УДК 519.63 : 517.958

О СХОДИМОСТИ ОДНОЙ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА СЖИМАЕМЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Н. А. Кучер

В работе проводится анализ сходимости и скорости сходимости неявной конечно-разностной схемы расщепления в нелинейной постановке для нестационарной системы уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости с двумя и тремя пространственными переменными. О точном решении априори не делается каких-либо предположений о гладкости и поэтому такую схему можно использовать и в тех случаях, когда о точном решении заранее ничего не известно.

Численным методам решения задач динамики вязкой сжимаемой жидкости посвящено довольно много работ, в которых предложены различные разностные схемы. Однако строгие математические результаты о их сходимости и устойчивости получены только в случае одномерного движения [1, 2]. В настоящей работе предпринята попытка в определенной мере восполнить этот пробел. Рассматриваемая разностная схема построена на базе расщепления системы уравнений Навье-Стокса по физическим процессам и пространственным направлениям [3]. Результаты о сходимости дифференциальных схем расщепления такого типа получены в работе [4].

Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса динамики вязкого баротропного газа:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\bar{u}\cdot\nabla\rho+\rho\, div\,\bar{u}=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}\right)+\nabla p=\mu\Delta\bar{u}+\frac{1}{3}\mu\nabla\left(div\,\bar{u}\right) \quad (1)$$

$$p=p(\rho)$$

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_k}\right),\quad div\,\bar{u}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

$$\Delta\phi=div\left(\nabla\phi\right),\ k=2,3,$$

где искомые функции $\bar{u}=\left(u_1,u_2,\ldots,u_k\right)$, ρ и p, зависящие от переменных $x=\left(x_1,\ldots,x_k\right)$ и t, обозначают соответственно скорость, плотность и давление. Функция, выражающая связь давления с плотностью, предполагается достаточно гладкой.

Для системы (1) рассмотрим следующие задачи.

I. Задача Коши

К уравнениям (1) присоединим начальные условия $\rho|_{t=0}=\rho_0(x)$, $\bar{u}|_{t=0}=\bar{u}_0(x)$, $x\in R^k$, (2)

предполагается, что ρ_0 – строго положительная ограниченная функция и $\rho_0,\bar{u}_0$ – периодические (с единичным периодом) функции по каждой пространственной переменной.

II. Смешанная задача

В цилиндре

$$Q_T=\Omega\times\left(0,T\right),T>0,$$

$$\Omega=\left\{x=\left(x_1,\ldots,x_k\right):0<x_i<1,i=1,\ldots,k\right\}$$

ищется решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\rho|_{t=0}=\rho_0(x),\quad \bar{u}|_{t=0}=\bar{u}_0(x),\quad x\in\Omega \quad (3)$$

и граничным условиям

$$\bar{u}\cdot\bar{n}|_{\Gamma_T}=0,\ \omega|_{\Gamma_T}=0,\ \omega=rot\,\bar{u}, \quad (4)$$

$\bar{n}$ – вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω, $\Gamma_T=\partial\Omega\times\left(0;T\right)$.

Введем следующие обозначения: для функций $u_h(x)$ дискретного аргумента, определенных на некотором множестве узлов

$$\left\{\begin{aligned}&x=x^\beta=\left(x_1^{\beta_1},\ldots,x_k^{\beta_k}\right):x_i^{\beta_i}=\\&=h_i\cdot\beta_i,h_i>0,\beta_i\in Z,i=1,\ldots,k\end{aligned}\right\}$$

положим:

