УДК 513

ЧЕТВЕРКА ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ДОПУСКАЮЩАЯ КОНФИГУРАЦИЮ МЕБИУСА

В. А. Петин

Как известно (см. напр. [1]), пространственной конфигурацией называется такое конечное множество точек и плоскостей, что через каждую точку проходит одно и то же количество плоскостей, а в каждой плоскости расположено одно и то же число точек. Среди пространственных конфигураций весьма интересной является конфигурация Мебиуса (8_4). С. П. Фиников [2], рассматривая частный случай четверок конгруэнций, обнаружил, что их фокусы и фокальные плоскости образуют конфигурацию Мебиуса. Это наводит на мысль рассмотреть такую четверку линейчатых поверхностей, у которой на соответственной четверке прямых 8 точек (по две на каждой прямой) и 8 касательных плоскостей к поверхностям в этих точках образуют конфигурацию Мебиуса. Если такие четверки линейчатых поверхностей существуют, то будем называть их М-четверками.

§ 1. Основные формулы

В трехмерном проективном пространстве рассмотрим четверку попарно непересекающихся прямых, которые мы будем нумеровать элементами кольца вычетов Z_4 и обозначать l_α, где $\alpha \in Z_4$. Пусть эти четыре прямые описывают четверку поверхностей (l_α). На каждой прямой l_α зададим по две точки, которые будем считать точками конфигурации Мебиуса и называть в дальнейшем М-точками. Касательную плоскость к поверхности (l_α) в точке M, входящую в конфигурацию Мебиуса, обозначим $\Pi(M)$, и будем считать, что она пересекает прямые $l_{\alpha-1}$ и $l_{\alpha+1}$ в М-точках.

Назовем *секущей* такую прямую, которая пересекает каждую прямую нашей четверки. Оказывается, что в общем случае для каждой четверки прямых найдется, по крайней мере, две секущих. В самом деле, если считать прямые l_1, l_2, l_3 образующими одного семейства квадрики *Q*, то прямая l_0 или будет лежать на этой квадрике, и тогда у четверки прямых будет однопараметрическое множество секущих (образующих второго семейства), или же пересекать квадрику в двух точках (действительных различных, совпавших или мнимых). Если через каждую из этих двух точек провести по образующей второго семейства квадрики *Q*, то они и будут секущими прямыми.

Точки пересечения секущих прямых с прямыми четверки назовем *базисными точками четверки прямых*.

Пусть A_i $(i = 1,2,3,4)$ – вершины подвижного репера, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_i = \omega_i^j A_j, \quad i, j = 1,2,3,4, \tag{1.1}$$

где ω_i^j – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства [2]. Поместим вершины A_1 и A_2 репера в базисные точки прямой l_0, вершины A_3 и A_4 – в базисные точки прямой l_1 так, чтобы прямые A_1A_3 и A_2A_4 являлись секущими. Тогда можно так нормировать вершины репера, что точки $B_1 = A_1 + A_3$ и $B_2 = A_2 + A_4$ будут базисными точками прямой l_2, а точки $B_3 = A_1 + \lambda A_3$ и $B_4 = A_2 + \mu A_4$ – базисными точками прямой l_3.

Главными формами при таком выборе подвижного репера будут формы

$$\begin{gathered}\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4,\ \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2,\\ \theta_1^3, \theta_1^4, \theta_2^3, \theta_2^4,\ \theta_3^1, \theta_3^2, \theta_4^1, \theta_4^2,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где
$$\begin{aligned}
\theta_1^3 &= \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_3^1 - \omega_1^3,\\
\theta_3^1 &= d\lambda + \lambda(\omega_3^3 - \omega_1^1) + \omega_1^3 - \lambda^2\omega_3^1,\\
\theta_1^4 &= \omega_1^2 - \omega_3^4 + \omega_3^2 - \omega_1^4,\\
\theta_3^2 &= \omega_1^4 + \lambda\omega_3^4 - \mu\omega_1^2 - \lambda\mu\omega_3^2,\\
\theta_2^3 &= \omega_2^1 - \omega_4^3 + \omega_4^1 - \omega_2^3,\\
\theta_4^1 &= \omega_2^3 + \mu\omega_4^3 - \lambda\omega_2^1 - \lambda\mu\omega_4^1,\\
\theta_2^4 &= \omega_2^2 - \omega_4^4 + \omega_4^2 - \omega_2^4,\\
\theta_4^2 &= d\mu + \mu(\omega_4^4 - \omega_2^2) + \omega_2^4 - \mu^2\omega_4^2.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Получим необходимые условия на главные формы, чтобы четверка поверхностей являлась М-четверкой.

