УДК 513

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ВЕЙВЛЕТОВ С ПАРАМЕТРОМ МАСШТАБИРОВАНИЯ 3

П. Н. Подкур

Традиционно изучаются и используются вейвлеты с параметром масштабирования 2. В данной статье строятся вейвлеты типа Хаара, Кантора, Котельникова-Шеннона и Мейера с параметром масштабирования 3. Все конструкции легко распространяются на случай произвольного натурального коэффициента масштабирования N.

1. Введение

Использование степеней двойки при построении кратномасштабного анализа удобно во многих отношениях, хотя и не является обязательным. Можно вместо 2 использовать любое целое число и даже рациональное, большее единицы [1]. При этом, если параметр сжатия есть целое число, большее единицы, то масштабирующей функции $\varphi(x)$ соответствует несколько вейвлетов $\psi(x)$. Пусть, например, параметр сжатия равен 3. Тогда масштабирующая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет соотношению:

$$\varphi(x)=\sqrt{3}\sum_n h_n\varphi(3x-n), \tag{1}$$

где для чисел h_n, $n\in\mathbf{Z}$ предполагается условие $\sum_{n\in\mathbf{Z}}|h_n|^2<\infty$. Набор таких чисел называется масштабирующим фильтром. Сомножитель $\sqrt{3}$ используется для того, чтобы функции $\sqrt{3}\varphi(3x-n)$ имели бы ту же L^2-норму, что и $\varphi(x)$.

Масштабирующая функция порождает уточняющую последовательность замкнутых вложенных подпространств $L^2(\mathbf{R})$

$$\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots,$$

такую, что замыкание их объединения совпадает с $L^2(\mathbf{R})$, пересечение всех подпространств – нулевое, $f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(3x)\in V_{j+1}$ и целочисленные сдвиги $\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n)$, $n\in\mathbf{Z}$ функции $\varphi(x)\in V_0$ образуют ортонормированный базис пространства V_0. Тогда пространство V_1 порождается функциями $\varphi_{1,n}(x)=\sqrt{3}\varphi(3x-n)$, $n\in\mathbf{Z}$, т. е. сдвигами функции $\varphi(3x)$ на числа кратные 1/3. Эквивалентно, V_1 порождается целочисленными сдвигами трех функций $\sqrt{3}\varphi(3x)$, $\sqrt{3}\varphi(3x-1)$ и $\sqrt{3}\varphi(3x-2)$. Поэтому пространство V_1 «втрое больше», чем V_0. Необходимо два пространства «того же размера», что и V_0, чтобы дополнить V_0 до пространства V_1. Следовательно, ортогональное дополнение к V_0 будет состоять из двух пространств W_0^1 и W_0^2, базисы которых порождаются двумя вейвлетами $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$. Соответственно получаются два уравнения:

$$\psi^1(x)=\sqrt{3}\sum_n g_n^1\,\varphi(3x-n),$$
$$\psi^2(x)=\sqrt{3}\sum_n g_n^2\,\varphi(3x-n). \tag{2}$$

Если сделать преобразование Фурье, то масштабирующее соотношение и выражения для вейвлетов принимают вид:

$$\hat{\varphi}(\omega)=H_3\left(\frac{\omega}{3}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{3}\right),\quad \psi^1(\omega)=G_3^1\left(\frac{\omega}{3}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{3}\right),$$
$$\psi^2(\omega)=G_3^2\left(\frac{\omega}{3}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{3}\right), \tag{3}$$

где: $H_3(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n\,e^{-in\omega}$,

$G_3^1(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n^1\,e^{-in\omega}$, $G_3^2(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n^2\,e^{-in\omega}$

