УДК 517.9

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер, М. В. Краюшкина, О. В. Малышенко

GLOBAL SOLVABILITY OF THE REGULARIZED PROBLEM OF VISCOUS COMPRESSIBLE FLUIDS MIXTURE MOVEMENT

N. A. Kucher, M. V. Krayushkina, O. V. Malyshenko

Изучается краевая задача для нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, представляющая собой регуляризованную систему уравнений, описывающая динамику смеси вязких сжимаемых жидкостей. Доказана глобальная по времени разрешимость указанной выше краевой задачи.

The boundary value problem for non-linear systems of partial differential equations, representing regularized system of equations, describing the dynamics of the mixture of viscous compressible fluids is studied. The global solvability (in terms of time) of the boundary value problem is proved.

Ключевые слова: смеси вязких сжимаемых жидкостей, краевая задача, динамика смесей.

Keywords: the mixture of viscous compressible fluids, boundary value problem, dynamics of mixtures.

Предположим, что бинарная смесь вязких сжимаемых жидкостей (газов) заполняет ограниченную область $\Omega \subset R^3$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ с границей класса C^{2+v} и ее состояние характеризуется распределениями плотностей $\rho_i(t,x)$, давлений $p_i(t,x)$ и полями скоростей $\vec{u}^{(i)}(t,x)$, составляющих компонентов i = 1,2. Они удовлетворяют следующим уравнениям [1]:

$$\partial_t(\rho_i \vec{u}^{(i)}) + div(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \nabla p_i = = div\,\sigma^{(i)} + \vec{J}^{(i)} \text{ в } Q_T = (0,T)\times\Omega, i = 1,2; \quad (1.1a)$$

$$\partial_t(\rho_i) + div(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0 \text{ в } Q_T, i = 1,2, \quad (1.1b)$$

первые два из которых представляют собой законы сохранения импульсов компонент смеси, а два последних – законы сохранения массы каждой из компонент. Тензоры вязких напряжений $\sigma^{(i)}$, $i = 1,2$ задаются формулами:

$$\sigma^{(i)}(\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}) = \sum_{j=1}^{2}\left(2\mu_{ij} D(\vec{u}^{(j)} + \lambda_{ij} div\,\vec{u}^{(j)} \cdot I\right), \quad (1.1c)$$

$$D(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T\right),$$

в которых коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij} (заданные константы) удовлетворяют неравенствам:

$$\mu_{11} > 0{,}4\mu_{1i}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{2i})^2 > 0, \\ \nu_{11} > 0{,}4\nu_{11}\nu_{22} - (\nu_{12} + \nu_{21})^2 > 0, \nu_{ij} = \\ = \lambda_{ij} + 2\mu_{ij}, i, j = 1,2. \quad (1.1d)$$

Мы будем предполагать, что давление $p_i(t,x)$ и плотность $\rho_i(t,x)$ в *i*-й компоненте связаны соотношением $p_i = \rho_i^{\gamma_i}$, где $\gamma_i > 1$ – показатель адиабаты, слагаемые $\vec{J}^{(i)}$, выражающие интенсивность обмена импульсов между компонентами смеси, определены по формуле [2]:

$$\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} \cdot a \cdot (\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}), \\ i = 1,2, a = const > 0. \quad (1.1e)$$

Уравнения (1.1a) и (1.1b) должны быть дополнены начальными условиями:

$\rho_i|_{t=0} = \rho_i^0(x), \vec{q}_i|_{t=0} = \vec{q}_i^{\,0}(x), \vec{q}_i = \rho_i \vec{u}_i$ в Ω

и граничными условиями, простейшим из которых является условие прилипания

$$\vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega, i = 1,2,$$

означающее, что граница области течения является неподвижной стенкой.

