УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ

О. В. Малышенко, А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин

SOLVABILITY OF MULTIDIMENSIONAL EQUATIONS OF A BINARY MIXTURE BAROTROPIC STEADY FLOW

O. V. Malyshenko, A. E. Mamontov, D. A. Prokudin

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00447).

Рассматриваются уравнения, описывающие трехмерные стационарные баротропные движения бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей с различными показателями адиабаты компонент. Доказана теорема существования для краевой задачи, соответствующей течениям в ограниченной области, в классе слабых обобщенных решений. Приводится обобщение коммуникативного свойства эффективных вязких потоков составляющих смеси.

The equations of three-dimensional steady barotropic motions of binary mixtures of viscous compressible fluids with different adiabatic constants are considered. Existence theorem for the boundary value problem that corresponds to flows in a bounded domain is proved within the class of weak solutions. Generalization of communicative property of effective viscous fluxes for mixtures is given.

Ключевые слова: краевая задача, динамика смесей, уравнения Навье-Стокса, слабые решения.

Keywords: boundary value problem, dynamics of mixtures, Navier-Stokes equations, weak solutions.

В данной работе рассматривается математическая модель динамики бинарной смеси вязких сжимаемых жидкостей (газов), которая основана на подходе предложенном в [1, 2] и является обобщением известной модели Навье-Стокса. Нелокальные результаты для многомерных уравнений стационарных баротропных течений смесей получены на сегодняшний день в случае, когда показатели адиабаты составляющих смеси одинаковы [3, с. 32 – 38]. Модифицируя подходы, используемые в [3] при получении «глобальных» (не зависящих от входных данных задачи) априорных оценок, удается установить свойство слабой компактности последовательности приближенных решений для более полной ситемы уравнений динамики смеси, в случае, когда показатели адиабаты могут быть различными и доказать теорему существования для краевой задачи, соответствующей стационарным течениям в ограниченной области, в классе слабых обобщенных решений. Более простые модели (в приближении Стокса и квазистационарные модели) с позиции существования решений изучены в более ранних работах [4, с. 1259 – 1281; 5, с. 527 – 541; 6, с. 319 – 345]. Методология, применяемая в данной работе, основана на опыте исследований уравнений Навье-Стокса сжимаемых вязких жидкостей [7 – 11]. В частности, существенное значение имеет использование аналогов так называемого эффективного вязкого давления [7; 12, с. 358 – 392], для которых удается доказать обобщение коммуникативных соотношений для слабых пределов.

1. Постановка задачи и основной результат

Предполагается, что бинарная смесь вязких сжимаемых жидкостей (газов) заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ евклидова пространства точек $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$ с границей $\partial\Omega \in C^2$, и состояние смеси в изотермическом случае характеризуется распределением плотностей $\rho_i(\boldsymbol{x})$, давлений $p_i(\boldsymbol{x})$ и полями скоростей $\boldsymbol{u}^{(i)}(\boldsymbol{x})$ ее составляющих ($i = 1, 2$). Эти величины удовлетворяют следующим уравнениям [1 – 2]:

$$\operatorname{div}\left(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)}\right) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1,2, \tag{1.1a}$$

$$\operatorname{div}\left(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}\right) + \nabla p_i = \operatorname{div}\mathbb{P}^{(i)} + \boldsymbol{J}^{(i)} + \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)} \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1,2. \tag{1.1b}$$

Уравнения (1.1a) выражают законы сохранения масс компонент смеси, а уравнения (1.1b) – законы сохранения импульсов. Тензоры вязких напряжений $\mathbb{P}^{(i)}$, $i = 1,2$ определяются равенствами [1 – 2]:

$$\mathbb{P}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2} (2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}^{(j)}) + \lambda_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(j)}\mathbb{I}), \; i = 1,2, \tag{1.1c}$$

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\left(\nabla \otimes \boldsymbol{u}\right) + (\nabla \otimes \boldsymbol{u})^T\right),$$

в которых на коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij}, $i, j = 1,2$ налагаются следующие ограничения:

$$\mu_{11} > 0, \quad 4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0,$$
$$\nu_{11} > 0, \quad \nu_{12} = 0, \quad 4\nu_{11}\nu_{22} - (\nu_{12} + \nu_{21})^2 > 0, \tag{1.1d}$$
$$\nu_{ij} = \lambda_{ij} + 2\mu_{ij}, i, j = 1,2.$$