Пусть $M_0 = A_1 + t_0 A_2$ – одна из двух М-точек прямой l_0. Пусть касательная плоскость $\Pi(M_0)$ к поверхности (l_0) в этой точке пересекает прямую l_1 в М-точке M_1. Мы будем считать, что касательная плоскость $\Pi(M_1)$ пересекает прямую l_0 в М-точке M_0. Но это значит, что прямая M_0M_1 касается обеих линейчатых поверхностей (l_0) и (l_1). Следовательно, точка M_0 является квазифлекнодальной точкой [3] прямой l_0 пары линейчатых поверхностей (l_0) и (l_1). Проделывая необходимые выкладки, получим уравнение для определения М-точек M_0:

$$t_0^2(\omega_2^3\omega_3^1+\omega_2^4\omega_4^1)+$$
$$+t_0(\omega_1^3\omega_3^1+\omega_1^4\omega_4^1-\omega_2^3\omega_3^2-\omega_2^4\omega_4^2)- \qquad (1.4)$$
$$-(\omega_1^3\omega_3^2+\omega_1^4\omega_4^2)=0.$$

Применяя аналогичные рассуждения к паре поверхностей (l_0) и (l_3), найдем, что М-точки прямой l_0 определяются значениями параметра t_0, являющимися корнями уравнения:

$$t_0^2(\omega_2^3\theta_3^1+\frac{\lambda}{\mu}\omega_2^4\theta_4^1)+$$
$$+t_0(\omega_1^3\theta_3^1+\frac{\lambda}{\mu}\omega_1^4\theta_4^1-\frac{\lambda}{\mu}\omega_2^3\theta_3^2-\frac{\lambda^2}{\mu^2}\omega_2^4\theta_4^2)- \qquad (1.5)$$
$$-(\frac{\lambda}{\mu}\omega_1^3\theta_3^2+\frac{\lambda^2}{\mu^2}\omega_1^4\theta_4^2)=0.$$

Из равносильности уравнений (1.4) и (1.5) следует, что коэффициенты при неизвестных в этих уравнениях пропорциональны, то есть:

$$\omega_2^3\omega_3^1+\omega_2^4\omega_4^1=a_1(\omega_2^3\theta_3^1+\frac{\lambda}{\mu}\omega_2^4\theta_4^1),$$
$$\omega_1^3\omega_3^2+\omega_1^4\omega_4^2=a_1(\frac{\lambda}{\mu}\omega_1^3\theta_3^2+\frac{\lambda^2}{\mu^2}\omega_1^4\theta_4^2), \qquad (1.6)$$
$$\omega_1^3\omega_3^1+\omega_1^4\omega_4^1-\omega_2^3\omega_3^2-\omega_2^4\omega_4^2=$$
$$=a_1(\omega_1^3\theta_3^1+\frac{\lambda}{\mu}\omega_1^4\theta_4^1-\frac{\lambda}{\mu}\omega_2^3\theta_3^2-\frac{\lambda^2}{\mu^2}\omega_2^4\theta_4^2).$$

Переписав эти равенства в виде:

$$\omega_2^3(\omega_3^1-a_1\theta_3^1)+\omega_2^4(\omega_4^1-a_1\frac{\lambda}{\mu}\theta_4^1)=0,$$
$$\omega_1^3(\omega_3^2-a_1\frac{\lambda}{\mu}\theta_3^2)+\omega_1^4(\omega_4^2-a_1\frac{\lambda^2}{\mu^2}\theta_4^2), \qquad (1.7)$$
$$\omega_1^3(\omega_3^1-a_1\theta_3^1)+$$
$$+\omega_1^4(\omega_4^1-a_1\frac{\lambda}{\mu}\theta_4^1)-\omega_2^3(\omega_3^2-a_1\frac{\lambda}{\mu}\theta_3^2)-, \qquad (1.8)$$
$$-\omega_2^4(\omega_4^2-a_1\frac{\lambda^2}{\mu^2}\theta_4^2)=0$$

положим из (1.7)

$$\omega_3^1-a_1\theta_3^1=b_1\omega_2^4,\ \omega_4^1-a_1\frac{\lambda}{\mu}\theta_4^1=-b_1\omega_2^3,$$
$$\omega_3^2-a_1\frac{\lambda}{\mu}\theta_3^2=b'\omega_1^4,\ \omega_4^2-a_1\frac{\lambda^2}{\mu^2}\theta_4^2=-b'\omega_1^3 \qquad (1.9)$$

и внесем полученные значения в (1.8). Тогда получим $(b_1+b')(\omega_1^3\omega_2^4-\omega_2^3\omega_1^4)=0$. (1.10)

Полагая, что линейчатая поверхность (A_1A_2) не является развертывающейся, то есть $\omega_1^3\omega_2^4-\omega_2^3\omega_1^4\neq 0$, из (1.10) получаем, что

$$b'=-b_1. \qquad (1.11)$$

Окончательно с учетом (1.9) и (1.11) имеем:

$$\omega_3^1=a_1\theta_3^1+b_1\omega_2^4,\ \omega_4^1=a_1\frac{\lambda}{\mu}\theta_4^1-b_1\omega_2^3,$$
$$\omega_3^2=a_1\frac{\lambda}{\mu}\theta_3^2-b_1\omega_1^4,\ \omega_4^2=a_1\frac{\lambda^2}{\mu^2}\theta_4^2+b_1\omega_1^3. \qquad (1.12)$$