$\phi_i^{\pm1}u_h(x)=u_h\left(x\pm h_i\cdot\bar{e}_i\right)$, $\bar{e}_i$ – орт, направленный по оси x_i,

$$\partial_s=\frac{1}{h_s}\left(\phi_s-1\right),\quad \bar{\partial}_s=\frac{1}{h_s}\left(1-\phi_s^{-1}\right),$$

$$\tilde{\partial}_s=\frac{1}{2}\left(\partial_s+\bar{\partial}_s\right),\quad \partial_s^{\alpha_s}=\partial_s\left(\partial_s^{\alpha_{s-1}}\right),$$

$$\bar{\partial}_s^{\alpha_s}=\bar{\partial}_s\left(\bar{\partial}_s^{\alpha_s-1}\right),\quad \partial^{[\alpha]}=\partial_1^{\alpha_1},\ldots,\partial_k^{\alpha_k},$$

$$\bar{\partial}^{[\alpha]}=\bar{\partial}_1^{\alpha_1},\ldots,\bar{\partial}_k^{\alpha_k},\quad [\alpha]=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_k\right),\quad s=1,\ldots,k.$$

Условимся обозначать через π_h множества скалярных функций, вектор-функций или матричных функций, определенных на решетке

$$\Gamma_h=\left\{\begin{aligned}&x^\beta=\left(x_1^{\beta_1},\ldots,x_k^{\beta_k}\right):x_i^{\beta_i}=\\&=h_i\cdot\beta_i,h_i>0,-\infty<\beta_i<\infty,i=1,\ldots,k\end{aligned}\right\}$$

и периодических (с единичным периодом) по каждой переменной $x_i^{\beta_i}$. Функции множества π_h достаточно рассматривать на сетке

$$\Omega_h=\left\{\begin{aligned}&x^\beta=\left(x_1^{\beta_1},\ldots,x_k^{\beta_k}\right):x_i^{\beta_i}=h_i\cdot\beta_i,h_i>0,\beta_i=\\&=0,\ldots,N_i-1,N_ih_i=1,i=1,\ldots,k\end{aligned}\right\}.$$

В пространстве сеточных функций π_h введем нормы по формулам:

$$\|u_h\|^2_{l_2(\Omega_h)} = |u_h|^2_{0,\Omega_h} = \sum_{\Omega_h} |u_h(x)|^2 h_1 \ldots h_k,$$

$$\|u_h\|^2_{H^l(\Omega_h)} = \|u_h\|^2_{l,\Omega_h} = \sum_{m=0}^{l} \|u_h\|^2_{l_2^{(m)}(\Omega_h)},$$

$$\|u_h\|^2_{l_2^{(m)}(\Omega_h)} = |u_h|^2_{m,\Omega_h} = \sum_{|\alpha|=m} \left|\partial^{[\alpha]} u_h\right|^2_{0,\Omega_h}.$$

Мы будем рассматривать также множества вектор-функций

$$V_h = \left\{ v(x^\beta) = \left(v_1(x^\beta), \ldots, v_k(x^\beta)\right) : v_i|_{x_i=0,1} = 0 \right\}$$

и скалярных функций $F_h = \left\{ \phi(x^\beta) \right\}$, определенных в области

$$\overline{\Omega}_h = \left\{ \begin{array}{l} x^\beta = (\beta_1 h_1, \ldots, \beta_k h_k) : \beta_i = \\ = 0, \ldots, N_i,\ N_i h_i = 1,\ i = 1, \ldots, k \end{array} \right\}.$$

Элементам этих пространств сопоставим их продолжения на всю решетку Γ_h таким образом, что получим соответственно множества:

$$\overset{(*)}{V}_h = \{ v(x^\beta) = \left(v_1(x^\beta), \ldots, v_k(x^\beta)\right) : v_i(x_i^{\beta_i}) =$$
$$= -v_i(-x_i^{\beta_i}),\ v_i(x_j^{\beta_j}) = v_i(-x_j^{\beta_j}),\ j \neq i,$$
$$i, j = 1, \ldots, k,\ v_i(x_s^{\beta_s+2}) = v_i(x_s^{\beta_s}),\quad s = 1, \ldots, k\},$$

$$\overset{(*)}{F}_h = \left\{ \begin{array}{l} \phi(x^\beta) : \phi(x_i^{\beta_i}) = \phi(-x_i^{\beta_i}), \\ \phi(x_i^{\beta_i}) = \phi(x_i^{\beta_{i+2}}),\ i = 1, \ldots, k \end{array} \right\}.$$

