

$$P_e(z) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3(1-z^{-1}) & 4/3(1-z^{-1}) \\ 0 & z^{-1} & -2(1-z^{-1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это позволяет вычислить полиномиальную матрицу:

$$A(z) = AP_e = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3(1-z^{-1}) & 4/3(1-z^{-1}) \\ 0 & z^{-1} & -2(1-z^{-1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+z^{-1} & 1+2z^{-1} \\ 0 & z^{-1} & -2(1-z^{-1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу частотных функций по формуле: $H(z) = A(z^N)R(z)$,

$$\begin{pmatrix} m_0(z) & m_0(\rho z) & m_0(\rho^2 z) \\ m_1(z) & m_1(\rho z) & m_1(\rho^2 z) \\ m_2(z) & m_2(\rho z) & m_2(\rho^2 z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+z^{-3} & 1+2z^{-3} \\ 0 & z^{-3} & -2(1-z^{-3}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & \rho z & \rho^2 z \\ z^2 & \rho^2 z^2 & \rho^4 z^2 \end{pmatrix}.$$

Получаем: $m_0(z) = z^{-2} + 2z^{-1} + 3 + 2z^1 + z^2$, $m_1(z) = z^{-2} + 2z^{-1} - 2z^2$, $m_2(z) = z^2$.

Поэтому $H_0(z) = \frac{1}{9}(z^{-2} + 2z^{-1} + 3 + 2z^1 + z^2)$, $H_1(z) = \frac{1}{9}(z^{-2} + 2z^{-1} - 2z^2)$, $H_2(z) = \frac{1}{9}z^2$.

Матрица $G(z)$ фильтров восстановления находится обращением матрицы $H(z)$, $G(z) = R(z)^{-1}A(z^N)^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} G_0(z) & G_1(z) & G_2(z) \\ G_0(\rho z) & G_1(\rho z) & G_2(\rho z) \\ G_0(\rho^2 z) & G_1(\rho^2 z) & G_2(\rho^2 z) \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} & z^{-2} \\ 1 & \rho^{-1}z^{-1} & \rho^{-2}z^{-2} \\ 1 & \rho^{-2}z^{-1} & \rho^{-4}z^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3(1+2z^3) & 1/3(1-4z^3) \\ 0 & z^3 & -2(1-z^3) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом нужно учесть, что при вейвлет-разложении участвуют сопряженные фильтры вейвлетов. Это означает, что следует обращать матрицу $H(z)$, с комплексно сопряженными элементами. Поскольку коэффициенты фильтров вещественные, достаточно заменить $z = e^{-i\omega}$ на z^{-1} . Выбираем элементы первой строки и получаем следующие фильтры восстановления: $G_0(z) = 1$, $G_1(z) = -2z^{-3} + 3z^{-2} - 1$, $G_2(z) = -4z^{-3} + 6z^{-2} + 1 - 6z + 3z^2$.

Таким образом, фильтры восстановления имеют следующие ненулевые элементы: $\tilde{h}_0 = \sqrt{3}$, $\tilde{g}_{-3}^1 = -2\sqrt{3}$, $\tilde{g}_{-2}^1 = 3\sqrt{3}$, $\tilde{g}_0^1 = -\sqrt{3}$, $\tilde{g}_{-3}^2 = -4\sqrt{3}$, $\tilde{g}_{-2}^2 = 6\sqrt{3}$, $\tilde{g}_0^2 = \sqrt{3}$, $\tilde{g}_1^2 = -6\sqrt{3}$, $\tilde{g}_2^2 = 3\sqrt{3}$.

УДК 514.76

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ПЯТИМЕРНОЙ ГРУППЕ ЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Я. В. Славолюбова

В данной статье рассматриваются левоинвариантные контактные метрические структуры на пятимерной группе Гейзенберга. Среди общего шестипараметрического класса таких структур подробно рассмотрены три подкласса. Проверены условия нормальности, К-контактности. Вычислены секционные кривизны, скалярные кривизны ассоциированных метрик и квадраты норм тензоров кривизны, Риччи и тензора кручения $N^{(1)}$.