Предполагается, что давление p_i i-й составляющей смеси и векторы $\boldsymbol{J}^{(i)}$, $i = 1,2$, отражающие интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, выражаются посредством формул [2]:

$$p_i = K_i \rho_i^{\gamma_i}, \; K_i > 0, \; \gamma_i > 1, \; i = 1,2,$$
$$\boldsymbol{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(1)}), \quad a > 0, \quad i = 1,2. \tag{1.1e}$$

Массовые силы $\boldsymbol{f}^{(i)}$, $i=1,2$ считаются заданными гладкими векторными полями, а величины λ_{ij}, μ_{ij}, γ_i, K_i, a – заданными константами. Уравнения (1.1a), (1.1b) дополним краевыми условиями

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \qquad (1.1f)$$

которые означают, что граница области течения является неподвижной твердой стенкой. К уравнениям и граничным условиям необходимо добавить условия для плотностей, в качестве которых примем

$$\int_\Omega \rho_i \, d\boldsymbol{x} = M_i, i=1,2, \qquad (1.1g)$$

где M_i – заданные положительные постоянные. Отметим, что из (1.1d) следует неравенство (для любых векторных полей $\boldsymbol{u}^{(i)} \in W_2^1(\Omega)$, исчезающих на $\partial\Omega$)

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega L_{ij}\boldsymbol{u}^{(j)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} \geq C_0 \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left|\nabla \boldsymbol{u}^{(i)}\right|^2 d\boldsymbol{x}, \qquad (1.2)$$

где

$$\operatorname{div} \mathbb{P}^{(i)} = -\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\boldsymbol{u}^{(j)}, \qquad i, j = 1, 2,$$

$$L_{ij} = -\mu_{ij}\Delta - (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla \operatorname{div},$$

а $C_0 > 0$ – постоянная (зависящая от λ_{ij} и μ_{ij}).

В работе используются общепринятые (например, [13-14]) обозначения функциональных пространств: $L_p(\Omega)$ $(W_p^l(\Omega))$ – пространство функций, интегрируемых со степенью $p \geq 1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l \geq 0$). $C^l(\overline{\Omega})$ ($C_0^l(\Omega)$) – банахово пространство функций, обладающих непрерывными частными производными до порядка $l \geq 0$ включительно в $\overline{\Omega}$ (с компактными носителями, лежащими в Ω). Мы не различаем обозначения пространств вектор-функций и скалярных функций.

Определение 1.1. *Обобщенным решением краевой задачи* (1.1) *называются неотрицательные функции* $\rho_i \in L_{2\gamma_i}(\Omega)$, $\int_\Omega \rho_i d\boldsymbol{x} = M_i$, $i=1,2$ *и векторные поля* $\boldsymbol{u}^{(i)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $i=1,2$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

1) для любых дифференцируемых функций G_i *с ограниченными производными* $G_i' \in C(\mathbb{R})$, $i=1,2$ *и произвольных функций* $\psi_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i=1,2$ *выполняются интегральные тождества:*

$$\int_\Omega \left(G_i(\rho_i)\boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i + \left(G_i(\rho_i) - G'_i(\rho_i)\rho_i\right)\psi_i \operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)} \right) d\boldsymbol{x} = 0,$$

$i=1,2;$

2) для любых векторных полей $\boldsymbol{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$, $i=1,2$ *выполняются интегральные тождества:*

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\begin{array}{l} \mu_{ij} \int_\Omega (\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(j)}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}^{(i)}) \, d\boldsymbol{x} + \\ +(\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(j)} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} \end{array} \right) -$$

$$-\int_\Omega (\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}^{(i)}) \, d\boldsymbol{x} =$$

$$= K_i \int_\Omega \rho_i^{\gamma_i} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int_\Omega (\boldsymbol{J}^{(i)} + \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)}) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2.$$

Основной результат работы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2. *Для любых* $\boldsymbol{f}^{(i)} \in C(\overline{\Omega})$, $\gamma_i > 3$, $i=1,2$ *краевая задача* (1.1) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

Обобщенное решение задачи (1.1) будет получено как предел однопараметрического (с параметром $\varepsilon \in (0,1]$) семейства решений следующей вспомогательной задачи:

$$-\varepsilon\Delta\rho_i + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)}) + \varepsilon\rho_i = \varepsilon \frac{M_i}{|\Omega|} \text{ в } \Omega, \quad i=1,2, \qquad (1.3a)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\boldsymbol{u}^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\rho_i (\boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^{(i)} + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{P}^{(i)} + \boldsymbol{J}^{(i)} + \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)}$$

$$\text{в } \Omega, \quad i=1,2, \qquad (1.3b)$$

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \qquad (1.3c)$$

$$\nabla\rho_i \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \qquad (1.3d)$$

$$\int_\Omega \rho_i \, d\boldsymbol{x} = M_i, \quad i=1,2, \qquad (1.3e)$$

где $|\Omega| = \operatorname{meas}(\Omega)$, $\boldsymbol{n}$ – вектор единичной внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω.