– частотные функции, соответствующая $\varphi(x)$ и вейвлетам $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$. В случае параметра масштабирования 3 все эти частотные функции связаны между собой так, что следующая матрица является унитарной [1]:

$$\begin{pmatrix} H_3(\omega) & G_3^1(\omega) & G_3^2(\omega)\\ H_3\left(\omega+\frac{2\pi}{3}\right) & G_3^1\left(\omega+\frac{2\pi}{3}\right) & G_3^2\left(\omega+\frac{2\pi}{3}\right)\\ H_3\left(\omega+\frac{4\pi}{3}\right) & G_3^1\left(\omega+\frac{4\pi}{3}\right) & G_3^2\left(\omega+\frac{4\pi}{3}\right)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Обычно считается, что функция $H_3(\omega)$ известна и для построения вейвлетов $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ по формулам (3) находят $G_3^1(\omega)$ и $G_3^2(\omega)$ из свойств унитарности данной матрицы.

2. Вейвлеты Хаара с параметром масштабирования 3. Для функции Хаара, $\varphi(x)=1$, если $x\in[0,1)$ и $\varphi(x)=0$ для остальных x, легко выписывается масштабирующее соотношение:

$$\varphi(x)=\varphi(3x)+\varphi(3x-1)+\varphi(3x-2)=$$
$$=\sqrt{3}\sum_n h_n\varphi(3x-n), \tag{5}$$

где ненулевые h_n только такие: $h_0=h_1=h_2=1/\sqrt{3}$.

Найдем вейвлет-функции $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$. Пусть $\psi^1(x)\in W_0^1$. Поскольку $W_0^1\subset V_1$, тогда $\psi^1(x)$ раскладывается по базису $\{\varphi_{1,n}(x)\}$ пространства V_1: $\psi^1=\sum_n c_n\varphi_{1,n}$. Поскольку $\psi^1\perp V_0$, то для любого n имеем: $(\psi^1,\varphi_{0,n})=0$. Пространство V_0 входит в V_1, следовательно, функции $\varphi_{0,n}(x)$ также раскладываются по базису $\{\varphi_{1,n}(x)\}$ пространства V_1: $\varphi_{0,n}=\sum_k h_k\varphi_{1,3n+k}$. Коэффициенты этого разложения для функции $\varphi(x)$ ранее были найдены, $h_0 = h_1 = h_2 = 1/\sqrt{3}$. Очевидно, что для любой функции $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x-n)$ имеем:

$$\varphi_{0,n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{1,3n} + \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{1,3n+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{1,3n+2}\,. \qquad (6)$$

Тогда условие ортогональности ψ^1 к V_0 принимает вид:

$$\left(\psi^1, \varphi_{0,n}\right) =$$

$$= \left(\sum_k c_k \varphi_{1,k}, \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{1,3n} + \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{1,3n+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{1,3n+2}\right) = 0.$$

Так как $\{\varphi_{1,n}(x)\}$ – ортонормированный базис, то из последнего равенства получаем:

$c_{3n} + c_{3n+1} + c_{3n+2} = 0, \quad \forall\, n\,.$

Совершенно аналогично для второго вейвлета $\psi^2 = \sum_n d_n \varphi_{1,n}$ имеем систему уравнений

$d_{3n} + d_{3n+1} + d_{3n+2} = 0, \quad \forall\, n\,.$

Условие ортогональности вейвлетов, $(\psi^1, \psi^2) = 0$: $\sum_n c_n d_n = 0$. Итак, мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} c_{3n} + c_{3n+1} + c_{3n+2} = 0, & \forall\, n, \\ d_{3n} + d_{3n+1} + d_{3n+2} = 0, & \forall\, n, \\ \sum\limits_n c_n d_n = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Система имеет множество решений. Простейшее решение, соответствующее минимальному набору ненулевых коэффициентов находится неоднозначно. Решением будет любая пара ортогональных векторов в плоскости в $\mathbf{R}^3$, заданной уравнением $x+y+z = 0$. Выберем простейшее решение: $c_0 = 1, \ c_1 = -1, \ c_2 = 0$ и $d_0 = -1, \ d_1 = -1, \ d_2 = 2$, остальные c_n и d_n считаем равными нулю. В дальнейшем будем использовать нормированные векторы:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = 0 \quad \text{и}$$

$$d_0 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad d_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad d_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Первому набору коэффициентов соответствует функция:

$$\psi^1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}(x) = = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varphi(3x) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varphi(3x-1). \qquad (8)$$