На линейных множествах V_h и F_h определим норму по формуле:

$$\|u_h\|^2_{l_2,\overline{\Omega}_h} = \sum_{|\alpha| \le l} \left[\int_{\Omega_h} \begin{array}{l} \left|\partial^{[\alpha]} u_h(x)\right|^2 h_1 \ldots h_k + \\ + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\beta_i=1}^{N_i} \left| \overline{\partial}_i^{\alpha_i} \prod_{j \neq i} \partial_j^{\alpha_j} u_h \right|^2 h_1 \ldots h_k \end{array} \right].$$

(Если под знаком сумм участвуют значения функции u_h в узлах, лежащих вне области $\overline{\Omega}_h$, то подразумевается, что они взяты равными значениям соответствующих продолженных функций из $\overset{(*)}{V}_h$ или $\overset{(*)}{F}_h$).

Для восполнения сеточных функций будем использовать так называемый интерполятор Рябенького $U(y|u_h)$, сопоставляющий дискретной функции u_h некоторую кусочно-полиномиальную функцию переменной $y = (y_1, \ldots, y_k)$, обладающую в соответствующей области непрерывными частными производными до порядка l включительно [5]. Функцию $\tilde{u}(y) = U(y|u_h)$ называют интерполяционной функцией Рябенького.

Семейства троек $\left(H^l(\Omega_h), p_h, z_h\right), \left(V_h, p_h, z_h\right)$, и $\left(F_h, p_h, x_h\right), l \ge 2$ (где под операцией «продолжения» p_h подразумевается интерполянт Рябенького, а оператор «сужения» z_h есть операция сужения функции непрерывного аргумента на разностную сетку) задают устойчивую гильбертову аппроксимацию (в смысле определения Темама [7]) соответственно пространства $H^l(\Omega), V^l(\Omega)$, и $F^l(\Omega)$, где $H^l(\Omega)$ состоит из функций пространства С.Л. Соболева $W^{l,2}(\Omega)$, периодических по каждой переменной x_i, $V^l(\Omega)$ – замыкание по норме $W^{l,2}(\Omega)$ множества вектор-функций:

$$C_*^l(\overline{\Omega}) = \{ v(x) = \left(v_1(x), \ldots, v_k(x)\right) \in C^l(\overline{\Omega}) : \left.\frac{\partial^{2p} v_i}{\partial x_i^{2p}}\right|_{x_i=0,1} = 0,$$
$$p = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right],\ \left.\frac{\partial^{2q+1} v_i}{\partial x_j^{2q+1}}\right|_{x_j=0,1} = 0,$$
$$j \neq i,\ q = 0, \ldots, \left[\frac{l-1}{2}\right],\ i, j = 1, \ldots, k\},$$

$F^l(\Omega)$ – замыкание по норме $W^{l,2}(\Omega)$ множества скалярных функций:

$$M_*^l(\overline{\Omega}) = \left\{ \begin{array}{l} \phi(x) \in C^l(\overline{\Omega}) : \left.\frac{\partial^{2q+1}\phi}{\partial x_i^{2q+1}}\right|_{x_i=0,1} = 0, \\ q = 0, \ldots, \left[\frac{l-1}{2}\right],\quad i = 1, \ldots, k \end{array} \right\}.$$

Объем статьи не позволяет привести разностные схемы как в двумерном, так и в трехмерном случаях и поэтому мы ограничимся случаем двух пространственных переменных.

С целью предусмотреть возможность использования неравномерной сетки на временном промежутке, для фиксированного $\tau \in (0, T)$, $N\tau = T$ (N - целое) рассмотрим разбиение $\overset{(n)}{\omega}_i$ дробного шага $[n\tau + \frac{i-1}{4}\tau, n\tau + \frac{i}{4}\tau)$:

$$\overset{(n)}{\omega}_i = \left\{ \begin{array}{l} t = t_{n+\frac{i-1}{4}+\frac{s}{4p_i}} = \left(n + \frac{i-1}{4}\right)\tau + s \cdot \Delta_i, \\ s = 0, \ldots, p_i,\ p_i \cdot \Delta_i = \frac{1}{4}\tau \end{array} \right\},$$

$i = 1, \ldots, 4,\ n = 0, \ldots, N-1.$

Задаче Коши (1), (2) сопоставим следующую разностную схему.