Литература

1. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М.; Ижевск: РХД, 2001. – 494 с.
2. Смоленцев, Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. – М., ДМК Пресс, 2005. – 303 с.
3. Bratteli, O. T. Wavelet filters and infinite-dimensional unitary groups / O. Bratteli, P. E. Jorgensen // <http://arXiv.org/math>. FA/0001171 v 3, 2000. – 31 p.
4. Smolentsev, N. K. Construction of some types wavelets with coefficient of scaling N / N. K. Smolentsev, P. N. Podkur // <http://arXiv.org/math>. FA/0612573v1, 2006. – 19 p.

1. Предварительные сведения. Напомним основные понятия о контактных многообразиях.

Определение 1. Дифференцируемое $(2n+1)$ -мерное многообразие M класса C^∞ называется *контактным многообразием*, если на нём задана дифференциальная 1-форма η , такая, что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1} . Форма η называется *контактной формой*.

Контактная форма определяет на многообразии M^{2n+1} распределение

$E = \{X \in TM^{2n+1} \mid \eta(X) = 0\}$ размерности $2n$, которое называется *контактным распределением*. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое ξ , которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$, для всех векторных полей X на M^{2n+1} . Векторное поле ξ определяет одномерное распределение, дополнительное к E . Векторное поле ξ называется *полем Рибба* или *характеристическим векторным полем* контактной структуры.

Определение 2. Если M^{2n+1} контактное многообразие с контактной формой η , то контактной метрической структурой называется четвёрка (η, ξ, φ, g) , где ξ – поле Рибба, g – риманова метрика и φ – аффинор на M^{2n+1} , для которой имеют место следующие свойства:

1. $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$.
2. $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$.
3. $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется [1] *ассоциированной*. Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффинором φ :

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y). \quad (1.1)$$

Поэтому мы ассоциированные метрики будем задавать аффинором φ . Отметим также, что аффинор φ действует как почти комплексная структура в контактном распределении E .

Напомним [1], что почти контактной структурой на многообразии M^{2n+1} называется тройка (η, ξ, φ) , где η – некоторая 1-форма (не обязательно контактная), ξ – некоторое векторное поле (не обязательно характеристическое) и φ – аффинор на M^{2n+1} , для которой имеют место следующие свойства:

$$\eta(\xi) = 1 \text{ и } \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi. \quad (1.2)$$

Пусть M^{2n+1} почти контактное многообразие с почти контактной структурой (η, ξ, φ) . Рассмотрим многообразие $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Векторное поле на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ задается парой $(X, f\partial_t)$, где X – векторное поле, касательное к M^{2n+1} , t – координата из $\mathbf{R}$ и f – функция класса C^∞ на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Определим почти комплексную структуру J на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ с помощью оператора J , действующего по формуле

$$J(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\partial_t).$$

Очевидно, что $J^2 = -I$, $J(\xi) = \partial_t$, $J(\partial_t) = -\xi$, $J(X) = \varphi(X)$, если $X \in E$. Если J интегрируемая, то почти контактная структура (η, ξ, φ) называется *нормальной* [1].

Определение 3. Если контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) является нормальной, то она называется *нормальной контактной метрикой* или *структурой Сасаки* [1].

На контактном многообразии определены четыре тензора [1] $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$ следующими выражениями:

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi,$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi X}\eta)(Y) - (L_{\varphi Y}\eta)(X),$$

$$N^{(3)}(X, Y) = (L_\xi \varphi)X, \quad N^{(4)}(X, Y) = (L_\xi \eta)(X).$$

Как известно [1], почти контактная структура (η, ξ, φ) является нормальной, если и только если эти четыре тензора нулевые. Обращение в нуль тензора $N^{(1)}$ означает [1] обращение в нуль тензоров $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ и $N^{(4)}$, так что условие нормальности выражается следующим равенством:

$$[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0.$$

Известно также [1], что для контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) тензоры $N^{(2)}$ и $N^{(4)}$ являются нулевыми. Кроме того, $N^{(3)}$ обращается в нуль, если и только если характеристическое векторное поле ξ является киллинговым относительно метрики g .