Второму набору коэффициентов соответствует функция:

$$\psi^2(x) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi_{1,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{6}}\varphi_{1,1}(x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\varphi_{1,2}(x) = = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(3x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(3x-1) + \sqrt{2}\varphi(3x-2). \qquad (9)$$

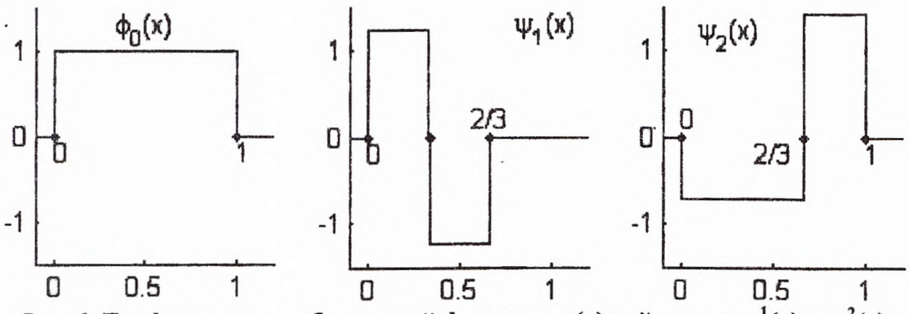

Рис. 1. **Графики масштабирующей функции φ(x) вейвлетов $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$.**

Замечание 1. Как уже отмечалось, решение системы (7) находится неоднозначно. Если $C=(c_0, c_1, c_2)$ и $D=(d_0, d_1, d_2)$ – найденные выше частные решения, то общее нормированное решение системы (7) может быть найдено вращением: $C(t) = C\cos(t)+D\sin(t)$ и $D(t) = -C\sin(t) + D\cos(t)$. Соответствующие вейвлеты имеют выражения:

$$\psi_t^1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sqrt{3}\cos(t) - \sin(t))\varphi(3x) + (-\sqrt{3}\cos(t) - \sin(t))\varphi(3x-1) + \sqrt{2}\sin(t)\varphi(3x-2)\Big),$$

$$\psi_t^2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-\sqrt{3}\sin(t) - \cos(t))\varphi(3x) + (\sqrt{3}\sin(t) - \cos(t))\varphi(3x-1) + \sqrt{2}\cos(t)\varphi(3x-2)\Big).$$

Замечание 2. Построение вейвлетов Хаара легко обобщается на случай любого целого коэффициента масштабирования N.

3. Сингулярный вейвлет Кантора. Соотношение $\varphi(x) = \frac{3}{2}\big(\varphi(3x) + \varphi(3x-2)\big)$ (10)

определяет в качестве масштабирующей функции сингулярную меру, сосредоточенную в точках канторова множества на отрезке [0,1]. Несмотря на то, что функция $\varphi(x)$ даже не локально интегрируема, все остальные характеристики имеют простой смысл. Фильтр коэффициентов $\{h_n\}$ состоит из двух ненулевых элементов: $h_0 = \sqrt{3}/2$, $h_2 = \sqrt{3}/2$. Частотная функция легко находится:

$H_3(\omega) = (1 + e^{-i2\omega})/2 =$

$e^{-i\omega}(e^{i\omega} + e^{-i\omega})/2 = e^{-i\omega}\cos(\omega)$. Тогда из равенства $\hat{\varphi}(\omega) = H_3(\omega/3)\,\hat{\varphi}(\omega/3)$, учитывая, что $\hat{\varphi}(0) = 1$, получаем:

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_3(\omega/3)H_3(\omega/3^2)\cdots =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} e^{-i\omega/3^n}\cos\left(\frac{\omega}{3^n}\right) = e^{-i\omega/2}\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\omega}{3^n}\right). \qquad (11)$$

Последнее бесконечное произведение сходится поточечно на всей числовой прямой и равномерно на компактных подмножествах.