Рассуждая как выше, найдем, что каждая из двух М-точек $M_1=A_3+t_1A_4$, лежащая на прямой l_1, определяется корнями уравнений:

$$t_1^2(\omega_1^3\omega_4^1+\omega_2^3\omega_4^2)+$$
$$+t_1(\omega_1^3\omega_3^1+\omega_2^3\omega_3^2-\omega_1^4\omega_4^1-\omega_2^4\omega_4^2)-, \qquad (1.13)$$
$$-(\omega_1^4\omega_3^1+\omega_2^4\omega_3^2)=0$$

$$t_1^2(\theta_1^3\omega_4^1+\theta_2^3\omega_4^2)+$$
$$+t_1(\theta_1^3\omega_3^1+\theta_2^3\omega_3^2-\theta_1^4\omega_4^1-\theta_2^4\omega_4^2)-, \qquad (1.14)$$
$$-(\theta_1^4\omega_3^1+\theta_2^4\omega_3^2)=0.$$

А отсюда вытекают следующие соотношения между главными формами:

$$\omega_1^3=a_2\theta_1^3+b_2\omega_4^2,\ \omega_2^3=a_2\theta_2^3-b_2\omega_4^1,$$
$$\omega_1^4=a_2\theta_1^4-b_2\omega_3^2,\ \omega_2^4=a_2\theta_2^4+b_2\omega_3^1. \qquad (1.15)$$

Продолжая процесс, мы найдем, что М-точки $M_2=B_1+t_2B_2$ и точки $M_3=B_3+t_3B_4$ определяются корнями уравнений:

$$t_2^2(\theta_2^3\omega_3^1+\theta_2^4\omega_4^1)+$$
$$+t_2(\theta_1^3\omega_3^1+\theta_1^4\omega_4^1-\theta_2^3\omega_3^2-\theta_2^4\omega_4^2)-, \qquad (1.16)$$
$$-(\theta_1^3\omega_3^2+\theta_1^4\omega_4^2)=0$$

$$t_2^2(\theta_2^3\theta_3^1+\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_2^4\theta_4^1)+$$
$$+t_2(\theta_1^3\theta_3^1+\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_1^4\theta_4^1-\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_2^3\theta_3^2-$$
$$-\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\mu)^2}\theta_2^4\theta_4^2)-$$
$$-(\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_1^3\theta_3^2+\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\mu)^2}\theta_1^4\theta_4^2)=0, \qquad (1.17)$$

$$t_3^2(\omega_1^3\theta_4^1+\frac{\lambda}{\mu}\omega_2^3\theta_4^2)+$$
$$+t_3(\omega_1^3\theta_3^1+\frac{\lambda}{\mu}\omega_2^3\theta_3^2-\frac{\lambda}{\mu}\omega_1^4\theta_4^1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}\omega_2^4\theta_4^2)- \qquad (1.18)$$
$$-(\frac{\lambda}{\mu}\omega_1^4\theta_3^1+\frac{\lambda^2}{\mu^2}\omega_2^4\theta_3^2)=0,$$

$$t_3^2(\theta_1^3\theta_4^1+\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_2^3\theta_4^2)+$$

$$+t_3(\theta_1^3\theta_3^1+\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_2^3\theta_3^2-\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_1^4\theta_4^1-\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\mu)^2}\theta_2^4\theta_4^2)-$$

$$-(\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_1^4\theta_3^1+\frac{91-\lambda)^2}{(1-\mu)^2}\theta_2^4\theta_3^2)=0\,. \quad (1.19)$$

Требуя, как выше, пропорциональность коэффициентов в уравнениях (1.16) и (1.17), а также в уравнениях (1.18) и (1.19), получим следующие соотношения: $\omega_3^1=a_3\theta_3^1+b_3\theta_2^4$,

$$\omega_4^1=a_3\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_4^1-b_3\theta_2^3,\quad \omega_3^2=a_3\frac{1-\lambda}{1-\mu}\theta_3^2-b_3\theta_1^4,$$

$$\omega_4^2=a_3\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\mu)^2}\theta_4^2+b_3\theta_1^3, \quad (1.20)$$

$$\omega_1^3=a_4\theta_1^3+b_4\theta_4^2,\ \omega_2^3=a_4\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}\theta_2^3-b_4\frac{\mu}{\lambda}\theta_4^1,$$

$$\omega_1^4=a_4\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}\theta_1^4-b_4\frac{\mu}{\lambda}\theta_3^2,$$

$$\omega_2^4=a_4\frac{\mu^2(1-\lambda)^2}{\lambda^2(1-\mu)^2}\theta_2^4+b_4\frac{\mu^2}{\lambda^2}\theta_3^1.$$