Пусть M^{2n+1} – контактное метрическое многообразие, такое что η – контактная форма и (η, ξ, φ, g) – ассоциированная почти контактная метрическая структура. Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий g , то есть ξ – векторное поле Киллинга относительно g , то такую контактную метрическую структуру называют *K-контактной структурой* [1].

Замечание 1. Контактная метрическая структура является *K-контактной*, если и только если $L_\xi \varphi = N^{(3)} = 0$ [1].

2. Левинвариантные контактные структуры на группе Ли Гейзенберга H^5 размерности 5. Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли, то естественно рассматривать левинвариантную контактную структуру. В этом случае контактная форма η , векторное поле Рибба ξ , аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице.

Рассмотрим группу Ли Гейзенберга H^5 . Ее алгебра Ли образована следующими матрицами:

$$H^5 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_i \in \mathbf{R}.$$

Выберем в алгебре Ли H^5 базис $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, состоящий из матриц из нулей с единицами только на местах, соответствующих координатным осям $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Тогда скобки Ли в базисе $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ будут иметь вид, $[e_2, e_1] = e_5$, $[e_4, e_3] = e_5$. Следовательно, ненулевые структурные константы следующие:

$$C_{12}^5 = -C_{21}^5 = -1, \quad C_{34}^5 = -C_{43}^5 = -1.$$

Алгебра Ли Гейзенберга является [2] контактной алгеброй Ли с контактной формой $\eta = e_5^* = e^5$. Легко видеть, что дифференциал $d\eta$ формы η имеет вид, $d\eta = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$. Таким образом, вектор e_5 является характеристическим векторным полем ξ данной контактной структуры, $\xi = e_5$, так как он удовлетворяет свойствам

$\eta(\xi)=1$ и $d\eta(\xi, X)=0$ для всех векторных полей X в H^5 .

Контактное распределение, ядро формы η , является левоинвариантным распределением, заданным подпространством E^4 в алгебре Ли Гейзенберга, $E^4 = \mathbf{R}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Алгебра Ли Гейзенберга имеет нетривиальный центр $Z(H^5) = e_5$. Данная контактная алгебра Ли получена центральным расширением

$E^4 \times_{d\eta} R$ симплектической коммутативной алгебры Ли $(E^4, d\eta)$ с помощью невырожденного 2-коцикла $d\eta$ [2].

3. Вычислительные формулы. Приведем выражения всех необходимых тензоров левоинвариантной контактной метрической структуры на группе Ли.

Замечание 2. В книге Блэра [1] принято определение внешнего произведения в соответствии с [4]. Мы принимаем определение внешнего произведения, основанное на формуле:

$$dx \wedge dy = dx \otimes dy - dy \otimes dx.$$

Разница проявляется в том, что в книге Блэра внешний дифференциал выражается формулой

$$d\eta(X, Y) = -\frac{1}{2}\eta([X, Y]), \text{ а у нас:}$$

$$d\eta(X, Y) = -\eta([X, Y]).$$

В частности,

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi.$$

Ассоциированную метрику мы определим по той же формуле:

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Отметим, что теперь она отличается от ассоциированной метрики (1.1) Блэра [1]: слагаемое $d\eta(\varphi X, Y)$ теперь стало в два раза больше.

3.1. Тензоры $N^{(n)}$. Напомним, что $N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi$, где кручение Нейенхейса $[\varphi, \varphi]$ тензорного поля φ типа (1,1) является тензорным полем типа (1,2), заданным выражением:

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y].$$

В левоинвариантном базисе $\{e_i\}$ имеем:

$$\begin{aligned} [\varphi, \varphi](e_i, e_j) &= \varphi^2[e_i, e_j] + \\ &+ [\varphi e_i, \varphi e_j] - \varphi[\varphi e_i, e_j] - \varphi[e_i, \varphi e_j] = \\ &= \varphi^2(C_{ij}^k e_k) + [\varphi^i e_i, \varphi^j e_j] - \varphi[\varphi^i e_i, e_j] - \varphi[e_i, \varphi^j e_j] = \\ &= C_{ij}^k (\varphi^2)_i^l e_k + C_{is}^k \varphi_i^l \varphi_j^s e_k - \varphi_i^l \varphi(C_{ij}^s e_s) - \varphi_j^l \varphi(C_{ii}^s e_s) = \\ &= (\varphi_i^s \varphi_j^l C_{ij}^k + C_{is}^k \varphi_i^l \varphi_j^s - \varphi_i^k C_{ij}^s \varphi_j^l - \varphi_j^k C_{ii}^s \varphi_i^l) e_k. \end{aligned}$$

