\Theta_{q,\rho}\right\|\leq\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\left\|\Theta_{q,\rho}\varphi\right\|}{\|\varphi\|}\leq 1.$$

Проведенные выше оценки нормы $\left\|\Theta_{q,\rho}\varphi\right\|_{q,\rho,G,1}$ показывают также, что $\rho-$ряд Пуанкаре функции φ сходится равномерно на компактных подмножествах множества *D*. Действительно, пусть ω_0- компактное подмножество фундаментальной области ω. На компакте ω_0 и локально-конечной области ω коэффициент метрики Пуанкаре λ и мультипликативная единица f_1 ограничены и отграничены от нуля. Следовательно,

$$\sum_{A\in G}\iint_{\omega_0}\frac{|\varphi(Az)||A'(z)|^q}{|\rho(A)|}|dz\wedge d\bar z|\leq$$

$$\leq\sum_{A\in G}\iint_{\omega}\frac{|\varphi(Az)||A'(z)|^q}{|\rho(A)|}|dz\wedge d\bar z|<\infty.$$

Пусть *K* – компактное подмножество в *D*. Выберем конечное число таких элементов $A_1,\ldots,A_N$ группы *G*, что $K\subset\bigcup_{j=1}^{N}A_j(\omega_0)$. Из последнего неравенства вытекает, что мультипликативный ряд Пуанкаре сходится в L^1 на $A(\omega_0)$ при любом $A\in G$ (L^1- пространство функций, интегрируемых по Лебегу). Поэтому $\rho-$ряд Пуанкаре сходится также в L^1 на *K*. А так как из L^1- сходимости голоморфных функций следует равномерная сходимость на компакте *K* из *D*, то заключаем, что $\Theta_{q,\rho}\varphi$ будет голоморфна в *D*.

Для доказательства принадлежности $\Theta_{q,\rho}\varphi\in A^1_{q,\rho}(D,G)$, осталось показать, что это $(q,\rho)-$форма для *G* на *D*. Пусть $B\in G, z\in D.$ Тогда имеем:

$$\left(\Theta_{q,\rho}\varphi\right)(Bz)B'(z)^q=$$

$$=\sum_{A\in G}\frac{\varphi\left(A(Bz)\right)A'(Bz)^q B'(z)^q}{\rho(A)}=$$

$$=\sum_{A\in G}\frac{\varphi\left(ABz\right)(AB)'(z)^q}{\rho(AB)\rho(B)^{-1}}=$$

$$=\sum_{A\in G}\frac{\varphi(Az)A'(z)^q}{\rho(A)}\rho(B)=\left(\Theta_{q,\rho}\varphi\right)(z)\rho(B).$$

Следовательно, $\Theta_{q,\rho}\varphi-$это $(q,\rho)-$форма на D.

Пусть теперь $\rho=\rho_1-$ несущественный характер. Чтобы доказать сюръективность отображения Θ_{q,ρ_1} и что любая форма $\psi\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$ является $\rho-$ рядом Пуанкаре некоторой функции $\varphi\in A^p_{q,\rho_1}(D)$, рассмотрим характеристическую функцию χ фундаментальной области ω. Для любой формы $\mu\in L^p_{q,\rho_1}(D,G)$ имеем:

$\beta_{q,\rho_1}\mu=\Theta_{q,\rho_1}\left(\beta_{q,\rho_1}(\chi\mu)\right)$, где

$\beta_{q,\rho_1}\mu\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$,

$\chi\mu\in L^p_{q,\rho_1}(D), \beta_{q,\rho_1}(\chi\mu)\in A^p_{q,\rho_1}(D)$.

Из сюръективности отображения β_{q,ρ_1} в случае несущественного характера для любого $\psi\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$ существует такой

$\mu \in L^p_{q,\rho_1}(D,G),$ что $\beta_{q,\rho_1}\mu = \psi.$ Следовательно, существует также $\varphi = \beta_{q,\rho_1}(\chi\mu) \in A^p_{q,\rho_1}(D)$ такой, что $\Theta_{q,\rho_1}\varphi = \psi$ и сюръективность отображения Θ_{q,ρ_1} доказана.

Используя оценку $\|\beta_{q,\rho}\mu\|_{q,\rho,G,p} \le c_q \|\mu\|_{q,\rho,G,p}$ и тождественность оператора β_{q,ρ_1} на голоморфных формах из $A^p_{q,\rho_1}(D,G),$ получаем:

$$\|\varphi\|_{q,\rho_1,p} = \|\beta_{q,\rho_1}(\chi\mu)\|_{q,\rho_1,p} \le \|\beta_{q,\rho_1}\mu\|_{q,\rho_1,G,p} =$$
$$= \|\beta_{q,\rho_1}(\beta_{q,\rho_1}\mu)\|_{q,\rho_1,G,p} \le$$
$$\le c_q \|\beta_{q,\rho_1}\mu\|_{q,\rho_1,G,p} = c_q \|\psi\|_{q,\rho_1,G,p}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, отображение $\Theta_{q,\rho}$ позволяет также однозначной голоморфной функции $(q = 0, \rho = 1)$ на D поставить в соответствие мультипликативную голоморфную (q, ρ) – форму относительно группы $G \ne id$.

Литература

1. Кра, И. Автоморфные формы и клейновы группы / И. Кра – М.: Мир, 1975.
2. Farcas, H. M. Riemann Surfaces / H. M. Farcas, I. Kra // Graduate Texts in Mathematics. – Vol. 71. – New York: Springer-Verlag, 1992.
3. Чуешев, В. В. Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности / В. В. Чуешев. – Кемерово, 2003. – Ч. 2.
4. Сергеева, О. А. Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм / О. А. Сергеева // Вестник НГУ. – 2005. – Т. 5. – Вып. 4.

Информация об авторе:

Сергеева Ольга Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа КемГУ, 8-904-375-52-23, 8(384-2)54-33-90, okoin@yandex.ru.

Olga A. Sergeeva – Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor at the Department of Mathematical Analysis, Kemerovo State University.