Заменяя в равенствах (1.12) и (1.15) формы $\omega_1^3,\omega_2^3,\omega_1^4\omega_2^4$ и $\omega_3^1,\omega_3^2,\omega_4^1,\omega_4^2$ их выражениями из (1.20), получим две системы равенств. Первая имеет вид:

$$(b_3-a_4b_1)\theta_1^3+(a_3\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\mu)^2}-a_1\frac{\lambda^2}{\mu^2}-b_1b_4)\theta_4^2=0,$$

$$\begin{gathered}(-b_3+a_4b_1\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)})\theta_2^3+\\ +(a_3\frac{1-\lambda}{1-\mu}-a_1\frac{\lambda}{\mu}-b_1b_4\frac{\mu}{\lambda})\theta_4^1=0\end{gathered}, \quad (1.21)$$

$$\begin{gathered}(-b_3+a_4b_1\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)})\theta_1^4+\\ +(a_3\frac{1-\lambda}{1-\mu}-a_1\frac{\lambda}{\mu}-b_1b_4\frac{\mu}{\lambda})\theta_3^2=0\end{gathered},$$

$$(b_3-a_4b_1\frac{\mu^2(1-\lambda)^2}{\lambda^2(1-\mu)^2})\theta_2^4+(a_3-a_1-b_1b_4\frac{\mu^2}{\lambda^2})\theta_3^1=0,$$

а вторая:

$$(a_4-a_2-b_2b_3)\theta_1^3+(b_4-a_3b_2\frac{(1-\lambda)^2}{(1-\mu)^2}\theta_4^2=0,$$

$$\begin{gathered}(a_4\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}-a_2-b_2b_3)\theta_2^3+\\ +(-b_4\frac{\mu}{\lambda}+a_3b_2\frac{1-\lambda}{1-\mu})\theta_4^1=0\end{gathered}, \quad (1.22)$$

$$\begin{gathered}(a_4\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}-a_2-b_2b_3)\theta_1^4+\\ +(-b_4\frac{\mu}{\lambda}+a_3b_2\frac{1-\lambda}{1-\mu})\theta_3^2=0\end{gathered},$$

$$(a_4\frac{\mu^2(1-\lambda)^2}{\lambda^2(1-\mu)^2}-a_2-b_2b_3)\theta_2^4+(b_4\frac{\mu^2}{\lambda^2}-a_3b_2)\theta_3^1=0.$$

Потребуем, чтобы соотношения (1.21) и (1.22), выражающие связь между главными формами прямых (l_2) и (l_3), были эквивалентными. Тогда получим три независимых равенства:

$$\frac{\mu^2(1-\lambda)^2}{\lambda^2(1-\mu)^2}(a_2a_3-a_3a_4+b_1b_2a_3a_4)+$$

$$+\frac{\mu^2}{\lambda^2}(b_3b_4-a_2b_1b_4-b_1b_2b_3b_3)+$$

$$+(a_1a_4-a_1a_2-a_1b_2b_3)=0.$$

$$\frac{\mu^2(1-\lambda)^2}{\lambda^2(1-\mu)^2}(b_1b_2a_3a_4-a_3a_4)+$$

$$+\frac{\mu^2}{\lambda^2}(b_3b_4-a_2b_1b_4-b_1b_2b_3b_4)+$$

$$+\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}(a_1a_4+a_2a_3)-(a_1a_2+a_1b_2b_3)=0, \quad (1.23)$$

$$\frac{\mu^2(1-\lambda)^2}{\lambda^2(1-\mu)^2}(a_1a_4-a_3a_4+b_1b_2a_3a_4)+$$

$$+\frac{\mu^2}{\lambda^2}(b_3b_4-a_2b_1b_4-b_1b_2b_3b_4)+$$

$$+(a_2a_3-a_1a_2-a_1b_2b_3)=0.$$

Вычитая из первого равенства (1.23) сначала третье, а затем второе равенство, получим:

$$\{\frac{\mu^2(1-\lambda)^2}{\lambda^2(1-\mu)^2}-1\}(a_2a_3-a_1a_4)=0, \quad (1.24)$$

$$\{\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}-1\}\{a_2a_3\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}-a_1a_4\}=0. \quad (1.25)$$

Из (1.24) и (1.25) следует, что для М-четверки линейчатых поверхностей необходимым условием является выполнение равенства:

$$\frac{\mu^2(1-\lambda)^2}{\lambda^2(1-\mu)^2}-1=0, \quad (1.26)$$

так как если в (1.24) считать $a_2a_3-a_1a_4=0$, то получим из (1.25) $\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}-1=0$, что является частью условия (1.26).

§ 2. M_1 - четверки линейчатых поверхностей

Четверки линейчатых поверхностей, характеризующиеся условием $\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}=1$, или, что то же самое, $\mu=\lambda$, будем называть M_1-четверками. Отметим геометрические свойства таких четверок.