Главным объектом исследования в данной работе является следующая регуляризация задачи (1.1):

$$\partial_t(\rho_i\vec{u}^{(i)}) + div(\rho_i\vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \nabla(\rho_i^{\gamma_i}) + \delta\nabla(\rho_i^{\beta_i}) + \\ + \varepsilon\nabla\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla\rho_i = div\,\sigma^{(i)} + \vec{J}^{(i)}(\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}) \\ \text{в } Q_T = (0,T)\times\Omega, i = 1,2, \quad (1.2a)$$

$$\partial_t\rho_i + div(\rho_i\vec{u}^{(i)}) = \varepsilon\Delta\rho_i \text{ в } Q_T, i = 1,2, \quad (1.2b)$$

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_i^0(x), \vec{q}_i|_{t=0} = \vec{q}_i^{\,0}(x) \text{ в } \Omega, i = 1,2 \quad (1.2c)$$

$$\vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega, i = 1,2, \quad (1.2d)$$

$$\nabla\rho_i \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega, i = 1,2. \quad (1.2e)$$

Здесь ε, δ – положительные параметры,

$\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω.

Основной результат данной работы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Предположим выполненными следующие условия: параметры $\mu_{ij}, \lambda_{ij}, i, j = 1,2$ удовлетворяют условиям (1.1d), показатели адиабаты $\gamma_i, i = 1,2$ удовлетворяют условиям $\gamma_i > 3/2$, параметры $\delta, \beta_i, i = 1,2$ выбраны так, что

$\delta > 0, \beta_i \geq 4, i = 1,2$ и пусть $\varepsilon > 0$,

$$0 < \underline{\rho} \le \rho_i^0 \le \overline{\rho} < \infty, i = 1,2, \quad (1.3)$$

Ω– ограниченная область класса

$$C^{2,\theta}, \theta \in (0,1], \rho_i^0 \in W^{1,\infty}(\Omega), \vec{q}_i^{\,0} \in L^2(\Omega), i = 1,2. \quad (1.4)$$

Тогда существуют решения $(\rho_{i,\varepsilon}, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}), \rho_{i,\varepsilon} = \rho_{i,\varepsilon,\delta}, \vec{u}_\varepsilon^{(i)} = \vec{u}_{\varepsilon,\delta}^{(i)}, i = 1,2$ задачи (1.2) со следующими свойствами:

$$\rho_{i,\varepsilon} \in C^0(\overline{I}, L^{\beta_i}_{weak}(\Omega)),$$

$$\rho_{i,\varepsilon} \in C^0(\overline{I}, L^p(\Omega)) \cup L^{\beta_i+1}(Q_T), 1 < p < \beta_i,$$

$$\rho_{i,\varepsilon} \ge 0 \text{ п.в. в } Q_T, \rho_{i,\varepsilon}^{\frac{1}{2}\beta_i} \in L^2(I, W^{1,2}(\Omega)),$$

$$\partial_t \rho_{i,\varepsilon} \in L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T),$$

$$\nabla^2 \rho_{i,\varepsilon} \in L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T),$$

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)),$$

$$\vec{q}_\varepsilon^{(i)} = \rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in C^0(\overline{I}, L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}_{weak}(\Omega)),$$

$$\vec{q}_\varepsilon^{(i)} \in L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}_{weak}(\Omega)),$$

$$\rho_{i,\varepsilon}\left|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right|^2 \in L^\infty(I, L^1(\Omega)) \cap L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{4\beta_i+3}}_{weak}(\Omega)),$$

$$\nabla \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla \rho_{i,\varepsilon} \in L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T), \nabla \rho_{i,\varepsilon},$$

$$\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(I, E_0^{\frac{10\beta_i-6}{3\beta_i+3}, \frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(\Omega)),$$

$$\int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}\, dx = \int_\Omega \rho_i^0\, dx.$$