2. Существование сильного обобщенного решения задачи (1.3)

Определение 2.1. *Сильным обобщенным решением задачи* (1.3) *называются неотрицательные функции* ρ_i^ε, $i=1,2$ *и векторные поля* $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i=1,2$, *принадлежащие пространству* $W_q^2(\Omega)$, $q \in [1,+\infty)$ *такие, что уравнения* (1.3a), (1.3b) *выполнены п.в. в* Ω, *п. в. на* $\partial\Omega$ – *краевые условия* (1.3c), (1.3d), *и выполнено* (1.3e).

Теорема 2.2. *Пусть вектор-функции* $\boldsymbol{f}^{(i)}$, $i=1,2$, *показатели* γ_i, $i=1,2$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1]$ *краевая задача* (1.3) *имеет по крайней мере одно сильное обобщенное решение* ρ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i=1,2$, *причем всякое решение этой задачи удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\| \rho_i^\varepsilon \|_{L_{2\gamma_i}(\Omega)} + \| \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + \| \varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon \|_{L_{\frac{6\gamma_i}{\gamma_i+3}}(\Omega)} \right) \leq C, \qquad (2.1)$$

где положительная величина C *зависит только от* $\left\{ \left\| \boldsymbol{f}^{(i)} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \right\}$, $\{\lambda_{ij}\}$, $\{\mu_{ij}\}$, $\{\gamma_i\}$, $\{K_i\}$, Ω, a, $\{M_i\}$ (*а значит не зависит от параметра* ε).

Условимся, что далее через C будут обозначаться различные постоянные, которые могут зависеть только от перечисленных выше данных задачи (но не зависят от параметра ε).

Доказательство существования сильного решения задачи (1.3) проводится с помощью принципа неподвижной точки Лере-Шаудера [15, с. 258] аналогично доказательству подобного утверждения в работе [3, с. 32 – 38] и отличается лишь техническими деталями. Покажем, что имеет место оценка (2.1). Умножая обе части уравнений (1.3b) скалярно на $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $i=1,2$ и интегрируя по частям, получим после суммирования по i от 1 до 2 неравенство:

$$C_0\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega |\nabla\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i\,|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2 d\boldsymbol{x}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}M_i\int_\Omega|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x}+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\frac{K_i\gamma_i}{\gamma_i-1}\int_\Omega\rho_i^{\gamma_i}d\boldsymbol{x}+ \tag{2.2}$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}K_i\gamma_i\int_\Omega\rho_i^{\gamma_i-2}|\nabla\rho_i|^2\,d\boldsymbol{x}+a\int_\Omega|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}|^2\,d\boldsymbol{x}\le$$
$$\le\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}\frac{K_iM_i\gamma_i}{\gamma_i-1}\int_\Omega\rho_i^{\gamma_i-1}d\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i\,\boldsymbol{f}^{(i)}\cdot\boldsymbol{u}^{(i)}d\boldsymbol{x}.$$

В силу ограниченности вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$ из (2.2) следует оценка

$$\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\le C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^2_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}+C\,. \tag{2.3}$$

Используя неравенства (справедливые в силу соотношений (1.3e))

$$\|\rho_i\|^2_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}\le C\|\rho_i\|^{\frac{2\gamma_i}{3(2\gamma_i-1)}}_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}+C,\quad i=1,2, \tag{2.4}$$

получаем из (2.3) оценку

$$\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\le C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\frac{2\gamma_i}{3(2\gamma_i-1)}}_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}+C. \tag{2.5}$$

Для вывода других оценок решений задачи (1.3) воспользуемся оператором Боговского, обладающего свойствами [16, с. 5 – 40]:

1) $\boldsymbol{v}=B[g]$ – решение задачи

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=g\quad\text{в}\quad\Omega,\quad\boldsymbol{v}=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega,$$

где $g\in L_2(\Omega):\ \int_\Omega g\,d\boldsymbol{x}=0;$

2) имеет место оценка

$$\|B[g]\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\le C\|g\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Возьмем в качестве пробных функций в слабой формулировке уравнений (1.3b) функции $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}=B[g_i]$, где $g_i=\rho_i^{\gamma_i}-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\rho_i^{\gamma_i}\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,2.$