Теорема 1. Соответственные прямые M_1-четверки поверхностей лежат на одной квадрике.

В самом деле, проверка показывает, что координаты всех точек на прямых четверки удовлетворяют уравнению $x^1x^4-x^2x^3=0$. (2.1)

Квадрику (2.1), содержащую четверку прямых l_α, будем называть *сопровождающей квадрикой.*

В силу теоремы 1 базисные точки на прямых l_α становятся неопределенными, так как все образующие второго семейства сопровождающей квадрики являются секущими для данной четверки прямых.

Теорема 2. Каждая пара (l_α) и $(l_{\alpha+1})$ линейчатых поверхностей, входящая в M_1 – четверку, расслояема [4].

В самом деле, из системы (1.21) при $\lambda=\mu$ имеем:

$$\frac{\theta_4^2}{\theta_1^3}=-\frac{\theta_4^1}{\theta_2^3}=-\frac{\theta_3^2}{\theta_1^4}=\frac{\theta_3^1}{\theta_2^4}. \tag{2.2}$$

Из равенств (1.17) и (1.19) следует, что при условии (2.2) квазифлекнодальные точки на прямых l_2 и l_3 пары линейчатых поверхностей $(l_2),(l_3)$ не определены и, следовательно, эта пара – расслояема. Перепишем (2.2) в виде:

$$\theta_4^2=a\theta_1^3,\ \theta_4^1=-a\theta_2^3,\quad \theta_3^2=-a\theta_1^4,$$
$$\theta_3^1=a\theta_2^4 \tag{2.3}$$

и внесем значения форм $\theta_4^2,\theta_4^1,\theta_3^2\theta_3^1$ в (1.20). Из первых четырех равенств в (1.20) получим равенства:

$$\frac{\theta_2^4}{\omega_3^1}=-\frac{\theta_1^4}{\omega_3^2}=-\frac{\theta_2^3}{\omega_4^1}=\frac{\theta_1^3}{\omega_4^2}, \tag{2.4}$$

которые являются условиями расслояемости пары поверхностей $(l_1),(l_2)$. Из последних четырех равенств в (1.20) получим, что $\omega_1^3=b\theta_1^3$, $\omega_2^3=b\theta_2^3$,

$$\omega_1^4=b\theta_1^4,\ \omega_2^4=b\theta_2^4, \tag{2.5}$$

где $b=a_4+ab_4$.

Из (2.4) и (2.5) следуют условия расслояемости пары линейчатых поверхностей $(l_0),(l_1)$

$$\frac{\omega_2^4}{\omega_3^1}=-\frac{\omega_1^4}{\omega_3^2}=-\frac{\omega_2^3}{\omega_4^1}=\frac{\omega_1^3}{\omega_4^2}, \tag{2.6}$$

а из (2.5) и (2.2) – условия расслояемости пары поверхностей $(l_3),(l_0)$

$$\frac{\theta_4^2}{\omega_1^3}=\frac{\theta_3^1}{\omega_2^4}=-\frac{\theta_3^2}{\omega_1^4}=-\frac{\theta_4^1}{\omega_2^3}. \tag{2.7}$$

Теорема 2 доказана.

Фокусом на прямой l_α назовем такую точку F, в которой касательная плоскость $\Pi(F)$ к поверхности (l_α) совпадает с касательной плоскостью $K(F)$ к сопровождающей квадрике.

Найдем фокусы на соответственных прямых. Пусть $F_0=A_1+s_0A_2$ (2.8)

– фокус прямой l_0. Потребовав совпадения в этой точке касательной плоскости $K(F_0)$ к сопровождающей квадрике и касательной плоскости $\Pi(F_0)$ к линейчатой поверхности (l_0), получим, что s_0 является корнем уравнения

$$s_0^2\omega_2^3+s_0(\omega_1^3-\omega_2^4)-\omega_1^4=0. \tag{2.9}$$

Аналогично найдем, что фокусы:

$$F_1=A_3+s_1A_4,\ F_2=B_1+s_2B_2,$$
$$F_3=B_3+s_3B_4 \tag{2.10}$$

определяются корнями уравнений:

$$s_1^2\omega_4^1+s_1(\omega_3^1-\omega_4^2)-\omega_3^2=0,$$
$$s_2^2\theta_2^3+s_2(\theta_1^3-\theta_2^4)-\theta_1^4=0,$$
$$s_3^2\theta_4^1+s_3(\theta_3^1-\theta_4^2)-\theta_3^2=0. \tag{2.11}$$

Теорема 3. Существуют две прямые, пересекающие четверку прямых l_α по фокусам.

Из (2.2), (2.4), (2.6) и (2.7) следует, что все квадратные уравнения (2.9), (2.11), равносильны и имеют одни и те же корни. Если k – один из двух корней этих уравнений, то фокусами на прямых l_0,l_1,l_2,l_3 служат точки $F_0=A_1+kA_2$,

$F_1=A_3+kA_4$; $F_2=B_1+kB_2$, $F_3=B_3+kB_4$.

