МАТЕМАТИКА

УДК 513

ПОСТРОЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ С КОЭФФИЦИЕНТОМ МАСШТАБИРОВАНИЯ N НА ОСНОВЕ B-СПЛАЙНОВ

П. Н. Подкур

Теория вейвлетов [1] имеет широкие применения в обработке одномерных сигналов и изображений. В основе этой теории лежит понятие масштабирующей функции. Для коэффициента масштабирования N = 2 теория вейвлетов развита в значительной степени. В случае N>2 также можно построить аналогичную теорию, которая позволит осуществлять разложение сигнала N фильтрами. Однако до сих пор нет достаточного числа примеров масштабирующих функций и вейвлетов, соответствующих коэффициенту N>2. В данной работе доказана N-масштабируемость B-сплайнов и приводится построение неортогональных вейвлетов на основе B-сплайнов.

1. Масштабирующие функции. Пусть $N>1$ – целое число, $\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел и $L^2(\mathbf{R})$ – пространство функций на числовой прямой $\mathbf{R}$, интегрируемых с квадратом.

Определение 1. *Функция* $\varphi(x)\in L^2(\mathbf{R})$ *называется N-масштабирующей, если она может быть представлена в виде:* $\varphi(x)=\sqrt{N}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} h_n\varphi(Nx-n)$, (1)

где числа h_n, $n\in\mathbf{Z}$ *удовлетворяют условию* $\sum_{n\in\mathbf{Z}}|h_n|^2<\infty$. *Равенство* (1) *называется масштабирующим уравнением. Набор* $\{h_n\}_{n\in Z}$ *коэффициентов разложения в уравнении* (1) *называется масштабирующим фильтром.*

Сделаем преобразование Фурье масштабирующего соотношения:

$$\hat{\varphi}(\omega)=\sqrt{N^{-1}}\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} h_n\, e^{-in\omega/N}\,\hat{\varphi}(\omega/N).$$

Положим, $H_0(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} h_n\, e^{-in\omega}$, (2)

тогда $\hat{\varphi}(\omega)=H_0\left(\dfrac{\omega}{N}\right)\hat{\varphi}\left(\dfrac{\omega}{N}\right)$. (3)

Функцию $H_0(\omega)$ будем называть частотной функцией масштабирующей функции $\varphi(x)$.

Масштабирующие функции на основе *B*-сплайнов. Покажем, что *B*-сплайны являются масштабирующими функциями для любого $N>1$. Хорошо известно [1], [2], что *B*-сплайны являются 2-масштабирующими функциями. *B*-сплайн нулевого порядка есть функция Хаара $\varphi_0(x)$ (характеристическая функция промежутка [0,1]). *B*-сплайн $\varphi_1(x)$ порядка 1 с носителем на промежутке [0,2] можно записать в виде свертки с $\varphi_0(x)$ с собой [2], $\varphi_1(x)=\varphi_0*\varphi_0(x)$. *B*-сплайны высших порядков определяются индуктивно: $\varphi_{n+1}=\varphi_n*\varphi_0$. В дальнейшем будем считать, что для *B*-сплайна $\varphi_n(x)$ носитель находится на промежутке $[-(n+1)/2, (n+1)/2]$ в случае нечетного n, а в случае четного n – на промежутке $[-n/2, n/2+1]$. Тогда преобразование Фурье *B*-сплайна $\varphi_n(x)$ имеет вид [1], [2]:

$$\hat{\varphi}_n(\omega)=e^{-iK\omega/2}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^{n+1}, \tag{4}$$

где $K=0$ – в случае нечетного n и $K=1$ – в случае четного n.

Теорема 1. *B-сплайны* $\varphi_n(x)$ *порядка n являются N-масштабирующими функциями для любого целого* $N>1$. *При этом правая часть масштабирующего соотношения* $\varphi(x)=\sqrt{N}\sum_k h_k\varphi(Nx-k)$ *является конечной суммой. В случае нечетного n коэффициенты* h_k *находятся по формуле:*

$$h_k=\frac{1}{\sqrt{N}N^n}\sum_\alpha\frac{(n+1)!}{\alpha_0!\alpha_1!\ldots\alpha_{N-1}!}, \tag{5}$$

где суммирование производится по всем мультииндексам $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1})$, *удовлетворяющих двум условиям:* $|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{N-1}=n+1$ *и* $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(N-1)\alpha_{N-1}-(N-1)(n+1)/2=k$, *индекс k меняется от* $k=-(N-1)(n+1)/2$ *до* $k=(N-1)(n+1)/2$.