Вейвлеты $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ находятся аналогично. Если $\psi^1 = \sum_n c_n\varphi_{1,n}$ и $\psi^2 = \sum_n d_n\varphi_{1,n}$, то для нахождения коэффициентов мы должны решить следующую систему уравнений: $c_{3n} + c_{3n+2} = 0,\ \forall n$, $d_{3n} + d_{3n+2} = 0,\ \forall n$ и $\sum_n c_n d_n = 0$. Простейшее решение, соответствующее минимальному набору ненулевых коэффициентов, находится неоднозначно. Решением будет любая пара ортогональных векторов в плоскости в $\mathbf{R}^3$, заданной уравнением $x + z = 0$. Выберем простейшее нормированное решение:

$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ c_1 = 0,\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $d_0 = 0,\ d_1 = 1,\ d_2 = 0$,

остальные c_n и d_n считаем равными нулю. Первому набору коэффициентов соответствует вейвлет-функция:

$$\psi^1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2}(x) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varphi(3x) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varphi(3x-2). \qquad (12)$$

Второму набору коэффициентов соответствует вейвлет-функция:

$$\psi^2(x) = \varphi_{1,1}(x) = \sqrt{3}\varphi(3x-1). \qquad (13)$$

Замечание 3. Несмотря на то, что функция Кантора $\varphi(x)$ и соответствующие вейвлеты имеют сложную функциональную трактовку, использование их для вейвлет-разложения сигнала не представляет трудностей. Напомним, что быстрое вейвлет-преобразование сигнала $\{s_k\}$ производится по следующим формулам. Нахождение коэффициентов аппроксимации [1]:

$$a_k = \sum_n \overline{h_n} s_{n+3k} = \overline{h_0}\, s_{3k} + \overline{h_2}\, s_{2+3k} = \frac{\sqrt{3}}{2}(s_{3k} + s_{3k+2}).$$

Нахождение детализирующих коэффициентов вейвлетов $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ [1]:

$$d_k^1 = \sum_n \overline{g_n^1}\, s_{n+3k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{3k} - s_{3k+2}),$$

$$d_k^2 = \sum_n \overline{g_n^2}\, s_{n+3k} = s_{3k+1}.$$

Весь сигнал разбивается на тройки подряд идущих элементов. Коэффициенты аппроксимации есть скользящие средние по двум элементам в тройке, пропуская элемент между ними. Первые детализирующие коэффициенты d_k^1 есть скользящая разность двух крайних элементов в тройке, а коэффициенты d_k^2 есть выборка среднего элемента из каждой тройки.

Замечание 4. Как и в случае вейвлетов Хаара, полученное частное решение можно подвергнуть вращению и получить общие вейвлеты Кантора. Легко видеть также, что конструкция очевидным образом обобщается на случай любого целого коэффициента масштабирования N.

4. Вейвлеты Котельникова-Шеннона. В системе вейвлетов Хаара, масштабирующая функция $\varphi(x)$ является ступенчатой и ее образ Фурье $\hat{\varphi}(\omega)$ с точностью до фазового множителя совпадает с sin(ω/2)/(ω/2). Теперь возьмем за основу ступенчатую функцию в частотной области. Положим [2], $\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{ïðè äðóãè õ } \omega \end{cases}$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \qquad (14)$$

Легко показать, что функция $\varphi(x)$ является действительно масштабирующей функцией с коэффициентом сжатия 3. Пространство V_0, порожденное сдвигами $\varphi(x-n)$, $n\in\mathbf{Z}$, состоит из всех интегрируемых с квадратом функций $f(x)$, для которых преобразование Фурье имеет носитель на промежутке [-π,π]

Образуем последовательность пространств V_j, каждое из которых является масштабированной версией V_0. Например, пространство V_1 состоит из всех интегрируемых с квадратом функций вида $f(3x)$, где $f(x) \in V_0$.