Учитывая, что $B_1=A_1+A_3$, $B_2=A_2+A_4$, $B_3=A_1+\lambda A_3$, $B_4=A_2+\lambda A_4$, имеем

$$F_2=F_0+F_1,\ F_3=F_0+\lambda F_1, \tag{2.12}$$

откуда заключаем, что точки F_0,F_1,F_2,F_3 лежат на одной прямой.

Назовем секущие, проходящие через фокусы, *фокусными секущими.*

Теорема 4. Фокусные секущие M_1-четверки поверхностей описывают расслояемую пару поверхностей.

Предварительно выберем вершины подвижного репера так, чтобы точки A_1 и A_2 совпали с фокусами прямой l_0. В этом случае прямые A_1A_3 и A_2A_4 будут фокусными секущими, а из равенств (2.9), (2.11) следует, что

$$\omega_2^3=\omega_1^4=\omega_4^1=\omega_3^2=\theta_2^3=\theta_1^4=\theta_4^1=\theta_3^2=0. \tag{2.13}$$

Из (1.3) и (2.13) имеем:

$$\omega_1^2-\omega_3^4=\omega_2^1-\omega_4^3=0. \tag{2.14}$$

Условия расслояемости линейчатых поверхностей (A_1A_3) и (A_2A_4) имеют вид:

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_4^3}=\frac{\omega_3^4}{\omega_2^1}=-\frac{\omega_1^4}{\omega_2^3}=-\frac{\omega_3^2}{\omega_4^1}. \qquad (2.15)$$

Из (2.13) и (2.14) мы видим, что условия (2.15) выполнены.

Определим биекцию $t_{\alpha+1,\alpha}:l_\alpha \to l_{\alpha+1}$, поставив в соответствие каждой точке $M_\alpha \in l_\alpha$ точку $M_{\alpha+1}=t_{\alpha+1,\alpha}(M_\alpha)$, являющуюся точкой пересечения прямой $l_{\alpha+1}$ с касательной плоскостью $\Pi(M_\alpha)$ к поверхности (l_α) в точке M_α. Очевидно, что $t^{-1}_{\alpha+1,\alpha}=t_{\alpha,\alpha+1}$. Положим

$$T_\alpha=t_{\alpha,\alpha+3}\circ t_{\alpha+3,\alpha+2}\circ t_{\alpha+2,\alpha+1}\circ t_{\alpha+1,\alpha}. \qquad (2.16)$$

Теорема 5. Отображение $T_\alpha:l_\alpha\to l_\alpha$ является тождественным.

Действительно, пусть $M_0=A_1+t_0A_2$ – произвольная точка прямой l_0. Учитывая (2.13), найдем, что $M_1=t_{1,0}(M_0)=A_3+t_0\dfrac{\omega_2^4}{\omega_1^3}A_4$,

$$M_2=t_{2,1}(M_1)=B_1+t_0\frac{\omega_2^4\omega_4^2}{\omega_1^3\omega_3^1}B_2,$$

$$M_3=t_{3,2}(M_2)=B_3+t_0\frac{\omega_2^4\omega_4^2\theta_2^4}{\omega_1^3\omega_3^1\theta_1^3}B_4,$$

$$N=t_{0,3}(M_3)=A_1+t_0\frac{\omega_2^4\omega_4^2\theta_2^4\theta_4^2}{\omega_1^3\omega_3^1\theta_1^3\theta_3^1}A_2. \qquad (2.17)$$

Но из (2.6) следует, что $\omega_2^4\omega_4^2=\omega_1^3\omega_3^1$, а из (2.2) – $\theta_2^4\theta_4^2=\theta_1^3\theta_3^1$, а потому $N=M_0$.

Теорема 6. Для каждой четверки прямых l_α, описывающих M_1-четверку поверхностей, существует двухпараметрическое семейство конфигураций Мебиуса.

Доказательство. На каждой прямой l_α возьмем две любые различные точки M_α и N_α, не лежащие на фокусной секущей и таких, что $M_{\beta+1}=t_{\beta+1,\beta}(M_\beta)$, $N_{\beta+1}=t_{\beta+1,\beta}(N_\beta)$, $\beta\in Z_4$. Учитывая, что каждая прямая $M_\alpha M_{\alpha+1}$ лежит как в касательной плоскости $\Pi(M_\alpha)$ линейчатой поверхности (l_α), так и в касательной плоскости $\Pi(M_{\alpha+1})$ линейчатой поверхности $(l_{\alpha+1})$, выпишем все касательные плоскости вместе с лежащими в них М-точками:

$$\begin{aligned}
&\Pi(M_0)=(M_0N_0M_1M_3),\\
&\Pi(N_0)=(M_0N_0N_1N_3),\\
&\Pi(M_1)=(M_1N_1M_2M_0),\\
&\Pi(N_1)=(M_1N_1N_2N_0),\\
&\Pi(M_2)=(M_2N_2M_1M_3),\\
&\Pi(N_2)=(M_2N_2N_1N_3),\\
&\Pi(M_3)=(M_3N_3M_0M_2),\\
&\Pi(N_3)=(M_3N_3N_0N_2).
\end{aligned} \qquad (2.18)$$