Для любых векторных полей $\vec{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(Q_T), i = 1,2$ выполняются интегральные тождества:

$$-\int_{Q_T} \rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\partial_t(\vec{\varphi}^{(i)})dxdt =$$

$$= -\int_{Q_T}\sum_{j=1}^2 \mu_{ij}\nabla\vec{u}_\varepsilon^{(j)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)}dxdt -$$

$$-\int_{Q_T}\sum_{j=1}^2 (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) div\vec{u}_\varepsilon^{(j)} \cdot div\vec{\varphi}^{(i)}dxdt +$$

$$+\int_{Q_T}(\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) : \nabla\vec{\varphi}^{(i)}dxdt +$$

$$+\int_{Q_T}(\rho_{i,\varepsilon}^{\gamma_i} + \delta\rho_{i,\varepsilon}^{\beta_i}) div\vec{\varphi}^{(i)}dxdt - \varepsilon\int_{Q_T}(\nabla\rho_{i,\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \vec{\varphi}^{(i)}dxdt +$$

$$+(-1)^{i+1}\int_{Q_T} a(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)}) \cdot \vec{\varphi}^{(i)}dxdt.$$

Для любых функций $\eta_i \in C^\infty(R^3)$ выполнены уравнения:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}\eta_i dx - \int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(j)}\nabla\eta_i dx +$$

$$+\varepsilon\int_\Omega \nabla\rho_{i,\varepsilon}\cdot\nabla\eta_i dx = 0 \text{ в } D'(I),\ i = 1,2.$$

Выполнены соотношения:

$$\lim_{t\to 0+0}\int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}(t)\eta_i dx = \int_\Omega \rho_i^0\eta_i dx, \eta_i \in C_0^\infty(\Omega), i = 1,2,$$

$$\lim_{t\to +0}\int_\Omega \rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}(t)\vec{\varphi}_i dx = \int_\Omega \vec{q}_i \cdot \vec{\varphi}_i dx, \vec{\varphi}_i \in C_0^\infty(\Omega), i = 1,2.$$

Имеют место энергетические неравенства в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{dt}\hat{\varepsilon}_\delta(\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}) + c_0\int_\Omega(\left|\nabla\vec{u}_\varepsilon^{(1)}\right|^2 + \left|\nabla\vec{u}_\varepsilon^{(2)}\right|^2)dx +$$

$$+\varepsilon\int_\Omega\sum_{i=1}^2(\gamma_i\rho_{i,\varepsilon}^{\gamma_i-2} + \delta\beta_i\rho_{i,\varepsilon}^{\beta_i-2})\left|\nabla\rho_{i,\varepsilon}\right|^2 dx +$$

$$+\int_\Omega\left|\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)}\right|^2 dx \le 0,\ i = 1,2 \text{ в } D'(I),$$

а также в интегральной форме:

$$\hat{\varepsilon}_\delta(\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)})(t) + c_0\int_0^t\sum_{i=1}^2\left\|\nabla\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau +$$

$$+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^2(\gamma_i\rho_{i,\varepsilon}^{\gamma_i-2} + \delta\beta_i\rho_{i,\varepsilon}^{\beta_i-2})\left|\nabla\rho_{i,\varepsilon}\right|^2 dxd\tau +$$

$$+\alpha\int_0^t\int_\Omega\left|\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)}\right|^2 dxd\tau \le \hat{\varepsilon}_{\delta,0},$$

для почти всех $t \in I$. Здесь

$$\hat{\varepsilon}_\delta = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^2\overline{\rho}_k\left\|\vec{u}^{(k)}\right\|^2_{0,2} + \sum_{k=1}^2\int_\Omega\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\gamma_k-1}(\rho_k)^{\gamma_k} + \\ +\frac{\delta}{\beta_k-1}(\rho_k)^{\beta_k}\end{array}\right\}dx,$$

а величина $\hat{\varepsilon}_{\delta,0}$ определяется начальными данными и не зависит от номера *n*.