А также распишем слагаемое $d\eta(X, Y)\xi$ на базисных векторах $\{e_i\}$, обозначив его предварительно $Q(X, Y) = d\eta(X, Y)\xi$, $Q(e_i, e_j) = Q_{ij}^k e_k$. Поскольку $Q(X, Y) = d\eta(X, Y)\xi$ и $\xi = e_5$, то

$$Q(e_i, e_j) = Q_{ij}^5 e_5.$$

Учитывая, что $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$, имеем:

$$Q(e_i, e_j) = d\eta(e_i, e_j)e_5 = d\eta_{ij}e_5 = g_{is}\varphi_j^s e_5.$$

Поэтому $Q_{ij}^5 = g_{is}\varphi_j^s e_5$, а остальные компоненты являются нулевыми. Поскольку $N^{(1)}(e_i, e_j)$ является векторным полем, следовательно, $N^{(1)}(e_i, e_j)$ раскладывается по базису, а именно:

$N^{(1)}(e_i, e_j) = N^{(1)k}_{ij} e_k$. В базисе $\{e_i\}$ имеем окончательно:

$$\begin{aligned} N^{(1)k}_{ij} &= \varphi_i^s \varphi_j^l C_{ij}^k + C_{is}^k \varphi_i^l \varphi_j^s - \\ &- \varphi_i^k C_{ij}^s \varphi_j^l - \varphi_j^k C_{ii}^s \varphi_i^l + Q_{ij}^k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $Q_{ij}^k = d\eta_{ij} = g_{is}\varphi_j^s$ при $k = 5$, и $Q_{ij}^k = 0$ при $k = 1, 4$.

Рассмотрим также тензоры $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ и $N^{(4)}$. Известно [1], что для любой контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) тензоры $N^{(2)}$ и $N^{(4)}$ нулевые [1]. Рассмотрим тензор $N^{(3)}$. Найдём выражение производной Ли $(L_\xi \varphi)X$:

$$\begin{aligned} L_\xi(\varphi(X)) &= (L_\xi \varphi)(X) + \varphi(L_\xi(X)), \\ [\xi, \varphi(X)] &= (L_\xi \varphi)(X) + \varphi([\xi, X]), \\ (L_\xi \varphi)(X) &= [\xi, \varphi(X)] - \varphi([\xi, X]). \end{aligned}$$

Поскольку $N^{(3)}(e_i)$ является векторным полем, следовательно $N^{(3)}(e_i)$ раскладывается по базису, а именно $N^{(3)}(e_i) = N^{(3)k}_i e_k$. В базисе $\{e_i\}$ имеем:

$$\begin{aligned} (L_\xi \varphi)e_i &= [e_5, \varphi(e_i)] - \varphi([e_5, e_i]) = \\ &= [e_5, \varphi_i^s e_s] - \varphi(C_{5i}^s e_s) = \varphi_i^s C_{5s}^k e_k - C_{5i}^s \varphi_s^k e_k = \\ &= (\varphi_i^s C_{5s}^k - C_{5i}^s \varphi_s^k) e_k, \\ N^{(3)k}_i e_k &= (\varphi_i^s C_{5s}^k - C_{5i}^s \varphi_s^k) e_k, \\ N^{(3)k}_i &= \varphi_i^s C_{5s}^k - C_{5i}^s \varphi_s^k. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2. Тензор кривизны ассоциированной метрики. Компоненты связности Γ_{ij}^k ,

$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$ находим из шестичленной формулы [4], которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z и левоинвариантной метрики на группе Ли принимает вид:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X)$$