Задача P_1^τ

В области $\Omega_h \times \overline{\omega}^{\Delta}$, $\overline{\omega}^{\Delta} = \bigcup_{n=0}^{N-1}\bigcup_{i=1}^{4} \overset{(n)}{\omega_i}$ ищутся сеточные функции $Q = Q_{\tau,h,\Delta} = \ln \rho_{\tau,h,\Delta}$, $\overline{u} = \overline{u}_{\tau,h,\Delta}$, такие, что

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\partial_t Q(t) + u_1^n \tilde{\partial}_1 Q(t+\Delta_1) = 0, \\ R(Q^n)\left[\frac{1}{4}\partial_t \overline{u}(t) + u_1^n \tilde{\partial}_1 \overline{u}(t+\Delta_1)\right] = A_1 R_1(Q^n)\partial_1 \overline{\partial}_1 \overline{u}(t+\Delta_1), \quad A_1 = diag\left\{\frac{4}{3}\mu, \mu\right\}, \\ x \in \Omega_h, \quad t = t_{n+\frac{s}{4p_1}}, \quad s = 0,\dots,p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\partial_t Q(t) + u_2^n \tilde{\partial}_2 Q(t+\Delta_2) = 0, \\ R(Q^n)\left[\frac{1}{4}\partial_t \overline{u}(t) + u_2^n \tilde{\partial}_2 \overline{u}(t+\Delta_2)\right] = \\ = R_1(Q^n)\left[A_2 \partial_2 \overline{\partial}_2 \overline{u}(t+\Delta_2) + \frac{1}{2}B_2\left\{\overline{\partial}_1 \partial_2 \overline{u}\left(t+\Delta_2 - \frac{1}{4}\tau\right) + \partial_1 \overline{\partial}_2 \overline{u}\left(t+\Delta_2-\frac{1}{4}\tau\right)\right\}\right], \\ A_2 = diag\left\{\mu, \frac{4}{3}\mu\right\}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}\mu \\ \frac{1}{3}\mu & 0 \end{bmatrix}, \\ x \in \Omega_h, \quad t = t_{n+\frac{1}{4}+\frac{s}{4p_2}}, \quad s = 0,\dots,p_2-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\partial_t Q(t) + \tilde{\partial}_1 u_1(t+\Delta_3) = 0, \\ \frac{1}{4}R(Q^n)\partial_t u_1(t) + \tilde{\partial}_1 Q(t+\Delta_3) = 0, \\ \partial_t u_2(t) = 0, \\ x \in \Omega_h, \quad t = t_{n+\frac{1}{2}+\frac{s}{4p_3}}, \quad s = 0,\dots,p_3-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\partial_t Q(t) + \tilde{\partial}_2 u_2(t+\Delta_4) = 0, \\ \frac{1}{4}R(Q^n)\partial_t u_2(t) + \tilde{\partial}_2 Q(t+\Delta_4) = 0, \\ \partial_t u_1(t) = 0, \\ x \in \Omega_h, \quad t = t_{n+\frac{3}{4}+\frac{s}{4p_4}}, \quad s = 0,\dots,p_4-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & Q(0) = Q_0 = \ln \rho_0, \\ & \overline{u}(0) = \overline{u}_0, \quad Q = Q_{\tau,h,\Delta} \in \pi_h, \\ & \overline{u} = \overline{u}_{\tau,h,\Delta} \in \pi_h \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь $R(Q)$ и $R_1(Q)$ определяются формулами

$$R(Q) = c^{-2}(\rho)|_{\rho=\exp Q},$$

$$R_1(Q) = R(Q)\exp(-Q), \quad c^2(\rho) = \frac{dp}{d\rho}$$

и $\partial_t f(t)$ – разностное отношение относительно временной переменной и соответствующим шагом.