Если $\delta \in (0,1)$, то имеют место следующие оценки:

$$\sum_{i=1}^2\left\|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{L^2(I,W^{1,2}(\Omega))} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}),$$

$$\left\|\rho_{i,\varepsilon}\right\|_{L^\infty(I,L^{\gamma_i}(\Omega))} \le L(\gamma_i, \hat{\varepsilon}_{\delta,0}),$$

$$\delta^{\beta_i}\left\|\rho_{i,\varepsilon}\right\|_{L^\infty(I,L^{\beta_i}(\Omega))} \le L(\beta_i, \hat{\varepsilon}_{\delta,0}),$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\nabla\rho_{i,\varepsilon}\right\|_{L^2(Q_T)} \le L(\delta, \beta_i, \rho_i^0, \vec{q}_i),$$

$$\left\|\rho_{i,\varepsilon}\left|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right|^2\right\|_{L^\infty(I,L^1(\Omega))} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}),$$

$$\left\|\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{L^\infty(I,L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega))} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}),$$

$$\left\|\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{L^2(I,L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega))} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}),$$

$$\left\|\rho_{i,\varepsilon}\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{L^{\frac{10\beta_i-6}{3(\beta_i+1)}}(Q_T)} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}),$$

$$\varepsilon\left\|\nabla\rho_{i,\varepsilon}\right\|_{L^{\frac{10\beta_i-6}{3(\beta_i+1)}}(Q_T)} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}),$$

$$\varepsilon\left\|\nabla\rho_{i,\varepsilon}\cdot\nabla\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{L^{\frac{5\beta_i-3}{4\beta_i}}(Q_T)} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}), i = 1,2.$$

Здесь L – положительная постоянная, не зависящая от ε. Более того, если параметр δ не указан в аргументе L, то L не зависит также от δ.

Ограниченный объем статьи позволяет лишь кратко охарактеризовать доказательство этой теоремы.

Сначала рассматривается схема аппроксимации задачи (1.2) посредством конечномерных задач (уравнения Фаэдо-Галеркина) и изучается их глобальная по времени разрешимость. После этого на основе априорных оценок решений конечномерных задач доказывается возможность предельного перехода, что и приводит к доказательству теоремы 1.

Обозначим через X_n Евклидово пространство размерности *n* с базисом $\{\vec{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ и скалярным произведением $(\,,)_{X_n} = (\,,) = \int\limits_{\Omega} \vec{u}\cdot\vec{v}dx, \vec{u},\vec{v}\in X_n.$ Здесь система вектор-функций $\{\vec{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в $(L^2(\Omega))^3$, а также ортонормированным базисом в $(W_0^{1,2}(\Omega))^3$ [в работе используется общепринятые в литературе [3], [4] обозначения функциональных пространств: $L^p(\Omega)(W^{l,p}(\Omega))$ – пространство функций, интегрируемых со степенью *p* (вместе с обобщенными производными до порядка *l* включительно)].

Конечномерные задачи, аппроксимирующие задачу (1.2), формулируются следующим образом: для произвольно выбранного $T'\in(0,T]$ ищем вектор-функции $\vec{u}^{(i)}\in C^0(\bar{I}',X_n), I'=(0,T'), i=1,2,$ удовлетворяющие уравнениям:

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i(t)\vec{u}^{(i)}\vec{\varphi}dx - \int\limits_{\Omega}\vec{q}_i\vec{\varphi}dx = \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\Delta\vec{u}^{(j)} + \sum_{j=1}^{2}(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\nabla div\,\vec{u}^{(j)} - \nabla\rho_i^{\gamma_i} - \delta\nabla\rho_i^{\beta_i}\right]\cdot\vec{\varphi}dxdt,$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[div(\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}) - \varepsilon(\nabla\rho_i\cdot\nabla)\vec{u}^{(i)} + (-1)^{i+1}\cdot a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})]\cdot\vec{\varphi}dxdt, i=1,2, t\in I', \varphi\in X_n, \tag{1.5}$$

где $\rho_i(t) = \left[S_{\rho_i^0}(\vec{u}^{(i)})\right](t),$ а символом $\rho(t) = \left[S_{\rho^0}(\vec{u})\right](t)$ обозначается решение следующей параболической задачи:

$$\partial_t\rho + div(\rho\vec{u}) = \varepsilon\Delta\rho \text{ в } Q_T, \tag{1.6a}$$

$$\rho(0)=\rho^0 \text{ в } \Omega, \tag{1.6b}$$

$$\nabla\rho\cdot\vec{n} = 0 \text{ на } I\times\partial\Omega. \tag{1.6c}$$

Здесь $\varepsilon>0$ – заданная постоянная, $\rho^0(x)$ – заданная функция, а $\vec{u}(t,x)$ – заданное векторное поле, обращающееся в нуль на границе области Ω.