В базисе $\{e_i\}$ имеем:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) &= g([e_i, e_j], e_k) + \\ &+ g([e_k, e_i], e_j) - g([e_j, e_k], e_i), \end{aligned}$$

поэтому:

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2}(C_{ij}^p + g_{js} C_{ki}^s g^{kp} + g_{is} C_{kj}^s g^{kp}). \quad (3.3)$$

Тензор кривизны определяется по формуле: $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$. В базисе e_i , e_j для $R(e_i, e_j)e_k = R_{ijk}^s e_s$ имеем:

$$R_{ijk}^s = \Gamma_{ip}^s \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^s \Gamma_{ik}^p - \Gamma_{pk}^s C_{ij}^p. \quad (3.4)$$

3.3. Тензор Риччи, секционная и скалярная кривизны. Тензор Риччи определяется как свёртка тензора кривизны по первому и по четвёртому (верхнему) индексам: $Ric_{jk} = R_{ijk}^i$. Секционная кривизна $k(e_i, e_j) = k_{ij}$ в направлении координатных площадок вычисляется по формуле:

$$k(e_i, e_j) = \frac{g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)}{g(e_i, e_i)g(e_j, e_j) - g(e_i, e_j)^2} = \frac{g(R_{ij}^k e_k, e_i)}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2} = \frac{g_{ki}R_{ij}^k}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}. \quad (3.5)$$

Скалярная кривизна определяется как свёртка тензора Риччи: $S = g^{jk} Ric_{jk}$.

3.4. Нормы тензоров. Квадраты норм тензоров кручения, Римана и Риччи вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \|N^{(1)}\|^2 &= g_{kq} g^{is} g^{jp} N_{ij}^{(1)k} N_{sp}^{(1)q}, \\ \|R\|^2 &= g^{ip} g^{jr} g^{ks} g_{il} R_{jrk}^l R_{prs}^i, \\ \|Ric\|^2 &= g^{ik} g^{jl} Ric_{ij} Ric_{kl}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. Ассоциированные контактные метрические структуры на (H^5, η) . На контактной алгебре Ли можно определить аффинор φ , который обладает свойствами: $\varphi^2|_{E^4} = -I$, $\varphi\xi = 0$ и $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$.

Отметим, что такой аффинор задаётся неоднозначно. Как уже отмечалось, для контактной формы η аффинор φ определяет ассоциированную метрику g по формуле: $g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Мы будем рассматривать более общую (псевдо) риманову метрику вида:

$$g_\lambda(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \lambda \eta(X)\eta(Y). \quad (4.1)$$

Параметр λ обеспечивает растяжение ассоциированной метрики вдоль характеристического векторного поля ξ . Если $\lambda < 0$, то получается псевдориманова метрика.

$$\varphi|_{E^4} = -\frac{1}{1-u^2-v^2} \begin{pmatrix} 0 & 1+u^2+v^2 & 2v & -2u \\ -(1+u^2+v^2) & 0 & -2u & -2v \\ 2v & -2u & 0 & 1+u^2+v^2 \\ -2u & -2v & -(1+u^2+v^2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Условие невырожденности: $\det(I - P^2) = (1 - u^2 - v^2)^4 \neq 0$ принимает вид $u^2 + v^2 \neq 1$. Будем считать, что параметры u и v достаточно малые, сумма их квадратов меньше единицы. Соответствующая ассоциированная метрика определяется из (4.1). Получим выражение матрицы

Зафиксируем аффинор φ_0 , который действует на базисных векторах e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 следующим образом: $\varphi_0(e_1) = e_2$, $\varphi_0(e_2) = -e_1$, $\varphi_0(e_3) = e_4$, $\varphi_0(e_4) = -e_3$, $\varphi_0(e_5) = 0$. Зафиксируем также метрику $g_0 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \lambda e_5^2$. Известно [3], что при выбранной ассоциированной метрике g_0 и аффиноре φ_0 , каждый новый аффинор φ задётся оператором P , который обладает свойствами:

1) P антикоммутирует с аффинором φ_0 , $P\varphi_0 = -\varphi_0 P$;