Используя свойство (2.6), получим неравенство:

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma_i}_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}\le C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma_i\frac{2\gamma_i-3}{2\gamma_i-1}}_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}+$$
$$+C\left(\sum_{j=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(j)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\right)\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}+ \tag{2.7}$$
$$+C\left(\sum_{j=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(j)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\right)+C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}+C.$$

Из (2.5), (2.7) вытекает соотношение:

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma_i}_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}\le$$
$$\le C\left(\sum_{j=1}^{2}\|\rho_j\|^{\frac{2\gamma_j}{3(2\gamma_j-1)}}_{L_{2\gamma_j}(\Omega)}\right)\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}+ \tag{2.8}$$
$$+C\left(\sum_{j=1}^{2}\|\rho_j\|^{\frac{2\gamma_j}{3(2\gamma_j-1)}}_{L_{2\gamma_j}(\Omega)}\right)+C.$$

Из этого соотношения в свою очередь следует, что

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma_i}_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}\le C\|\rho_1\|^{\frac{6\gamma_2-3}{6\gamma_2-5}}_{L_{2\gamma_1}(\Omega)}+ \tag{2.9}$$
$$+C\|\rho_2\|^{\frac{6\gamma_1-3}{6\gamma_1-5}}_{L_{2\gamma_2}(\Omega)}+C\,.$$

Так как верны неравенства:

$$\gamma_i>\frac{6\gamma_j-3}{6\gamma_j-5},\quad i,j=1,2,\quad i\ne j,$$

то из (2.9) получаем первую оценку решений семейства краевых задач (1.3)

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L_{2\gamma_i}(\Omega)}\le C. \tag{2.10}$$

Из оценок (2.5), (2.10) и соотношений [7, с. 87]

$$\|\varepsilon\nabla\rho_i\|_{L_{\frac{6\gamma_i}{\gamma_i+3}}(\Omega)}\le C\left(1+\|\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{L_{\frac{6\gamma_i}{\gamma_i+3}}(\Omega)}\right),\ i=1,2\,,$$

следует неравенство (2.1).

3. Предельный переход

В силу оценки (2.1) из семейства решений ρ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i=1,2$ можно извлечь последовательность (за которой сохраним прежние обозначения) такую, что при $\varepsilon\to0$

$$\rho_i^\varepsilon\to\rho_i\ \text{слабо в}\ L_{2\gamma_i}(\Omega),\quad i=1,2, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\to\boldsymbol{u}^{(i)}\ \text{слабо в}\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\quad i=1,2, \tag{3.2}$$

и, следовательно, (в силу компактности вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, $1\le p<6$)

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\to\boldsymbol{u}^{(i)}\ \text{сильно в}\ L_{p_i}(\Omega),\ 1\le p_i<6,\quad i=1,2. \tag{3.3}$$

Кроме того, в силу (2.1) из уравнений (1.3a) получаем

$$\|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\to0\ \text{при}\ \varepsilon\to0,\quad i=1,2. \tag{3.4}$$

Учитывая теперь оценку (2.1) и используя интерполяционные неравенства

$$\left\|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\right\|_{L_{q_i}(\Omega)} \le C\left\|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}^{\theta_i}\left\|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\right\|_{L_{\frac{6\gamma_i}{\gamma_i+3}}(\Omega)}^{1-\theta_i},$$

$$\frac{1}{q_i} = \frac{\theta_i}{2} + \frac{1-\theta_i}{s_i}, \quad s_i = \frac{6\gamma_i}{\gamma_i+3} > 2,$$

$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1,2,$$

получаем, что $\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon \to 0$ сильно в $L_{q_i}(\Omega)$,

$$1 \le q_i < \frac{6\gamma_i}{\gamma_i+3}, \quad i = 1,2. \tag{3.5}$$

Совершая предельный переход в слабом смысле в уравнениях (1.3), получим, что предельные функции $\rho_i \in L_{2\gamma_i}(\Omega)$, $\rho_i \ge 0$, $\boldsymbol{u}^{(i)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $i = 1,2$ при $\gamma_i > 3$, $i = 1,2$ удовлетворяют интегральным соотношениям

$$\int_\Omega \rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\, \psi_i \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad i = 1,2, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} \mu_{ij}\int_\Omega (\nabla\otimes\boldsymbol{u}^{(j)}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}^{(i)})\, d\boldsymbol{x} + \\ +(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}^{(j)}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\, d\boldsymbol{x} \end{pmatrix} -$$

$$-\int_\Omega (\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}^{(i)})\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= K_i\int_\Omega \overline{\rho_i^{\gamma_i}}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\, d\boldsymbol{x} + \tag{3.7}$$

$$+\int_\Omega (\boldsymbol{J}^{(i)} + \rho_i\boldsymbol{f}^{(i)})\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$i = 1,2,$$