В случае четного n, коэффициенты h_k *находятся по той же формуле* (5), *где суммирование производится по всем мультииндексам* $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1})$, *удовлетворяющих двум условиям:* $|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{N-1}=n+1$ *и* $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(N-1)\alpha_{N-1}-(N-1)n/2=k$, *индекс k меняется от* $k=-(N-1)n/2$ *до* $k=(N-1)n/2+1$.

Доказательство см. в [4].

Пример 1. Рассмотрим *B*-сплайн $\varphi(x)$ степени 1, $\varphi(x)=\begin{cases}1-|x|, & x\in[-1,1],\\ 0 & \text{при остальных } x.\end{cases}$

Преобразование Фурье данной функции: $\hat{\varphi}(\omega)=\left(\dfrac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^2=2\dfrac{1-\cos\omega}{\omega^2}$. Легко видеть, что при $N=3$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{3}\varphi(3x+2)+\frac{2}{3}\varphi(3x+1)+\varphi(3x)+\frac{2}{3}\varphi(3x-1)+\frac{1}{3}\varphi(3x-2).$$

$$H_3(\omega)=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(e^{i2\omega}+2e^{i\omega}+3+2e^{-i\omega}+e^{-i2\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(3+4\cos\omega+2\cos2\omega\right).$$

При любом целом $N>1$ имеет место следующее N-масштабирующее соотношение:

$$\varphi(x)=\sum_{n=-N+1}^{N-1}\frac{N-|n|}{N}\varphi(Nx-n).$$

Отметим, что сдвиги $\{\varphi(x-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ образуют базис пространства V_0, но этот базис не ортогональный.

2. N-кратномасштабное разложение. Определим здесь основные конструкции кратномасштабного разложения для случая произвольного целочисленного коэффициента масштабирования $N>1$, более подробно об этом см. [1], [3].

Орторгональным N-кратномасштабным разложением пространства $L^2(\mathbf{R})$ называется последовательность замкнутых вложенных друг в друга подпространств $\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots$, обладающая свойствами:

1) замыкание их объединения совпадает с $L^2(\mathbf{R})$, $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L^2(\mathbf{R})$;

2) пересечение всех подпространств – нулевое, $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$;

3) $f(x)\in V_j \iff f(Nx)\in V_{j+1}$;

4) существует такая функция $\varphi(x)\in V_0$, называемая масштабирующей, что функции $\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n)$, $n\in\mathbf{Z}$ образуют ортонормированный базис пространства V_0.

Поскольку пространства V_j являются масштабированными пространства V_0, то из свойства 4 сразу вытекает, что функции

$$\varphi_{j,n}(x)=\sqrt{N^j}\varphi(N^jx-n),\quad n\in\mathbf{Z} \tag{6}$$

образуют ортонормированный базис пространства V_j для любого j.

Из того, что $\varphi(x)\in V_0\subset V_1$ следует, что функция $\varphi(x)$ раскладывается по базису пространства V_1, т. е. является N-масштабирующей функцией, $\varphi(x)=\sqrt{N}\sum_n h_n\varphi(Nx-n)$.

Если $\varphi(x)$ – N-масштабирующая функция, то для любых $j,\ k\in\mathbf{Z}$ имеет место следующее разложение:

$$\varphi_{j-1,k}(x)=\sum_n h_{n-Nk}\,\varphi_{j,n}(x)=\sum_n h_n\,\varphi_{j,n+Nk}(x). \tag{7}$$

Напомним [1], [2], что целочисленные сдвиги $\varphi_n(x)=\varphi(x-n)$ образуют ортонормированный базис подпространства $V_0\subset L^2(\mathbf{R})$, тогда и только тогда, когда $\sum_{n\in Z}|\hat\varphi(\omega+2\pi n)|^2=1$ *п.в.*

Отсюда следует [1], [3], что если сдвиги $\varphi_n(x)=\varphi(x-n)$ масштабирующей функции $\varphi(x)$ образуют ортонормированный базис подпространства V_0, то частотная функция $H_0(\omega)$ обладает следующим свойством: $\sum_{m=0}^{N-1}|H_0(\omega+2\pi m/N)|^2=1$ п. в. (8)

2.1. Вейвлеты. Хорошо известно [1], [2], что в случае $N=2$ в ортогональном кратномасштабном уточняющем разложении каждое подпространство V_j имеет в пространстве V_{j+1} ортогональное дополнение W_j и $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$. Существует функция $\psi(x)\in W_0$, называемая материнским вейвлетом, такая, что множество ее сдвигов $\psi(x-n)$ образует ортонормированный базис пространства W_0, а функции $\psi_{j,n}(x)=\sqrt{2^j}\psi(2^jx-n)$, $n\in\mathbf{Z}$ образуют ортонормированный базис пространства W_j для каждого $j\in\mathbf{Z}$.