Поскольку $F[f(3x)] = \hat{f}(\omega/3)/3$, то преобразования Фурье функций из V_1 имеют носитель на промежутке [-3π, 3π]. Поэтому $V_0 \subset V_1$. Пространство V_j состоит из функций, преобразования Фурье которых имеют носитель на промежутке $[-3^j\pi, 3^j\pi]$.

Из включения $V_0 \subset V_1$ следует, что функция $\varphi(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ является масштабирующей. Она может быть разложена (по теореме Котельникова) по базису пространства V_1,

$$\varphi(x) = \sum_{n\in Z}\varphi(n/3)\frac{\sin\pi(3x-n)}{\pi(3x-n)} = \sqrt{3}\sum_{n\in Z}h_n\frac{\sin\pi(3x-n)}{\pi(3x-n)}.$$

Найдем вейвлеты $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$. Для этого сначала найдем частотную функцию $H_3(\omega)$, а затем найдем $G_3^1(\omega)$ и $G_3^2(\omega)$ из унитарности матрицы (4). Функция $H_3(\omega)$ может быть найдена из масштабирующего уравнения $\hat{\varphi}(\omega)=H_3(\omega/3)\hat{\varphi}(\omega/3)$. Поскольку $\hat{\varphi}(\omega/3)=1$ на промежутке [-3π,3π] и нуль в противном случае, то $H_3(\omega/3)=\hat{\varphi}(\omega)$ на [-3π, 3π], или $H_3(\omega)=\hat{\varphi}(3\omega)$ на промежутке [-π, π].

Поэтому
$$H_3(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in[-\pi/3,\pi/3],\\ 0 & \omega\in[-\pi,-\pi/3)\cup(\pi/3,\pi].\end{cases}\tag{15}$$

Вне промежутка [-π, π] функция $H_3(\omega)$ продолжается периодически. Положим:

$$G_3^1(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in[-2\pi/3,-\pi/3]\cup[\pi/3,2\pi/3],\\ 0 & \omega\in[-\pi,-2\pi/3)\cup(-\pi/3,\pi/3)\cup(2\pi/3,\pi].\end{cases}\tag{16}$$

$$G_3^2(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in[-\pi,-2\pi/3]\cup[2\pi/3,\pi],\\ 0 & \omega\in(-2\pi/3,2\pi/3).\end{cases}\tag{17}$$

Вейвлет $\psi^1(x)\in W_0^1$ определяется из формулы:

$$\hat{\psi}^1(\omega)=G_3^1\left(\frac{\omega}{3}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{3}\right)=\begin{cases}1 & \pi\le|\omega|\le2\pi\\ 0 & \text{при остальных } \omega.\end{cases}$$

Вейвлет $\psi^2(x)\in W_0^2$ определяется из формулы

$$\hat{\psi}^2(\omega)=G_3^2\left(\frac{\omega}{3}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{3}\right)=\begin{cases}1 & 2\pi\le|\omega|\le3\pi\\ 0 & \text{при остальных } \omega.\end{cases}$$

Тогда мы имеем:

$$\psi^1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{-\pi}e^{i\omega x}\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{\sin2\pi x-\sin\pi x}{\pi x}.\tag{18}$$

Таким образом,

$$\psi^2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-3\pi}^{-2\pi}e^{i\omega x}\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{3\pi}e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{\sin3\pi x-\sin2\pi x}{\pi x}.\tag{19}$$

Данные функции назовем ***вейвлетами Шеннона-Котельникова*** степени разрешения 3.