Разностная задача, соответствующая смешанной задаче (1), (3), (4) несколько отличается по постановке и может сформулирована следующим образом.

Задача P_2^τ

Вводя фиктивные слои $(-h_1, \beta_2 h_2)$, $(1+h_1, \beta_2 h_2)$, $\beta_2 = 0,\dots,N_2$, $(\beta_1 h_1, -h_2)$, $(\beta_1 h_1, 1+h_2)$, $\beta_1 = 0,\dots,N_1$ сеточные функции $(Q, \overline{u}) = (Q_{\tau,h,\Delta}, \overline{u}_{\tau,h,\Delta})$ ищем из условий:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\partial_t Q(t) + u_1^n \tilde{\partial}_1 Q(t+\Delta_1) = 0, \\ R(Q^n)\left[\frac{1}{4}\partial_t \overline{u}(t) + u_1^n \tilde{\partial}_1 \overline{u}(t+\Delta_1)\right] = \\ = A_1 R_1(Q^n)\partial_1 \overline{\partial}_1 \overline{u}(t+\Delta_1), \\ x \in \overline{\Omega}_h, \quad t = t_{n+\frac{s}{4p_1}}, \quad s = 0,\dots,p_1-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\partial_t Q(t) + u_2^n \tilde{\partial}_2 Q(t+\Delta_2) = 0, \\ R(Q^n)\left[\frac{1}{4}\partial_t \bar{u}(t) + u_2^n \tilde{\partial}_2 \bar{u}(t+\Delta_2)\right] = \\ = R_1(Q^n)\begin{bmatrix} A_2\partial_2\bar{\partial}_2\bar{u}(t+\Delta_2) + \\ B_2\tilde{\partial}_1\tilde{\partial}_2\bar{u}\left(t+\Delta_2-\frac{1}{4}\tau\right)\end{bmatrix}, \\ x\in\bar{\Omega}_h, \quad t = t_{n+\frac{1}{2}+\frac{s}{4p_2}}, \quad s = 0,\dots,p_2-1 \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\partial_t Q(t) + \tilde{\partial}_j u_j(t+\Delta_{2+j}) = 0, \\ \frac{1}{4}R(Q^n)\partial_t u_j(t) + \tilde{\partial}_j Q(t+\Delta_{2+j}) = 0, \\ \partial_t u_k(t) = 0, \quad k \ne j, \\ x\in\bar{\Omega}_h, \quad t = t_{n+\frac{1}{2}+\frac{j-1}{4}+\frac{s}{4p_{2+j}}}, \quad s = 0,\dots,p_{2+j}-1, \\ j = 1,2 \end{cases}$$

В качестве граничных условий для систем уравнений (6) примем следующие соотношения:

$$u_i|_{x_i=-h_i} + u_i|_{x_i=h_i} = 0, \quad u_i|_{x_i=1+h_i} + u_i|_{x_i=1-h_i} = 0,$$

$$u_i|_{x_j=h_j} - u_i|_{x_j=-h_j} = 0, \quad u_i|_{x_j=1+h_j} - u_i|_{x_j=1-h_j} = 0, \quad j\ne i,$$

$$Q|_{x_i=-h_i} - Q|_{x_i=h_i} = 0, \quad Q|_{x_i=1+h_i} - Q|_{x_i=1-h_i} = 0, \quad i,j = 1,2$$

$$Q|_{t=0} = Q_0, \quad \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0. \qquad (7)$$

Положим

$X^l(\Omega) = H^l(\Omega), Y^l(\Omega) = H^l(\Omega)$, если речь идет о задаче P_1^τ и

$X^l(\Omega) = F^l(\Omega), Y^l(\Omega) = V^l(\Omega)$ – в случае задачи P_2^τ. Пусть $B^l(\Omega) = X^l(\Omega)\times Y^l(\Omega)$.