где $\overline{\rho_i^{\gamma_i}}$ обозначают слабые пределы последовательностей $\left(\rho_i^\varepsilon\right)^{\gamma_i}$, $i = 1,2$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Кроме того, отметим, что предельные функции удовлетворяют условию 2) определения 1.1 и справедливы соотношения [3, с. 36]:

$$\int_\Omega \rho_i \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}^{(i)} d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1,2, \tag{3.8}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega \rho_i^\varepsilon \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} d\boldsymbol{x} \le 0, \quad i = 1,2. \tag{3.9}$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 1.2 требуется, таким образом, доказать формулу

$$\overline{\rho_i^{\gamma_i}} = \rho_i^{\gamma_i}, \quad i = 1,2. \tag{3.10}$$

Как и в работах [3], [7], [12], доказательство соотношений (3.10) основывается на коммуникативном свойстве эффективных вязких потоков компонент смеси

$$K_i\rho_i^{\gamma_i} - \nu_{i1}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}^{(1)} - \nu_{i2}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}^{(2)}, \quad i = 1,2,$$

для которых получено обобщение коммуникативных соотношений для слабых пределов, сформулированое в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть* ρ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1,2$ *– последовательность решений задачи* (1.3)*, существование которых гарантируется теоремой* 2.2, *а* ρ_i, $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $i = 1,2$ *– ее предел, определенный в* (3.1)*,* (3.2)*. Пусть* $\eta^\varepsilon \to \overline{\eta}$ *при* $\varepsilon \to 0$ *слабо в*

$$L_t(\Omega), \quad t > \max\left\{\frac{6\gamma_i}{4\gamma_i - 3}\right\}_{i=1}^2.$$

Тогда при выполнении условий теоремы 1.1 *имеют место соотношения*:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega \eta^\varepsilon\left[K_i\left(\rho_i^\varepsilon\right)^{\gamma_i} - \nu_{i1}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} - \nu_{i2}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}\right]\tau^2 d\mathrm{x} =$$

$$= \int_\Omega \overline{\eta}\left[K_i\overline{\rho_i^{\gamma_i}} - \nu_{i1}\mathrm{div}\boldsymbol{u}^{(1)} - \nu_{i2}\mathrm{div}\boldsymbol{u}^{(2)}\right]\tau^2 d\mathrm{x} \tag{3.11}$$

$$\forall\, \tau \in C_0^\infty(\Omega), \quad i = 1,2.$$

Доказательство. Перепишем уравнения (1.3b) в виде:

$$\sum_{j=1}^2 L_{ij}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(j)} + K_i\nabla\left(\rho_i^\varepsilon\right)^{\gamma_i} = \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon^{(i)},\ i = 1,2,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon^{(i)} = -\varepsilon\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} - \mathrm{div}(\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}) + \tag{3.12}$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}) - \frac{1}{2}(\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} +$$

$$+\boldsymbol{J}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon\boldsymbol{f}^{(i)},\ i = 1,2.$$

Возьмем в качестве тестовых функций в слабой формулировке уравнений (3.12) функции

$$\boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \nabla\left(\tau\Delta^{-1}\left(\left(\eta^\varepsilon - \overline{\eta}\right)\tau\right)\right),\ i = 1,2, \quad \tau \in C_0^\infty(\Omega),$$

$\eta^\varepsilon \to \overline{\eta}$ при $\varepsilon \to 0$ слабо *в* $L_t(\Omega)$, получим (продолжая рассматриваемые функции нулем в $\mathrm{R}^3\backslash\Omega$):

$$\int_\Omega \eta^\varepsilon\left[K_i\left(\rho_i^\varepsilon\right)^{\gamma_i} - \nu_{i1}\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} - \nu_{i2}\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}\right]\tau^2 d\boldsymbol{x} =$$

$$= \int_\Omega \overline{\eta}\left[K_i\left(\rho_i^\varepsilon\right)^{\gamma_i} - \nu_{i1}\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} - \nu_{i2}\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}\right]\tau^2 d\boldsymbol{x} - \tag{3.13}$$

$$-\int_\Omega \rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} : \left(\tau\,\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}\left(\left(\eta^\varepsilon - \overline{\eta}\right)\tau\right)\right)d\boldsymbol{x} +$$