Из (2.18) видим, что каждая из выбранных точек лежит в четырех плоскостях. Рассмотрим два тетраэдра: тетраэдр $M_0N_0M_1N_1$ и тетраэдр $M_2N_2M_3N_3$. Из тех же формул (2.18) следует, что первые четыре касательные плоскости служат гранями первого тетраэдра, а последние четыре плоскости – гранями второго тетраэдра, причем вершины первого тетраэдра лежат на гранях второго, а вершины второго – на гранях первого. Теорема доказана.

В совокупности М-точек естественно выделить те пары, которые можно соединить общей касательной к поверхностям. Тогда можно говорить о *неориентируемом графе G, порожденном М-четверкой линейчатых поверхностей.*

Теорема 7. Граф *G*, порожденный M_1-четверкой, состоит из двух циклов.

Доказательство тривиально следует из теорем 5 и 6.

§ 3. M_2-четверки линейчатых поверхностей

Четверку линейчатых поверхностей, характеризующихся условием

$$\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}=-1, \qquad (3.1)$$

будем называть M_2-четверкой. Условие (3.1) говорит о том, что четверка прямых l_α, описывающая M_2-четверку поверхностей, не может быть произвольной. Чтобы описать взаимное расположение этих прямых, напомним понятие инволютивного пересечения линейчатых поверхностей (см., напр., в [2]).

Пусть линейчатая поверхность S_1 пересекается с линейчатой поверхностью S_2 по прямой l. Если M – произвольная точка прямой *l*, то касательную плоскость к поверхности S_1 в этой точке обозначим $\Pi_1(M)$, а касательную плоскость к поверхности S_2 - $\Pi_2(M)$. Определим отображение $f:l\to l$, сопоставляя каждой точке M точку N, такую, что $\Pi_1(M)=\Pi_2(N)$.

Если отображение *f* – инволюция, то говорят, что поверхности пересекаются по прямой *l* инволютивно.

Пусть $Q_{\alpha\beta\gamma}$ (α,β,γ – любые различные элементы из Z_4) – квадрика, проходящая через прямые $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$.

Теорема 1. Прямые l_α являются соответственными прямыми M_2-четверки поверхностей тогда и только тогда, когда квадрика $Q_{\alpha,\alpha+1,\alpha+2}$ пересекается инволютивно с квадрикой $Q_{\alpha,\alpha+2,\alpha+3}$ по прямым l_α и $l_{\alpha+2}$.

Пусть $\alpha = 0$. Квадрика Q_{012} в нашем репере может быть задана уравнением (2.1), а квадрика Q_{023}, содержащая прямые – уравнением:

$$x^2x^3 - \frac{\lambda(1-\mu)}{\mu(1-\lambda)}x^1x^4 + \frac{\lambda-\mu}{\mu(1-\lambda)}x^3x^4 = 0. \qquad (3.2)$$

Касательная плоскость к квадрике (2.1) в точке $M = A_1 + tA_2$ совпадает с касательной плоскостью к квадрике Q_{023} в точке $N = A_1 + t\lambda(1-\mu)\mu^{-1}(1-\lambda)^{-1}A_2$. Отображение, сопоставляющее точке M точку N очевидно является инволюцией. Аналогично проверяется, что данные квадрики пересекаются инволютивно и по прямой l_2, а также что квадрики Q_{123} и Q_{130} пересекаются инволютивно по прямым l_1 и l_3.

Заменив в (1.21) или, что то же самое, в (1.22) величину $\frac{1-\lambda}{1-\mu}$ на $-\frac{\lambda}{\mu}$, найдем, что $\theta_4^1 = x_1\theta_2^3$,

$$\theta_3^2 = x_1\theta_1^4,\ \frac{\lambda^2}{\mu^2}\theta_4^2 = x_2\theta_1^3,\ \theta_3^1 = x_2\theta_2^4. \qquad (3.3)$$

Внесем эти значения форм из (3.3) в (1.20). Тогда будем иметь: $\frac{\theta_2^4}{\omega_3^1} = \frac{\theta_1^3}{\omega_4^2}$, $\frac{\theta_2^3}{\omega_4^1} = \frac{\theta_1^4}{\omega_3^2}$,

$$\frac{\theta_2^4}{\omega_2^4} = \frac{\theta_1^3}{\omega_1^3},\ \frac{\theta_2^3}{\omega_2^3} = \frac{\theta_1^4}{\omega_1^4}. \qquad (3.4)$$