Семейству решений $\left(Q_{\tau,h,\Delta}, \bar{u}_{\tau,h,\Delta}\right)$ разностных схем P_1^τ и P_2^τ сопоставим их восполнения:

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}_{\tau,h,\Delta} = U\left(x\,|\,Q_{\tau,h,\Delta}\right), \quad \tilde{\bar{u}}_{\tau,h,\Delta} = U\left(x\,|\,\bar{u}_{\tau,h,\Delta}\right),$$

где U – интерполятор Рябенького по переменным x_i. Пусть при этом $\tilde{Q}^1 = \tilde{Q}^1_{\tau,h,\Delta}$, $\tilde{\bar{u}}^1 = \tilde{\bar{u}}^1_{\tau,h,\Delta}$ – линейные по t интерполяции функций $\tilde{Q}$ и $\tilde{\bar{u}}$ соответственно.

Теорема 1. Если начальные функции (5) и (7) удовлетворяют условию

$Q_0(x)\in X^l(\Omega)$, $\bar{u}_0(x)\in Y^l(\Omega)$, $l\ge 3$,, то на некотором промежутке $(0,T)$ последовательность интерполяционных функций

$\tilde{Z}^1_{\tau,h,\Delta} = \left(\tilde{Q}^1_{\tau,h,\Delta}, \tilde{\bar{u}}^1_{\tau,h,\Delta}\right)$ при

$\tau, |h|, \Delta = \max\Delta_i \to 0$ $\left(\Delta\le\Delta_0, \Delta\le\frac{1}{4}\tau, \Delta_0\right.$ - определяется данными задачи) сходится к точному решению

$$Z(t) = \left(Q(t), \bar{u}(t)\right) \in L^\infty\left(0,T;B^l(\Omega)\right)$$

соответствующей задачи в следующем смысле:

$\tilde{Z}^1_{\tau,h,\Delta} \to Z$ * – слабо в $L^\infty\left(0,T;B^l(\Omega)\right)$,

$\tilde{Z}^1_{\tau,h,\Delta} \to Z$ сильно в $C\left(0,T;B^{l-1}(\Omega)\right)$,

$\partial\tilde{Q}^1_{\tau,h,\Delta}/\partial t \to \partial Q/\partial t$ *– слабо в $L^\infty\left(0,T;X^{l-1}(\Omega)\right)$,

$\partial\bar{u}^1_{\tau,h,\Delta}/\partial t \to \partial\bar{u}/\partial t$ слабо в $L^2\left(0,T;Y^{l-1}(\Omega)\right)$.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то при всех $\Delta\le\Delta_0$ имеют место неравенства:

$$\left\| Z_{\tau,h,\Delta}(t) - Z(t)\right\|^2_{l-2,\bar{\Omega}_h} \le c\left(|h|^2 + \tau + \Delta\right),$$

$$\int_0^T \left\| \tilde{\bar{u}}^1_{\tau,h,\Delta}(s) - \bar{u}(s)\right\|^2_{l-1,2} ds \le c\left(|h|^2 + \tau + \Delta\right),$$

$$\left\| Z_{\tau,h,\Delta}(t) - Z(t)\right\|^2_{l-1,\bar{\Omega}_h} \le c\sqrt{|h|^2 + \tau + \Delta}.$$

Литература

1. Смагулов, Ш. Математические вопросы приближенных методов для уравнений Навье-Стокса: дис. д-ра физ.-мат. наук. – Алма-Ата, 1987.
2. Амосов, А. А. Разностная схема для уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа, ее свойства и оценки погрешности «в целом» / А. А. Амосов, А. А. Злотник. – Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 288. – № 2. – С. 270-275.
3. Ковеня, В. М. Метод расщепления в задачах газовой динамики / В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1981. – 304 с.
4. Кучер, Н. А. Некоторые замечания о схемах расщепления для уравнений газовой динамики, используемых в методе «крупных частиц» / Н. А. Кучер. – Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11. Специальный выпуск. – С. 94-108.
5. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1974.
6. Кучер, Н. А. О сходимости схем расщепления для многомерных уравнений вязкого газа / Н. А. Кучер. – Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 320. – № 6. – С. 1315-1318.
7. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.