$$+\int_\Omega \tilde{\Phi}_i^\varepsilon d\boldsymbol{x},\ i = 1,2,$$

где нетрудно показать в силу (2.1), (3.1), (3.3) и (3.5), что $\int_\Omega \tilde{\Phi}_i^\varepsilon d\boldsymbol{x} \to 0$ при

$$\varepsilon \to 0,\ t > \max\left\{\frac{6\gamma_i}{4\gamma_i - 3}\right\}_{i=1}^2, \quad i = 1,2.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (3.13). Умножим обе части уравнений (1.3a) на функцию τ, а затем подействуем на результат (продолжая рассматриваемые функции нулем в $\mathrm{R}^3\backslash\Omega$) оператором $\left(\eta^\varepsilon - \overline{\eta}\right)\tau\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla\Delta^{-1},\ i = 1,2,$ и тогда после интегрирования по области Ω получим соотношения:

$$\int_\Omega \left(\eta^\varepsilon - \overline{\eta}\right)\tau\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\left(\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}\left(\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\tau\right)\right)d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \tilde{\tilde{\Phi}}_i^\varepsilon d\boldsymbol{x}, \tag{3.14}$$

$i = 1,2,$

где $\int_\Omega \tilde{\tilde{\Phi}}_i^\varepsilon d\boldsymbol{x} \to 0$ при $\varepsilon \to 0, t > \frac{3}{2}, i = 1,2$ (в силу (2.1), (3.1), (3.3) и (3.5)). Таким образом,

$$\int_\Omega \rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} : \left(\tau\,\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}\left(\left(\eta^\varepsilon - \overline{\eta}\right)\tau\right)\right) d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{k,s=1}^{3} \int_\Omega \left(u_\varepsilon^{(i)}\right)_k \left[\rho_i^\varepsilon \left(u_\varepsilon^{(i)}\right)_s \tau \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s}\Delta^{-1}\left(\left(\eta^\varepsilon - \overline{\eta}\right)\tau\right) - \right.$$

$$\left. -\left(\eta^\varepsilon - \overline{\eta}\right)\tau \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s}\Delta^{-1}\left(\rho_i^\varepsilon \left(u_\varepsilon^{(i)}\right)_s \tau\right)\right] d\boldsymbol{x} + \tag{3.15}$$

$$+\int_\Omega \tilde{\tilde{\Phi}}_i^\varepsilon d\boldsymbol{x} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, t > \max\left\{\frac{6\gamma_i}{4\gamma_i - 3}\right\}_{i=1}^{2}, \quad i = 1,2,$$

т. к. если $a_\varepsilon \to a$ слабо в $L_p(\Omega)$, $b_\varepsilon \to b$ слабо в $L_q(\Omega)$, то

$$a_\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s}\Delta^{-1} b_\varepsilon - b_\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s}\Delta^{-1} a_\varepsilon \to$$

$$\to a\ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s}\Delta^{-1} b\ - b\ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s}\Delta^{-1} a\ ,\ k, s = 1, 2, 3$$

слабо в $L_r(\Omega)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$. В итоге, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в обеих частях (3.13) с учетом (3.15) приходим к соотношениям (3.11). Теорема 3.1 доказана.

Перейдем к доказательству соотношений (3.10). Отметим сначала, что формула (3.11) с $i = 1$, $\eta^\varepsilon = \rho_1^\varepsilon \to \rho_1 = \overline{\eta}$ при $\varepsilon \to 0$ слабо в $L_{2\gamma_1}(\Omega)$ и условие $\nu_{12} = 0$ позволяют утверждать, что $\forall\, \tau \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \rho_1^\varepsilon \left[K_1\left(\rho_1^\varepsilon\right)^{\gamma_1} - \nu_{11}\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\right]\tau^2 d\mathrm{x} =$$

$$= \int_\Omega \rho_1 \left[K_1 \overline{\rho_1^{\gamma_1}} - \nu_{11}\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}^{(1)}\right]\tau^2 d\mathrm{x}. \tag{3.16}$$