Относительно задачи (1.6) имеют место следующие утверждения [5].

Лемма 1. Пусть $0<\theta\le 1,\Omega$ – ограниченная область класса $C^{2,\theta}, 0<\underline{\rho}\le\overline{\rho}<\infty$ и $\rho^0\in W^{1,\infty}(\Omega), \underline{\rho}\le\rho^0\le\overline{\rho}.$

Тогда существует однозначное отображение $S_{\rho_0}: L^\infty(I,W_0^{1,\infty}(\Omega))\to C^0(\bar{I},W^{1,2}(\Omega)),$ такое, что

(i) $S_{\rho_0}(\vec{u})\in R_T = \{\rho:\rho\in L^2(I,W^{2,p}(\Omega))\bigcap C^0(\bar{I},W^{1,p}(\Omega)),$
$\partial_t\rho\in L^2(I,L^p(\Omega)),\ 1<p<\infty\}.$

(ii) Функция $\rho = S_{\rho^0}(\vec{u})$ удовлетворяет уравнению (1.6a) п.в. в Q_T, начальному условию (1.6b) п.в. в Ω и граничному условию (1.6c) в смысле следов п.в. в *I*.

(iii) $\underline{\rho}\exp\{-\int\limits_0^t\|\vec{u}(\tau)\|_{1,\infty}d\tau\}\le\left[S_{\rho^0}(\vec{u})\right](t)\le$
$\le\overline{\rho}\exp\{\int\limits_0^t\|\vec{u}(\tau)\|_{1,\infty}d\tau\}, t\in\bar{I}, x\in\Omega.$

(iv) Если $\|\vec{u}\|_{L^\infty(I,W^{1,\infty}(\Omega))}\le K, K=const>0,$ то

$$\left\|S_{\rho^0}(\vec{u})\right\|_{L^\infty(I_t,W^{1,2}(\Omega))}\le$$
$$\le c\left\|\rho^0\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}\exp\left\{\frac{c}{2\varepsilon}(K+K^2)t\right\}, t\in\bar{I} \tag{1.7}$$

(v) $\left\|[S_{\rho^0}(\vec{u}_1)-S_{\rho^0}(\vec{u}_2)](t)\right\|_{L^2(\Omega)}\le c(K,\varepsilon,T)\cdot t\cdot$
$\cdot\left\|\rho^0\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}\cdot\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|_{L^\infty(I_t,W^{1,\infty}(\Omega))}, t\in\bar{I}.$

Постоянная *C* в неравенстве (1.7) зависит только от Ω.

Используя принцип сжимающих отображений и утверждения леммы 1 доказываем, что для любого конечного *T>0* существует единственное решение $(\rho_1,\rho_2,\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)}), (\rho_i,\vec{u}^{(i)})\in R_T\times C^0(\bar{I},X_n)$ уравнений (1.5).

Лемма 2. Предположим, что $\beta_i\ge 4, i=1,2.$ Пусть $\vec{u}_n^{(i)}, i=1,2$ – решения уравнений (1.5) на $(0,T)\times\Omega$ и $\rho_{i,n} = S_{\rho_i^0}(\vec{u}_n^{(i)}).$ Тогда имеют место следующие оценки, не зависящие от номера *n:*

$$\sup_{t\in[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left\|\rho_{i,n}(t)\right\|_{L^{\gamma_i}(\Omega)}^{\gamma_i}\le C, \tag{1.8}$$

$$\delta \sup_{t\in[0,T]} \sum_{i=1}^{2} \left\| \rho_{i,n}(t) \right\|_{L^{\beta_i}(\Omega)}^{\beta_i} \le C, \qquad (1.9)$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \sum_{i=1}^{2} \left\| \sqrt{\rho_{i,n}(t)}\vec{u}_n^{(i)}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^{2} \le C, \qquad (1.10)$$