В случае произвольного целочисленного коэффициента масштабирования $N>1$ ситуация несколько отличается. Масштабирующей функции $\varphi(x)$ соответствует N-1 вейвлетов $\psi^1(x),\ \ldots,\ \psi^{N-1}(x)$ [1], [3]

$$\psi^i(x)=\sqrt{N}\sum_n g_n^i\,\varphi(Nx-n),\quad i=1,2,\ldots,N-1.$$

В частотной области имеем:

$$\psi^i(\omega)=G_i\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat\varphi\left(\frac{\omega}{N}\right),\quad i=1,2,\ \ldots,\ N\text{-}1,$$

где $G_i(\omega)=\sqrt{N^{-1}}\sum_n g_n^i\,e^{-in\omega}$ – частотные функции, соответствующие вейвлетам $\psi^i(x)$. Они удовлетворяют [3], [1], свойству унитарности матрицы, указанной ниже в формуле (14).

Тогда мы имеем N-1 пространств вейвлетов $W_0^i,\ i=1,2,\ldots,N-1$ и следующее ортогональное разложение для любого j:

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j^1\oplus\cdots\oplus W_j^{N-1}.$$

Функции

$$\psi_{j,n}^i(x)=\sqrt{N^j}\psi^i(N^jx-n),\quad j,n\in Z,\ i=1,2,\ldots,N-1 \tag{9}$$

образуют ортонормированные базисы пространств вейвлетов $W_0^i,\ i=1,2,\ldots,N-1$.

3. Вейвлет-преобразование. Предположим сначала, что мы имеем дело с ортонормированными вейвлетами. Тогда у нас есть масштабирующая функция $\varphi(x)$ и вейвлеты $\psi^1(x),\ \ldots,\ \psi^{N-1}(x)$. Вейвлет-разложение сигнала $A=\{a_n\}$ производится по формулам [1], [3]:

$$a_{1,k}=\sum_n\overline{h_n}\,a_{n+Nk},$$

$$d_{1,k}^i=\sum_n\overline{g_n^i}\,a_{n+Nk},\quad i=1,2,\ldots,N-1, \tag{10}$$

где $\{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ и $\{g_n^i\}_{n\in\mathbf{Z}}$ – фильтры вейвлетов $\varphi(x)$ и $\psi^i(x)$. Запишем последние формулы в виде свертки. Для этого введем следующие коэффициенты: $h_n^*=\overline{h_{-n}}$, $g_n^{i*}=\overline{g_{-n}^i}$. Тогда

$$a_{1,k}=\sum_n h_n^*\,a_{Nk-n},$$

$$d_{1,k}^i=\sum_n g_n^{i*}\,a_{Nk-n},\quad i=1,2,\ldots,N-1. \tag{11}$$

Таким образом, вейвлет-разложение производится сопряженными фильтрами $\{h_n^*\}$, $\{g_n^{i*}\}$ с последующей N-адической децимацией (выбором только элементов с номерами Nk). Процедуру разложения можно повторить, применив ее к набору коэффициентов cA_1.

Восстановление массива $A = \{a_n\}$ по коэффициентам вейвлет-разложения $cA_1 = \{a_{1,k}\}$ и $cD_1 = \{d_k^1, \dots, d_k^{N-1}\}$ производится следующим образом: $a_n = \sum_k h_{n-Nk} a_{1,k} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k \in Z} g_{n-Nk}^i d_{1,k}^i$. (12)

Последнюю формулу можно также записать в виде свертки, сделав обратную децимацию массивов $cA_1 = \{a_{1,k}\}$ и $cD_1 = \{d_k^1, \dots, d_k^{N-1}\}$,

$$\tilde{a}_{1,m} = \begin{cases} a_{1,k}, \text{ если } m = Nk, \\ 0, \quad \text{если } n \text{ не кратно } N, \end{cases}$$

$$\tilde{d}_{1,m}^i = \begin{cases} d_{1,k}^i, \text{ если } m = Nk, \\ 0, \quad \text{если } n \text{ не кратно } N. \end{cases}$$