С учетом соотношений (3.3) и (3.4), окончательно перепишем дифференциальные уравнения M_2-четверки линейчатых поверхностей в виде:

$$\omega_3^1 = u_1\omega_2^4,\ \omega_4^2 = u_1\omega_1^3,\ \omega_3^2 = u_2\omega_1^4,\ \omega_4^1 = u_2\omega_2^3,$$
$$\theta_1^3 = v_1\omega_1^3,\ \theta_2^4 = v_1\omega_2^4,\ \theta_2^3 = v_2\omega_2^3,\ \theta_1^4 = v_2\omega_1^4, \qquad (3.5)$$
$$\theta_4^1 = h_1\omega_2^3,\ \theta_3^2 = h_1\omega_1^4,\ \theta_3^1 = h_2\omega_2^4,$$
$$\theta_4^2 = h_2\frac{\mu^2}{\lambda^2}\omega_1^3.$$

Теорема 2. Каждые две М-точки на прямой l_α гармонически делят базисные точки этой прямой.

Если учесть равенства (3.5), то уравнения (1.4), (1.13), (1.16), (1.18) для определения М-точек $M_0 = A_1 + t_0A_2$, $M_1 = A_3 + t_1A_4$, $M_2 = B_1 + t_2B_2$, $M_3 = B_3 + t_3B_4$ принимают вид

$$\omega_2^3\omega_2^4t_0^2 - \omega_1^3\omega_1^4 = 0, \qquad \omega_1^3\omega_2^3t_1^2 - \omega_1^4\omega_2^4 = 0,$$
$$\omega_2^3\omega_2^4t_2^2 - \omega_1^3\omega_1^4 = 0,\ \omega_1^3\omega_2^3t_3^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\omega_1^4\omega_2^4 = 0, \qquad (3.6)$$

и, следовательно, теорема верна.

Теорема 3. Граф G, порожденный M_2-четверкой поверхностей, является циклом.

Обозначим корни уравнений (3.15), определяющие М-точки на прямых четверки, соответственно t_0^1 и t_0^2; t_1^1 и t_1^2, t_2^1 и t_2^2, t_3^1 и t_3^2. Пусть, например, $t_0^1 = \sqrt{(\omega_1^3\omega_1^4)(\omega_2^3\omega_2^4)^{-1}}$ и $M_0 = A_1 + t_0^1A_2$.

Простым вычислением с учетом равенств (3.5), (3.6) находим, что

$$M_1^1 = t_{10}(M_0^1), M_2^1 = t_{21}(M_1^1), \quad M_3^1 = t_{32}(M_2^1),$$
$$M_0^2 = t_{30}(M_3^1),\ M_1^2 = t_{10}(M_0^2),\ M_2^2 = t_{21}(M_1^2),$$
$$M_3^2 = t_{32}(M_2^2),\ M_0^1 = t_{30}(M_3^2).$$

Теорема 4. Каждая M_2- четверка поверхностей допускает конфигурацию Мебиуса.

Выпишем все 8 касательных плоскостей в М-точках, указав при этом все принадлежащие ей М-точки:

$$\Pi(M_0^1) = (M_0^1M_0^1M_1^1M_3^2),$$
$$\Pi(M_0^2) = (M_0^1M_0^2M_1^2M_3^1),$$
$$\Pi(M_1^1) = (M_1^1M_1^2M_0^1M_2^1),$$
$$\Pi(M_1^2) = (M_1^1M_1^2M_2^2M_0^2),$$
$$\Pi(M_2^1) = (M_2^1M_2^2M_1^1M_3^1),$$
$$\Pi(M_2^2) = (M_2^1M_2^2M_1^2M_3^2), \qquad (3.7)$$
$$\Pi(M_3^1) = (M_3^1M_3^2M_2^1M_0^2),$$
$$\Pi(M_3^2) = (M_3^1M_3^2M_2^2M_0^1).$$

Из (3.7) видим, что в каждой касательной плоскости лежат по 4 М-точки, а через каждую точку проходит по 4 плоскости. Далее, если выделить два тетраэдра: $M_0^1M_0^2M_1^1M_1^2$ и $M_2^1M_2^2M_3^1M_3^2$, то вершины первого лежат на гранях второго, а вершины второго – на гранях первого. Теорема доказана.

Литература

1. Гильберт, Д. Наглядная геометрия / Д. Гильберг, С. Кон-Фоссен. – М., 1981. – 344 с.
2. Фиников, С. П. Теория пар конгруэнций / С. П. Фиников. – ГИТТЛ, 1956. – 443 с.
3. Ивлев, Е. Т. О паре линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве / Е. Т. Ивлев // Геом. сб., вып. 2. Тр. – ТГУ, 1961. – Т. 161. – С. 3-10.
4. Фиников, С. П. Пара линейчатых поверхностей, расслояемая двумя семействами кривых / С. П. Фиников // Изв.АН СССР, сер. Матем., 1945. – № 2. – С. 79-112.