2) P симметричен относительно метрики g_0 , соответствующей φ_0 , то есть матрица Pg_0 - симметричная;

3) $I - P^2$ - невырожденная.

$$\text{Тогда } \varphi = \varphi_0(I + P)(I - P)^{-1}. \quad (4.2)$$

Из свойств оператора P следует, что $P(\xi) = 0$, а на контактном подпространстве E^4 он имеет блочный вид: $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix}$, где A, B, D - симметричные матрицы вида:

$$A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала несколько частных классов ассоциированных метрик, для которых аффинор φ задаётся матрицей P вида:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Тогда ассоциированные метрики и контактные метрические структуры могут быть найдены в явном виде и доступны для исследования.

Случай 1. Пусть оператор P имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$, где $B = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$. Тогда аффинор φ определяется тем, что $\varphi(e_5) = 0$, а на контактном распределении E^4 он вычисляется на основе формулы $\varphi|_{E^4} = \varphi_0|_{E^4}(I + P)(I - P)^{-1}$ и задаётся матрицей:

ассоциированной метрики в выбранном базисе $\{e_i\}$: $g_{ij} = d\eta_{ik}\varphi_j^k + \lambda \eta_i \eta_j$.

Нетрудно заметить, что компоненты метрического тензора g_λ на контактном распределении E^4 определяются равенством $g_{ij}|_{E^4} = (d\eta)_{ik}\varphi_j^k$.

В результате вычислений в системе Maple 9 компоненты блока $g|_{E^4}$ ассоциированной метрики

$g_\lambda = \begin{pmatrix} g|_{E^4} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, соответствующей вышеприведён-
ному аффинору φ , получились следующие:

$$g|_{E^4} = \frac{1}{1-u^2-v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2+v^2 & 0 & 2u & 2v \\ 0 & 1+u^2+v^2 & 2v & -2u \\ 2u & 2v & 1+u^2+v^2 & 0 \\ 2v & -2u & 0 & 1+u^2+v^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении координатных площадок векторов базиса принимают следующие значения:

$$K_{\{1,2\}} = -\frac{3\lambda(1-w)^2}{4(1+w)^2}; \quad K_{\{1,3\}} = 0; \quad K_{\{1,4\}} = 0;$$

$$K_{\{2,3\}} = 0; \quad K_{\{2,4\}} = 0; \quad K_{\{3,4\}} = -\frac{3\lambda(1-w)^2}{4(1+w)^2};$$

где $w = u^2 + v^2$.

Случай 2. Пусть оператор P имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}. \quad \text{То-}$$

гда аффинор φ , ассоциированная метрика g_λ задаются матрицами:

$$\varphi|_{E^4} = \begin{pmatrix} \frac{-2t}{1-s^2-t^2} & \frac{-(1-s)^2+t^2}{1-s^2-t^2} & 0 & 0 \\ \frac{(1+s)^2+t^2}{1-s^2-t^2} & \frac{2t}{1-s^2-t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2y}{1-x^2-y^2} & \frac{-(1-x)^2+y^2}{1-x^2-y^2} \\ 0 & 0 & \frac{(1+x)^2+y^2}{1-x^2-y^2} & \frac{2y}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$g_{ij}|_{E^4} = \begin{pmatrix} \frac{(1+s)^2+t^2}{1-s^2-t^2} & \frac{2t}{1-s^2-t^2} & 0 & 0 \\ \frac{2t}{1-s^2-t^2} & \frac{(1-s)^2+t^2}{1-s^2-t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+x)^2+y^2}{1-x^2-y^2} & \frac{2y}{1-x^2-y^2} \\ 0 & 0 & \frac{2y}{1-x^2-y^2} & \frac{(1-x)^2+y^2}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении координатных площадок векторов базиса не зависят от параметров s, t, x, y и принимают следующие значения:

$$K_{\{1,2\}} = -\frac{3\lambda}{4}; \quad K_{\{1,3\}} = 0; \quad K_{\{1,4\}} = 0;$$

$$K_{\{2,3\}} = 0; \quad K_{\{2,4\}} = 0; \quad K_{\{3,4\}} = -\frac{3\lambda}{4}.$$

Рассмотрим также отдельно два частных случая.