Тогда формула (12) принимает вид:
$$a_{j,n} = \sum_{m \in Z} (h_{n-m} \tilde{a}_{1,m} + g_{n-m} \tilde{d}_{1,m}^i). \tag{13}$$

3.1. Разложение и восстановление в неортогональном случае. Формулы вейвлет-разложения и восстановления (10) – (13) установлены только для ортогонального случая. Они неприменимы, если разложение

$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}^1 \oplus \dots \oplus W_{j-1}^{N-1}$ не является ортогональным и функции

$$\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{N^j} \varphi(N^j x - n), \quad \psi_{j,n}^i(x) =$$
$$= \sqrt{N^j} \psi^i(N^j x - n), \quad n \in \mathbf{Z}, i = 1, 2, \dots, N-1$$

не образуют ортонормированных систем. Предположим, что разложение сигнала $\{a_k\}$ производится некоторыми (неортогональными) фильтрами $\{h_k\}$ и $\{g_n^i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$-1 по формулам:

$$a_{1k} = \sum_n h_n a_{Nk-n}, \quad d_{1,k}^i = \sum_n g_n^i a_{Nk-n}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

и найдем другие фильтры $\{\tilde{h}_n\}, \tilde{g}_n^i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, которые обеспечивают точное восстановление сигнала по формулам типа (12). Задачу удобно решить на уровне формальных степенных рядов. Пусть $X(z) = \sum_n a_n z^n$ – ряд, соответствующий сигналу $\{a_k\}$. Определим передаточные функции заданных фильтров,

$$H_0(z) = \sum_n h_n z^n, \quad H_i(z) = \sum_n g_n^i z^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Тогда их действие на сигнал определяется умножением:

$$X_0(z) = H_0(z) X(z),$$
$$X_i(z) = H_i(z) X(z), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

При вейвлет-разложении необходимо еще провести выборку элементов с номерами Nk. На уровне формальных степенных рядов эта процедура сводится к выбору элементов ряда со степенями, кратными N. Пусть $\rho = e^{i2\pi/N}$, тогда легко видеть, что

$$\frac{1}{N}\left(X(z) + X(\rho z) + X(\rho^2 z) + \dots + X(\rho^{N-1} z)\right) =$$
$$= \sum_k a_{Nk} z^{Nk} = \sum_k a_{Nk} (z^N)^k = A(z^N).$$

Здесь мы использовали свойство $1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{N-1} = 0$, которое верно для любого корня $\rho \neq 1$ из единицы степени N. Таким образом, на уровне степенных рядов вейвлет-разложение производится по формулам:

$$A_0(z^N) = \frac{1}{N} \sum_{s=-}^{N-1} H_0(\rho^s z) X(\rho^s z),$$

$$A_i(z^N) = \frac{1}{N} \sum_{s=-}^{N-1} H_i(\rho^s z) X(\rho^s z), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Восстановление производим другими фильтрами $G_i(z) = \sum_n \tilde{g}_n^i z^n$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$-1, по формуле: $a_n = \sum_k \tilde{g}_{n-Nk}^0 a_{1,k} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k \in Z} \tilde{g}_{n-Nk}^i d_{1,k}^i$.

На уровне степенных рядов это означает следующее:

$$\sum_{i=0}^{N-1} G_i(z) A_i(z^N) =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} G_i(z) \sum_{s=0}^{N-1} H_i(\rho^s z) X(\rho^s z) =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} G_i(z) H_i(\rho^s z) \right) X(\rho^s z) = X(z).$$

Поэтому для точного восстановления достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\sum_{s=0}^{N-1} G_i(z) H_i(z) = N \text{ (при } s = 0),$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} G_i(z) H_i(\rho^s z) = 0 \text{ для } s = 1, 2, \dots, N\text{-}1.$$

Это означает, что:

$$\begin{pmatrix} G_0(z) & G_1(z) & \cdots & G_{N-1}(z) \\ G_0(\rho z) & G_1(\rho z) & \cdots & G_{N-1}(\rho z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_0(\rho^{N-1} z) & G_1(\rho^{N-1} z) & \cdots & G_{N-1}(\rho^{N-1} z) \end{pmatrix} \cdot$$
$$\begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho z) & \cdots & H_0(\rho^{N-1} z) \\ H_1(z) & H_1(\rho z) & \cdots & H_1(\rho^{N-1} z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho z) & \cdots & H_{N-1}(\rho^{N-1} z) \end{pmatrix} = N$$

Мы получили следующий факт.