$$\int_0^T \left(\left\| \vec{u}_n^{(1)}(t) \right\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \left\| \vec{u}_n^{(2)}(t) \right\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \right) dt \le C, \qquad (1.11)$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int_0^T \left\| \nabla \rho_{i,n}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \le C, \qquad (1.12)$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left\| \rho_{i,n} \right\|_{L^{\beta_i+1}(Q_T)} \le C. \qquad (1.13)$$

Через C в неравенствах (1.8) – (1.13) обозначены различные постоянные, зависящие от параметров $\beta_i, \rho_i^0, \vec{q}_i, \delta$, но не зависящие от номера n и параметра ε.

Доказательство леммы 2 опускаем, но приведем краткую схему применения оценок (1.8) – (1.13) для завершения доказательства теоремы 1.

Более подробно, из оценок (1.8), (1.9), (1.11) и (1.12) следует, что

$$\vec{u}_n^{(i)} \to \vec{u}^{(i)} \text{ слабо в } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \qquad (1.14)$$

$$\rho_{i,n} \to \rho \quad *-\text{слабо в}$$
$$L^\infty(0,T;L^{\beta_i}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^{\gamma_i}(\Omega)) \qquad (1.15)$$

$$\nabla \rho_{i,n} \to \nabla \rho_i \text{ слабо в } L^2(Q_T) \qquad (1.16),$$

переходя, если требуется к подпоследовательностям.

Кроме того, из (1.9) и (1.10) вытекает оценка

$$\left\| \rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \right\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega))} \le C(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}), \qquad (1.17)$$

а из уравнения (1.2b) и неравенства (1.17) получим, что

$$\left\| \partial_t \rho_{i,n} \right\|_{L^2(I;(W^{1,\frac{2\beta_i}{\beta_i-1}}(\Omega)^*)} \le C(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}, \beta_i, T). \qquad (1.18)$$

Из отмеченных свойств последовательности $\{\rho_{i,n}\}$ следует, что для некоторой подпоследовательности, за которой сохраним прежнее обозначение,

$$\rho_{i,n} \to \rho_i \text{ в } C^0(\bar{I}; L_{weak}^{\beta_i}(\Omega)). \qquad (1.19)$$

Из Леммы *Lious- Aubin* [5] получим, что

$$\rho_{i,n} \to \rho_i \text{ сильно в } L^2(Q_T). \qquad (1.20)$$

Из (1.20) и интерполяционного неравенства следует:

$$\rho_{i,n} \to \rho_i \text{ сильно в } L^p(Q_T),\ 1 \le p \le \frac{4}{3}\beta_i. \qquad (1.21)$$

Из соотношений (1.14), (1.17), (1.21) получим:

$$\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \to \rho_i\vec{u}^{(i)} \text{ слабо в } L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{\beta_i+6}}(\Omega))$$
$$\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \to \rho_i\vec{u}^{(i)} \ *\text{- слабо в } L^\infty(I, L^{\frac{2\beta_i}{\beta_i+1}}(\Omega)). \qquad (1.22)$$

Соотношения (1.15), (1.16) и (1.22) позволяет совершить предельный переход при $n \to \infty$ в слабом смысле в уравнениях (1.2b) и доказать, что предельные функции $\rho_i, \vec{u}^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям неразрывности с диссипацией в смысле тождеств (iii) теоремы 1.