Случай 2.1. Пусть оператор P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда аффинор } \varphi$$

задаётся матрицей:

$$\varphi|_{E^4} = -\frac{1}{1-s^2-t^2} \begin{pmatrix} 2t & t^2+(1-s)^2 & 0 & 0 \\ -t^2-(1+s)^2 & -2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2-t^2 \\ 0 & 0 & -(1-s^2-t^2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Условие невырожденности: $\det(I - P^2) = (1-s^2-t^2)^2 \neq 0$, $s^2+t^2 \neq 1$, где параметры s и t достаточно малые, сумма их квадратов меньше единицы.

Ассоциированная метрика g_λ задаётся матрицей следующего вида:

$$g_{ij}|_{E^4} = \frac{1}{1-s^2-t^2} \begin{pmatrix} t^2 + (1+s)^2 & 2t & 0 & 0 \\ 2t & t^2 + (1-s)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^2-t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2-t^2 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении координатных площадок векторов базиса не зависят от параметров s, t, x, y и принимают следующие значения: $K_{\{1,2\}} = -\frac{3\lambda}{4}$; $K_{\{1,3\}} = 0$; $K_{\{1,4\}} = 0$; $K_{\{2,3\}} = 0$; $K_{\{2,4\}} = 0$; $K_{\{3,4\}} = -\frac{3\lambda}{4}$.

Случай 2.2. Пусть оператор P имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где $D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$. Тогда аффинор φ задаётся матрицей:

$$\varphi|_{E^4} = -\frac{1}{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 0 & 1-x^2-y^2 & 0 & 0 \\ -(1-x^2-y^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y & y^2+(1-x)^2 \\ 0 & 0 & -(y^2+(1+x)^2) & -2y \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Условие невырожденности: $\det(I - P^2) = (1-x^2-y^2)^2 \neq 0$, $x^2+y^2 \neq 1$. Предполагаем, что параметры x и y достаточно малые, сумма их квадратов меньше единицы.

Ассоциированная метрика g_λ задаётся следующей матрицей:

$$g_{ij}|_{E^4} = \frac{1}{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1-x^2-y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x^2-y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2+(1+x)^2 & 2y \\ 0 & 0 & 2y & y^2+(1-x)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении координатных площадок векторов базиса принимают следующие значения: $K_{\{1,2\}} = -\frac{3\lambda}{4}$; $K_{\{1,3\}} = 0$; $K_{\{1,4\}} = 0$; $K_{\{2,3\}} = 0$; $K_{\{2,4\}} = 0$; $K_{\{3,4\}} = -\frac{3\lambda}{4}$.

В общем случае, для любой ассоциированной метрики вида $g_\lambda(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \lambda\eta(X)\eta(Y)$ имеет место.

Теорема. Любая контактная метрическая структура $(\eta, \xi, \varphi, g_\lambda)$ на группе Ли Гейзенберга H^5 является K -контактной структурой Сасаки.

Квадраты норм тензора Риччи и тензора Римана ассоциированной левоинвариантной метрики g_λ принимают следующие значения: $\|Ric\|^2 = 2\lambda^2$,

$$\|Riem\|^2 = \frac{17}{2}\lambda^2.$$

Для любой контактной метрической структуры $(\eta, \xi, \varphi, g_\lambda)$ на группе Ли Гейзенберга H^5 тензор Риччи, $Ric(X, Y) = g_\lambda(AX, Y)$ имеет следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Скалярная кривизна ассоциированной левоинвариантной метрики g_λ постоянна и принимает значение -5λ , $S = -5\lambda$.

Литература

1. Blair, D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics / D. E. Blair. – Springer-Verlag; Berlin Heidelberg; New York, 1976.
2. Diatta, A. Left invariant contact structures on Lie groups / A. Diatta // arXiv: math. DG/0403555 v 2, 24 Sep, 2004.
3. Смоленцев, Н. К. Пространства римановых метрик / Н. К. Смоленцев // Современная математика и её приложения. – 2003. – Т. 31. – С. 69 – 146.
4. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Намидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 1, 2.