Теорема 2. *Если матрица фильтров разложения*

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho z) & \cdots & H_0(\rho^{N-1} z) \\ H_1(z) & H_1(\rho z) & \cdots & H_1(\rho^{N-1} z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho z) & \cdots & H_{N-1}(\rho^{N-1} z) \end{pmatrix} \tag{14}$$

невырождена, то возможно точное восстановление сигнала фильтрами $G_i(z)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$-1, матрица которых

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} G_0(z) & G_0(\rho z) & \cdots & G_0(\rho^{N-1}z) \\ G_1(z) & G_1(\rho z) & \cdots & G_1(\rho^{N-1}z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{N-1}(z) & G_{N-1}(\rho z) & \cdots & G_{N-1}(\rho^{N-1}z) \end{pmatrix} \quad (15)$$

является транспонированной к обратной матрице $H(z)$ *исходных фильтров.*

Замечание. В ортогональном случае $H(z)$ – унитарная матрица, а $G(z)$ – комплексно сопряженная к $H(z)$.

4. Вейвлеты на основе сплайнов. Предположим, что $\varphi(x)$ – B-сплайновая масштабирующая функция. Как известно, она не определяет ортогональный кратномасштабный анализ. Известно также, что ее частотная функция $H_0(\omega)$ является полиномиальной. Найдем вейвлеты $\psi^1(x)$, … , $\psi^{N-1}(x)$, с полиномиальными частотными функциями, которые обеспечивают N-канальное разложение сигнала с возможностью его точного восстановления дуальными вейвлетами $\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}^1(x), \ldots, \tilde{\psi}^{N-1}(x)$.

4.1. Общие конструкции. Пусть $\varphi(x)$ – B-сплайновая масштабирующая функция и $H_0(\omega)$ – ее частотная функция. Пусть $H_1(\omega)$,… , $H_{N-1}(\omega)$ – частотные (полиномиальные) функции фильтров разложения. Согласно теореме 2, для точного восстановления необходимо, чтобы была невырожденной матрица вида (14), где $z=e^{-i\omega}$ и $\rho=e^{i2\pi/N}$. Мы предполагаем, что сомножитель $1/\sqrt{N}$ включен в частотные функции, как в формуле (2). Матрица (14) имеет специальный вид. Оказывается, что от этого специального вида матрицы $H(z)$ можно избавиться [3] преобразованием Фурье по циклической группе $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ = $\{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{N-1}\}$. Определим

$$A_{i,j}(z)=\frac{1}{N}\sum_{w^N=z} w^{-j}H_i(w).$$

Нетрудно проверить, что сумма справа зависит от $z=w^N$. Обратное преобразование определяется формулой $H_i(z)=\sum_{j=0}^{N-1} z^j A_{i,j}(z^N)$.

Тогда последнее соотношение может быть представлено как:

$$H(z)=A(z^N)R(z)=$$

$$=A(z^N)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z & \rho z & \cdots & \rho^{N-1}z \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{N-1} & \rho^{N-1}z^{N-1} & \cdots & \rho^{(N-1)^2}z^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В этом выражении матрица $A(z^N)$ является уже произвольной невырожденной матрицей с полиномиальными элементами. Специфика матрицы $H(z)$ отражена теперь в матрице $R(z)$. Задавая $A(z^N)$, мы можем построить матрицу $H(z)$ и вместе с ней частотные функции $H_1(\omega)$, … , $H_{N-1}(\omega)$ вейвлетов, следовательно, и сами вейвлеты $\psi^1(x)$, … , $\psi^{N-1}(x)$.

В предположении, что полиномиальная частотная функция $H_0(z)$ является заданной, можно считать, что первая строка матрицы $A(z^N)$ известна:

$$A_{0,j}(z)=\frac{1}{N}\sum_{w^N=z} w^{-j}H_0(w).$$

Теперь нужно образовать остальные строки. Поскольку каждый элемент первой строки матрицы $A(z)$ является многочленом, то первая строка может быть представлена в виде:

$$\alpha(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{g-1}z^{g-1},$$

где α_0, α_1, ..., α_{g-1} – g векторов из $\mathbf{C}^N$. В более общем случае

$$\alpha(z)=\alpha_0 p_0(z)+\alpha_1 p_1(z)+\cdots+\alpha_{g-1}p_{g-1}(z),$$

где α_0, α_1, ..., α_{g-1} – g линейно независимых векторов из $\mathbf{C}^N$ и $p_0(z)$, $p_1(z)$, ..., $p_{g-1}(z)$ – некоторые многочлены.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1})$ – g *линейно независимых векторов из* $\mathbf{C}^N$ *и* $p_0(z)$, $p_1(z)$, ..., $p_{g-1}(z)$ – *некоторые многочлены, ни один из которых не обращается в нуль на единичной окружности* $z=e^{it}$. *Тогда существует полиномиальная петля* $A(z)$ *на группе* $GL(N,\mathbf{C})$), *такая, что первая строка из* $A(z)$ *есть* $\sum_{i=0}^{g-1}\alpha_i p_i(z)$. *При этом степень петли* $A(z)$ *не превосходит максимальной степени многочленов* $p_i(z)$.

Доказательство. Будем использовать индукцию по максимальной степени k многочленов $p_i(z)$. Без ограничения общности можно считать, что сумма $\sum_{i=0}^{g-1}\alpha_i p_i(z)$ упорядочена по возрастанию степеней многочленов $p_i(z)$. Если $k=0$, то α_0 – это некоторая ненулевая вектор-строка, и мы можем положить $A(z)=A$, где A – это невырожденная матрица с первой строкой α_0.

Предположим, что $k>0$ и что результат был доказан для всех меньших k. Мы можем считать, что $\alpha_{g-1}\neq 0$ (иначе мы попадаем в индуктивное предположение). Пусть P есть одномерная проекция на вектор α_{g-1} вдоль подпространства, образованного первыми векторами (α_0, α_1, ..., α_{g-2}). Тогда $\alpha_{g-1}P=\alpha_{g-1}$, $\alpha_i P=0$ для $i=0, 1, \ldots, g-2$. Напомним, что оператор проектирования обладает следующими свойствами: $P^2=P$, $P(1-P)=0$, $(1-P)^2=1-P$. Теперь определим:

$$\beta(z)=\alpha(z)(1-P+p_{g-1}(z)^{-1}P)=$$

$$=(\alpha_0 p_0(z)+\alpha_1 p_1(z)+\cdots$$

$$+\alpha_{g-1}p_{g-1}(z))(1-P+p_{g-1}(z)^{-1}P)=$$

$$=p_{g-1}(z)^{-1}\alpha_0 P+$$

$$+p_0(z)\alpha_0(1-P)+p_1(z)\alpha_1(1-P)+$$

$$+p_1(z)p_{g-1}(z)^{-1}\alpha_1 P+\cdots+p_{g-1}(z)p_{g-1}(z)^{-1}\alpha_{g-1}P+$$

$$+p_{g-1}(z)\alpha_{g-1}(1-P)=$$

$$=\alpha_{g-1}+\alpha_0 p_0(z)+\alpha_1 p_1(z)+\cdots+\alpha_{g-2}p_{g-2}(z).$$

Поэтому $\beta(z)$ есть полином по z степени, меньшей, чем k, поскольку $\deg(p_{g-2}(z)) < \deg(p_{g-1}(z)) = k$. Следовательно, по индуктивному предположению, существует полиномиальная петля $B(z)$ степени $\deg(p_{g-2}(z))$, такая, что первая строка

$B(z)$ есть $\beta(z)$. Тогда, полагая $A(z) = B(z)(1 - P + p_{g-1}(z)P)$, из полученного выражения для $\beta(z)$ следует, что первая строка $A(z)$ есть $\alpha(z)$. Это заканчивает индукцию и, таким образом, доказательство теоремы 3.

4.2. Фильтры разложения и восстановления на основе *B*-сплайнов. Как известно, частотная функция $H_0(z)$ для B-сплайновой масштабирующей функции является полиномиальной и не определяет ортогональный кратномасштабный анализ. Приведенные выше конструкции позволяют строить неортогональные вейвлеты с полиномиальными частотными функциями, для которых можно найти дуальные функции, которые обеспечивают точное восстановление сигнала.

Матрица передаточных функций $G(z)$ фильтров восстановления является транспонированной к обратной матрице $H(z)$ исходных фильтров. Поскольку $H(z) = A(z^N)R(z)$, то

$$G'(z) = H^{-1} = R^{-1}A^{-1} =$$

$$= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & z^{-1} & \cdots & z^{-(N-1)} \\ 1 & (\rho z)^{-1} & \cdots & \rho^{-(N-1)1} z^{-(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \rho^{-(N-1)} z^{-1} & \cdots & \rho^{-(N-1)^2} z^{-(N-1)} \end{pmatrix} A(z^N)^{-1}.$$

Последняя формула дает возможность найти фильтры восстановления (дуальные вейвлеты). Продемонстрируем это на примере B-сплайна степени 1 и параметра масштабирования $N = 3$.