С целью предельного перехода в уравнениях баланса импульсов отметим, что с помощью интерполяционного неравенства из оценок (1.17) и (1.22) следует неравенство:

$$\left\| \rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \right\|_{L^{r_i}(Q_T)} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}), \text{ где}$$

$$r_i = r_i(\beta_i) = \frac{2(5\beta_i - 3)}{3(\beta_i+1)},\ \frac{34}{15} \le r_i(\beta_i) \le \frac{10}{3}. \qquad (1.23)$$

Далее, опираясь на оценку (1.11) и оценки решений задачи Неймана с дивергентной правой частью [5], получаем неравенства:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left\| \nabla \rho_{i,n} \nabla \vec{u}_n^{(i)} \right\|_{L^{t_i}(Q_T)} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}), \\ &\varepsilon \left\| div(\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)}) \right\|_{L^{t_i}(Q_T)} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}) \\ &\left\| \partial_t \rho_{i,n} \right\|_{L^{t_i(\beta_i)}(Q_T)} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}, \varepsilon), \\ &\left\| \nabla^2 \rho_{i,n} \right\|_{L^{t_i(\beta_i)}(Q_T)} \le L(\hat{\varepsilon}_{\delta,0}, \varepsilon), \end{aligned} \qquad (1.24)$$

где

$$t_i = t_i(\beta_i) = \frac{5\beta_i - 3}{4\beta_i} \quad (\text{при } \beta_i \ge 4 \text{ имеем } \frac{17}{16} \le t_i < \frac{5}{4}).$$

Из оценок (1.23), (1.24) следует, что последовательности $\{\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)}\}$ и $\{\nabla\rho_{i,n}\}$ ограничены в пространствах $L^{t_i}(I; E_0^{r_i,t_i}(\Omega))$ [через $E^{r,t}(\Omega)$ обозначено замыкание множества D(Ω) в норме пространства:

$$E^{r,t}(\Omega) = \{\vec{g} \in L^r(\Omega) : div\,\vec{g} \in L^t(\Omega)\},$$
$$\left\| \vec{g} \right\|_{E^{r,t}(\Omega)} = \left\| g \right\|_{L^r(\Omega)} + \left\| div\,\vec{g} \right\|_{L^t(\Omega)}] \text{ [5].}$$

И поэтому в результате предельного перехода получим, что

$$\begin{aligned} &\nabla \rho_i \in L^{t_i}(I; E_0^{r_i,t_i}(\Omega)), \\ &\rho_{i,n} \in L^{t_i}(I; E_0^{r_i,t_i}(\Omega)) \end{aligned} \quad . \qquad (1.25)$$

Выбирая показатели $\beta_i \ge \frac{21}{4}$, на основании свойств (1.25) может быть доказано, что

$$\rho_i \in C^0(\bar{I}, L^{p_i}(\Omega)), 1 \le p_i < \beta_i.$$

Из оценок решений уравнений Галеркина в негативных пространствах Соболева может быть доказано, что $\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \to \rho_i\vec{u}^{(i)}$ сильно в $L^2(I, W^{-1,2}(\Omega))$

$\rho_{i,n}\vec{u}_n^{(i)} \otimes \vec{u}_n^{(i)} \to \rho_i\vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}$ слабо в

$$L^2(I, L^{\frac{6\beta_i}{4\beta_i+3}}(\Omega)).$$

Отмеченные свойства решений уравнений Галеркина позволяют совершить предельный переход в уравнениях (1.5) и доказать интегральные тождества (ii) теоремы 1.

Литература

1. Rajagopal, K. R. Mehchanics of Mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. – World Scientific, 1995.
2. Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. – М.: Наука, 1987.

3. Мазья, В. Г. Пространства С. Я. Соболева / В. Г. Мазья. – Л.: ЛГУ, 1985.
4. Никольский, С. Л. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. Л. Никольский. – М.: Наука, 1977.
5. Novotny, A. Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow / A. Novotny. – Oxford University Press, 2004.

Информация об авторах:

Кучер Николай Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений математического факультета КемГУ, nakycher@rambler.ru.
Nikolay A. Kucher – Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Краюшкина Марина Владимировна – ассистент кафедры дифференциальных уравнений математического факультета КемГУ, krayushkinamv@mail.ru.
Marina V. Krayushkina – Lecturer at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Малышенко Ольга Владимировна – ассистент кафедры дифференциальных уравнений математического факультета КемГУ, molga81@list.ru
Olga V. Malyshenko – Lecturer at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.