Замечание 5. По построению, вейвлеты Шеннона-Котельникова соответствуют идеальным фильтрам $H_3(\omega)$, $G_3^1(\omega)$ и $G_3^2(\omega)$. Вследствие разрывности этих функций, масштабирующая функция $\varphi(x)$ и вейвлеты $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ убывают очень медленно, как n^{-1}. Поэтому вейвлеты Шеннона-Котельникова слабо локализованы в пространстве. Вейвлет Хаара – есть противоположный крайний случай, когда $\varphi(x)$ является разрывной по времени. Коэффициенты g_n^1 и g_n^2 для вейвлетов $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ легко находятся как коэффициенты разложениея $G_3^1(\omega)$ и $G_3^2(\omega)$ в ряды Фурье. Очевидно, что конструкция обобщается на случай любого целого коэффициента масштабирования N.

5. Вейвлеты Мейера. Вейвлеты Мейера являются сглаженным вариантом вейвлетов Шеннона-Котельникова. Разрывы масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\omega)$ вейвлетов Шеннона-Котельникова в точках -π и π можно удалить сглаживанием многими способами. Однако нужно, чтобы сглаженная функция $\hat{\varphi}(\omega)$ обладала бы свойством $\sum_{n\in Z}|\hat{\varphi}(\omega+2\pi n)|^2=1$, которое обеспечивает ортогональность системы функций $\varphi(x-n)$. Отметим, что при сглаживании может быть улучшено медленное убывание вейвлета Шеннона-Котельникова. Масштабирующая функция Мейера $\varphi(x)$ определяется из равенства [1], [2]

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in[-2\pi/3,2\pi/3],\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\left(\dfrac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right), & 2\pi/3\le|\omega|\le4\pi/3,\\ 0, & \text{для остальных } \omega\end{cases}\tag{20}$$

где $\nu(x)$ есть вспомогательная функция, которая осуществляет полиномиальную интерполяцию между 0 и 1 на промежутке [0,1] и обладает свойством $\nu(1-x)=1-\nu(x)$.

Таким образом, сглаживание производится только на промежутках [-4π/3, -2π/3] и [2π/3, 4π/3]. За счет выбора функции $\nu(x)$ обеспечивается необходимая гладкость в точках склейки. Функция cos удобна для обеспечения ортогональности системы сдвигов $\varphi(x-n)$. Кратномасштабное разложение $L^2(\mathbf{R})$ строится аналогично. Пусть V_0 – подпространство в $L^2(\mathbf{R})$, порожденное сдвигами функции $\varphi(x)$. Каждая функция $f(x)\in V_0$ является функцией с ограниченной шириной полосы Ω = 4π/3. Пространство V_1 состоит из всех интегрируемых с квадратом функций вида $g(x)=f(3x)$, где $f(x)\in V_0$. Преобразования Фурье функций $g(x)$ из V_1 имеют носитель на промежутке [-8π/3, 8π/3].

Найдем вейвлеты $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$. Для этого нужно найти функции $H_3(\omega)$, $G_3^1(\omega)$ и $G_3^2(\omega)$. Сначала найдем частотную функцию из масштабирующего уравнения $\hat{\varphi}(\omega)=H_3(\omega/3)\hat{\varphi}(\omega/3)$. Функция $\hat{\varphi}(\omega)$ равна 1на [-2π/3, 2π/3] и обращается в нуль вне промежутка [-4π/3, 4π/3]. Поэтому $\hat{\varphi}(\omega/3)=1$ на промежутке [-2π, 2π] и обращается в нуль вне промежутка [-4π, 4π]. Тогда $H_3(\omega/3)=\hat{\varphi}(\omega)$ на [-4π/3, 4π/3] и $H_3(\omega/3)=0$ вне [-4π/3, 4π/3] , т. е. $H_3(\omega)=\hat{\varphi}(3\omega)$ на промежутке [-4π/9, 4π/9] и $H_0(\omega)=0$ вне [-4π/9, 4π/9].

$$
H_3(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in[-2\pi/9,2\pi/9],\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\left(\dfrac{3}{2\pi}|3\omega|-1\right)\right), & 2\pi/9\le|\omega|\le 4\pi/9,\\ 0, & \text{для остальных } \omega\end{cases} \quad (21)
$$