Возьмем неубывающую последовательность функций τ_n такую, что $\tau_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \tau_n \le 1$, $\tau_n \to 1$ поточечно при $n \to \infty$. В силу (3.8), (3.9) и (3.16) для любых $m \le n$ получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+} \int_\Omega \rho_1^\varepsilon K_1\left(\rho_1^\varepsilon\right)^{\gamma_1}\tau_m^2\ d\boldsymbol{x} \le$$

$$\le \limsup_{\varepsilon\to 0+} \int_\Omega \rho_1^\varepsilon K_1\left(\rho_1^\varepsilon\right)^{\gamma_1}\tau_n^2\ d\boldsymbol{x} \le \tag{3.17}$$

$$\le \int_\Omega \rho_1 K_1 \overline{\rho_1^{\gamma_1}} d\boldsymbol{x} + \vartheta(n),$$

где $\vartheta(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (3.17) (в результате предельного перехода при $n \to \infty$) следуют неравенство

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+} \int_\Omega \rho_1^\varepsilon \left(\rho_1^\varepsilon\right)^{\gamma_1}\tau_m^2\ d\boldsymbol{x} \le$$

$$\le \int_\Omega \rho_1\ \overline{\rho_1^{\gamma_1}} d\boldsymbol{x}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.18}$$

Далее, так как функция $z \mapsto z^{\gamma_1}$, $\gamma_1 > 1$ монотонна на $\mathbb{R}_0^+$, то

$$\int_\Omega \left(\left(\rho_1^\varepsilon\right)^{\gamma_1} - \nu^{\gamma_1}\right)\cdot\left(\rho_1^\varepsilon - \nu\right)\tau_m^2\ d\boldsymbol{x} \ge 0, \quad \text{п.в. в } \Omega \tag{3.19}$$

$\forall\, \nu \in L_{2\gamma_1}(\Omega), \quad \nu \ge 0$

и, следовательно,

$$\int_\Omega \rho_1^\varepsilon\left(\rho_1^\varepsilon\right)^{\gamma_1}\tau_m^2\ d\boldsymbol{x} \ge \int_\Omega \nu^{\gamma_1}\left(\rho_1^\varepsilon - \nu\right)\tau_m^2\ d\boldsymbol{x} +$$

$$+\int_\Omega \left(\rho_1^\varepsilon\right)^{\gamma_1}\nu\tau_m^2\ d\boldsymbol{x}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.20}$$

Из (3.18), (3.20) очевидно следуют неравенство:

$$\int_\Omega \rho_1\ \overline{\rho_1^{\gamma_1}} d\boldsymbol{x} \ge \int_\Omega \nu^{\gamma_1}\left(\rho_1 - \nu\right)\tau_m^2\ d\boldsymbol{x} +$$

$$+\int_\Omega \overline{\rho_1^{\gamma_1}}\nu\tau_m^2\ d\boldsymbol{x}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.21}$$

Совершая в (3.21) предельный переход при $m \to \infty$, приходим к неравенству:

$$\int_\Omega \left(\overline{\rho_1^{\gamma_1}} - \nu^{\gamma_1}\right)\left(\rho_1 - \nu\right)\ d\boldsymbol{x} \ge 0.$$

Полагая в последнем неравенстве $\nu = \rho_1 + \delta\psi$, $\psi \in L_{2\gamma_1}(\Omega)$, $\psi \ge 0$ п.в. в Ω, $\delta \to 0+$, получим, что

$$\int_\Omega \left(\overline{\rho_1^{\gamma_1}} - \rho_1^{\gamma_1}\right)\psi\, d\boldsymbol{x} \le 0.$$

С другой стороны (в силу выпуклости функции $z \mapsto z^{\gamma_1}$), $\rho_1^{\gamma_1} \le \overline{\rho_1^{\gamma_1}}$, и поэтому

$$\int_\Omega \left(\overline{\rho_1^{\gamma_1}} - \rho_1^{\gamma_1}\right)\psi\, d\boldsymbol{x} = 0$$

$$\forall\, \psi \in L_{2\gamma_1}(\Omega), \quad \psi \ge 0 \text{ п.в. в } \Omega. \tag{3.22}$$

Из (3.22) следует

$$\overline{\rho_1^{\gamma_1}} = \rho_1^{\gamma_1}. \tag{3.23}$$

Из формул (3.1) и (3.223) вытекает по теореме Рисса, что $\rho_1^\varepsilon \to \rho_1$ сильно в $L_{\gamma_1}(\Omega)$, из чего, в свою очередь, следует

$$\rho_1^\varepsilon \to \rho_1 \text{ сильно в } L_q(\Omega),\ q \in [1, 2\gamma_1). \tag{3.24}$$

Соотношения (3.1), (3.23), (3.24) позволяют утверждать, что при $\varepsilon \to 0$

$$\int_\Omega \rho_2^\varepsilon (\rho_1^\varepsilon)^{\gamma_1}\tau^2 d\boldsymbol{x} \to \int_\Omega \rho_2\rho_1^{\gamma_1}\ \tau^2 d\boldsymbol{x},$$