Пример 2. Пусть $N = 3$. Рассмотрим B-сплайн $\varphi(x)$ степени 1 (см. пример 1). Как мы уже ранее отмечали, частотная функция имеет вид:

$$H_0(z) = \frac{1}{3^2} z^{-2}\left(1 + z + z^2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{9} z^{-2}\left(1 + 2z + 3z^2 + 2z^3 + z^4\right).$$

Вычислим $A_{0,j}(z) = \frac{1}{N}\sum_{w^N = z} w^{-j} H_0(w), \quad z \in \mathbf{T}$, $j = 0,1,2$.

Положим $z = e^{-i\omega}$ и $\rho = e^{i2\pi/3}$, тогда, если $w_0 = e^{-i\omega/3}$, то суммирование производится по следующим значениям $w = \{w_0, \rho w_0, \rho^2 w_0\}$. В дальнейших вычислениях опустим множитель 1/9. Тогда положим,

$$m_0(z) = z^{-2}\left(1 + z + z^2\right)^2 = z^{-2} + 2z^{-1} + 3 + 2z^1 + z^2$$

и вычислим преобразование Фурье на циклической группе третьего порядка $\{1, \rho, \rho^2\}$:

$$A_{0,0}(z) = \frac{1}{3}\sum_{w^3 = z} m_0(w) = \frac{1}{3}(9) = 3,$$

$$A_{0,1}(z) = \frac{1}{3}\sum_{w^3 = z} w^{-1} m_0(w) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3w^{-3} + 6\right) = w^{-3} + 2,$$

$$A_{0,2}(z) = \frac{1}{3}\sum_{w^3 = z} w^{-2} m_0(w) = \frac{1}{3}\left(6w^{-3} + 3\right) = 2w^{-3} + 1.$$

Раскладываем первую строку по степеням с векторными коэффициентами:

$$\left(A_{0,0}(z), A_{0,1}(z), A_{0,2}(z)\right) =$$

$$= \left(3, 2 + w^{-3}, 1 + 2w^{-3}\right) = (3,2,1) + (0,1,2)z^{-1},$$

$$\alpha_0 = (3,2,1), \quad \alpha_1 = (0,1,2), \; w^{-3} = z^{-1}.$$

Пусть P есть одномерная проекция на вектор α_1 вдоль α_0, т. е., $\alpha_1 P = \alpha_1$ и $\alpha_0 P = 0$. Теперь определим:

$$\beta(z) = \alpha(z)(1 - P + zP) =$$

$$= (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1})(1 - P + zP) = \alpha_0 + \alpha_1.$$

Легко проверить, что $(1 - P + z^{-1}P)$ является обратной матрицей для $(1 - P + zP)$, поэтому $\alpha(z) = \beta(z)(1 - P + z^{-1}P) = (\alpha_0 + \alpha_1)(1 - P + z^{-1}P)$, где $\alpha_0 + \alpha_1 = (3,3,3)$.

Дополняем эту первую строку $\alpha_0 + \alpha_1$ до невырожденной матрицы A, например единичными строками (0, 1, 0) и (0, 0, 1).

Тогда $A(z) = A(1 - P + z^{-1}P)$. Найдем выражение оператора $(1 - P + z^{-1}P)$. Для этого дополним векторы $\alpha_0 = (3,2,1)$, $\alpha_1 = (0,1,2)$ до базиса $\mathbf{C}^3$.

Пусть $\alpha_2 = (0,0,1)$. В этом базисе оператор $(1 - P + z^{-1}P)$ принимает вид, указанный в (17):

$$1 - P + z^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Найдем их выражение в стандартном базисе e_0, e_1, e_2 пространства $\mathbf{C}^3$. Для этого найдем матрицу B перехода от одного базиса, к другому, $\alpha = Be$, $e = B^{-1}\alpha$. Пусть $P^j_{\alpha k}$ – матрица оператора $(1 - P + z^{-1}P)$ в базисе (α_0, α_1, α_2). Матрица оператора $(1 - P + z^{-1}P)$ в стандартном базисе вычисляется по формуле $P_e = B^{-1}P_\alpha B$, $P^p_{es} = (B^{-1})^k_s P^j_{\alpha k} B^p_j$. Тогда оператор $(1 - P + z^{-1}P)$ в стандартном базисе имеет матрицу:

$$P_e(z)=\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & z^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2/3(1-z^{-1}) & 4/3(1-z^{-1})\\ 0 & z^{-1} & -2(1-z^{-1})\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Это позволяет вычислить полиномиальную матрицу:

$$A(z)=AP_e=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2/3(1-z^{-1}) & 4/3(1-z^{-1})\\ 0 & z^{-1} & -2(1-z^{-1})\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2+z^{-1} & 1+2z^{-1}\\ 0 & z^{-1} & -2(1-z^{-1})\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу частотных функций по формуле: $H(z)=A(z^N)R(z)$,

$$\begin{pmatrix}m_0(z) & m_0(\rho z) & m_0(\rho^2 z)\\ m_1(z) & m_1(\rho z) & m_1(\rho^2 z)\\ m_2(z) & m_2(\rho z) & m_2(\rho^2 z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2+z^{-3} & 1+2z^{-3}\\ 0 & z^{-3} & -2(1-z^{-3})\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ z & \rho z & \rho^2 z\\ z^2 & \rho^2 z^2 & \rho^4 z^2\end{pmatrix}.$$

Получаем: $m_0(z)=z^{-2}+2z^{-1}+3+2z^1+z^2$, $m_1(z)=z^{-2}+2z^{-1}-2z^2$, $m_2(z)=z^2$.

Поэтому $H_0(z)=\frac{1}{9}(z^{-2}+2z^{-1}+3+2z^1+z^2)$, $H_1(z)=\frac{1}{9}(z^{-2}+2z^{-1}-2z^2)$, $H_2(z)=\frac{1}{9}z^2$.

Матрица $G(z)$ фильтров восстановления находится обращением матрицы $H(z)$, $G(z)=R(z)^{-1}A(z^N)^{-1}$,

$$\begin{pmatrix}G_0(z) & G_1(z) & G_2(z)\\ G_0(\rho z) & G_1(\rho z) & G_2(\rho z)\\ G_0(\rho^2 z) & G_1(\rho^2 z) & G_2(\rho^2 z)\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & z^{-1} & z^{-2}\\ 1 & \rho^{-1}z^{-1} & \rho^{-2}z^{-2}\\ 1 & \rho^{-2}z^{-1} & \rho^{-4}z^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & -1/3(1+2z^3) & 1/3(1-4z^3)\\ 0 & z^3 & -2(1-z^3)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

При этом нужно учесть, что при вейвлет-разложении участвуют сопряженные фильтры вейвлетов. Это означает, что следует обращать матрицу $H(z)$, с комплексно сопряженными элементами. Поскольку коэффициенты фильтров вещественные, достаточно заменить $z=e^{-i\omega}$ на z^{-1}. Выбираем элементы первой строки и получаем следующие фильтры восстановления: $G_0(z)=1$, $G_1(z)=-2z^{-3}+3z^{-2}-1$, $G_2(z)=-4z^{-3}+6z^{-2}+1-6z+3z^2$.

Таким образом, фильтры восстановления имеют следующие ненулевые элементы: $\tilde{h}_0=\sqrt{3}$, $\tilde{g}^1_{-3}=-2\sqrt{3}$, $\tilde{g}^1_{-2}=3\sqrt{3}$, $\tilde{g}^1_0=-\sqrt{3}$, $\tilde{g}^2_{-3}=-4\sqrt{3}$, $\tilde{g}^2_{-2}=6\sqrt{3}$, $\tilde{g}^2_0=\sqrt{3}$, $\tilde{g}^2_1=$ $=-6\sqrt{3}$, $\tilde{g}^2_2=3\sqrt{3}$.

Литература

1. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М.; Ижевск: РХД, 2001. – 494 с.
2. Смоленцев, Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. – М., ДМК Пресс, 2005. – 303 с.
3. Bratteli, O. T. Wavelet filters and infinite-dimensional unitary groups / O. Bratteli, P. E. Jorgensen // http://arXiv.org:math. FA/0001171 v 3, 2000. – 31 p.
4. Smolentsev, N. K. Construction of some types wavelets with coefficient of scaling N / N. K. Smolentsev, P. N. Podkur // http: // arXiv.org: math. FA/0612573v1, 2006. – 19 p.