Вне промежутка [-π,π] функция $H_3(\omega)$ продолжается периодически. Определим функцию $G_3^1(\omega)$ на промежутке [-π,π] следующим образом:

$$
G_3^1(\omega)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\left(\dfrac{3}{2\pi}(2\pi-3\omega)-1\right)\right), & 2\pi/9\le\omega\le 4\pi/9,\\ 1, & \omega\in[4\pi/9,5\pi/9],\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\left(\dfrac{3}{2\pi}(3\omega-\pi)-1\right)\right), & 5\pi/9\le\omega\le 7\pi/9,\\ 0, & \text{äëÿ } \omega\notin[2\pi/9,7\pi/9],\\ -G^1(\omega) & \text{äëÿ } \omega\in[-\pi,0]\end{cases} \quad (22)
$$

Определим функцию $G_3^2(\omega)$ на промежутке [-π,π] следующим образом:

$$
G_3^1(\omega)=\begin{cases}1 & 7\pi/9\le|\omega|\le\pi,\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\left(\dfrac{3}{2\pi}(3\pi-3|\omega|)-1\right)\right), & 5\pi/9\le|\omega|\le 7\pi/9,\\ 0 & \text{äëÿ îñòàëüíûõ } \omega\end{cases} \quad (23)
$$

Достаточно очевидно, что $G^2(\omega)=H_3(\omega+\pi)$ и если ввести функцию $F(\omega)=H_3(\omega)H_3(\omega-\pi/3)$, то $G^1(\omega)=F(\omega-\pi/3)-F(\omega+\pi/3)$.

Проверим унитарность матрицы (4). Для доказательства равенства $|H_3(\omega)|^2+|H_3(\omega+2\pi/3)|^2+|H_3(\omega+4\pi/3)|^2=1$ достаточно показать его только на промежутке [-4π/9,-2π/9],

$$
|H_3(\omega)|^2+|H_3(\omega+2\pi/3)|^2+
$$

$$
+H_3(\omega+4\pi/3)|^2=|H_3(\omega)|^2+|H_3(\omega+2\pi/3)|^2=
$$

$$
=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|3\omega|-1\right)\right)+
$$

$$
+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|3(\omega+2\pi/3)|-1\right)\right)=
$$

$$
=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|3\omega|-1\right)\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(1-(\frac{3}{2\pi}|3\omega|-1)\right)\right)=
$$

[воспользуемся равенством $\nu(1-x)=1-\nu(x)$]

$$
=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|3\omega|-1\right)\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|3\omega|-1\right)\right)=1.
$$

Совершенно аналогично показывается, что $|G^1(\omega)|^2+|G^1(\omega+2\pi/3)|^2+|G^1(\omega+4\pi/3)|^2=1$ и $|G^2(\omega)|^2+|G^2(\omega+2\pi/3)|^2+|G^2(\omega+4\pi/3)|^2=1$. Эрмитова ортогональность столбцов очевидна.

Вейвлеты $\psi^i(x)\in W_0^i,\ i=1,2$ определяются обратным преобразованием Фурье из формул $\hat\psi^i(\omega)=G_3^i(\omega./3)\hat\varphi(\omega./3)$. Задание $\hat\psi^i(\omega)$ в виде, аналогичном (20) легко получается из формул (22) и (23). Определенные выше функции $\varphi(x)$, $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ называются *вейвлетами Мейера*. Для них мы не можем получить аналитическую форму, должны ограничиться их приближениями. Фильтр $\{h_n\}$ находится разложением в ряд Фурье функции $\sqrt{3}H_3(\omega)$.

$$
h_n=\sqrt{3}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_0(\omega)e^{in\omega}\,d\omega=
$$

$$
=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\int_0^{2\pi/9}\cos n\omega\,d\omega+\int_{2\pi/9}^{4\pi/9}\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|3\omega|-1\right)\right)\cos n\omega\,d\omega\right).
$$

Литература

1. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М.; Ижевск: РХД, 2001.
2. Смоленцев, Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. – М.: ДМК-Пресс, 2005.