и поэтому в силу равенства (см. (3.11) с $i = 1$, $\eta^\varepsilon = \rho_2^\varepsilon \to \rho_2 = \overline{\eta}$ при $\varepsilon \to 0$ слабо в $L_{2\gamma_2}(\Omega)$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \rho_2^\varepsilon \left[K_1\left(\rho_1^\varepsilon\right)^{\gamma_1} - \nu_{11}\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\right]\tau^2 d\mathrm{x} =$$

$$= \int_\Omega \rho_2 \left[K_1 \overline{\rho_1^{\gamma 1}} - \nu_{11}\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}^{(1)}\right]\tau^2 dx \quad \forall\, \tau \in C_0^\infty(\Omega)$$

справедлива формула

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \rho_2^\varepsilon \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\tau^2 d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \rho_2 \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}^{(1)}\tau^2 d\boldsymbol{x}. \tag{3.25}$$

Теперь из (3.11) с $i = 2$, $\eta^\varepsilon = \rho_2^\varepsilon \to \rho_2 = \overline{\eta}$ при $\varepsilon \to 0$ слабо в $L_{2\gamma_2}(\Omega)$ и (3.25) следует равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \rho_2^{\varepsilon} \left[K_2 \left(\rho_2^{\varepsilon} \right)^{\gamma_2} - \nu_{22} \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_{\varepsilon}^{(2)} \right] \tau^2 dx =$$

$$= \int_{\Omega} \rho_2 \left[K_2 \overline{\rho_2^{\gamma_2}} - \nu_{22} \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}^{(2)} \right] \tau^2 dx,$$

из которого, дословно повторяя вывод формул (3.23), (3.24), получаем, что

$$\overline{\rho_2^{\gamma_2}} = \rho_2^{\gamma_2} \text{ и } \rho_2^{\varepsilon} \to \rho_2$$

$$\text{сильно в } L_q(\Omega),\ q \in [1, 2\gamma_2). \qquad (3.26)$$

Теорема 1.2 доказана.

Литература

1. Rajagopal, K. R. Mechanics of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. – Singapore: World Scientific, 1995.
2. Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1.
3. Кучер, Н. А. Анализ разрешимости краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2011. – Вып. 1(45).
4. Frehse, J. On a Stokes-like system for mixtures of fluids / J. Frehse, S. Goj, J. Malek // SIAM J. Math. Anal. – 2005. – V. 36(6).
5. Frehse, J. A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum / J. Frehse, S. Goj, J. Malek // J. Appl. Math. – 2005. – V. 50.
6. Frehse, J. On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids / J. Frehse, W. Weigant // J. Appl. Math. – 2008. – V. 53. – № 4.
7. Lions, P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 2: Compressible Models / P.-L. Lions. – New York: Oxford University Press, 1998.
8. Feireisl, E. Dynamics of Viscous Compressible Fluids / E. Feireisl. – New York: Oxford University Press, 2003.
9. Novotny, A. Introduction to the mathematical theory of compressible flow / A. Novotny, I. Straskraba. – New York: Oxford University Press, 2004.
10. Feireisl, E. Singular limits in thermodynamics of viscous fluids / E. Feireisl, Novotny A. – Basel: Birkhauser, 2009.
11. Plotnikov, P. Compressible Navier-Stokes Equations. Theory and Shape Optimization / P. Plotnikov, J. Sokolowski. – Basel: Birkhauser, 2012.
12. Feireisl, E. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier–Stokes equations / E. Feireisl, A. Novotny, H. Petzeltova // J. Math. Fluid Mech. – № 3. – 2001.
13. Мазья, В. Г. Пространства С. Л. Соболева / В. Г. Мазья. – Л.: ЛГУ, 1985.
14. Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1977.
15. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989.
16. Боговский, М. Е. О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad / М. Е. Боговский // Труды семинара С. Л. Соболева. – Т. 1. – Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР.

Информация об авторах:

Малышенко Ольга Владимировна – старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений КемГУ, 8(3842)542740, molga81@list.ru.

Olga V. Malyshenko – Senior Lecturer at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Мамонтов Александр Евгеньевич – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, 8(383) 333-31-99, mamont@hydro.nsc.ru.

Alexander E. Mamontov – Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher at Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the RAS.

Прокудин Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений КемГУ, 8(3842)542740, daprokudin@kemsu.ru.

Dmitry A. Prokudin – Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.