

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Ю. Н. Захаров, К. С. Иванов

В настоящей работе предлагается метод решения нестационарной системы уравнений Навье-Стокса плоского движения вязкой однородной несжимаемой жидкости путем решения на каждом дискретном временном шаге системы линейных или билинейных алгебраических уравнений итерационным методом минимальных невязок с многокомпонентной оптимизацией параметров.

Рассмотрим в области G нестационарную систему уравнений Навье-Стокса, описывающую плоское движение вязкой однородной несжимаемой жидкости. В большинстве случаев данную систему записывают в переменных «функция тока – вихрь» и на каждом шаге по времени решают сначала линейное уравнение переноса вихря для Ω , затем уравнение Пуассона для функции тока ψ [1]. Преимуществом такой постановки задачи является относительная простота реализации численного алгоритма. Однако такому подходу присущи и существенные недостатки: во-первых, на каждом временном шаге приходится решать два уравнения, одним из которых является уравнение Пуассона; во-вторых, возникают проблемы, связанные с постановкой краевых условий для вихря Ω . Решению этих проблем посвящено достаточно большое количество литературы (см., например, обзор в [2]).

Менее популярными являются методы решения системы уравнений Навье-Стокса, записанной только относительно функции тока ψ [3]. Преимуществом такого подхода является отсутствие каких-либо существенных проблем постановки краевых условий для функции тока ψ . Однако в этом случае на каждом дискретном временном шаге необходимо решать системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений.

1. Исходная дифференциальная задача имеет следующий вид: уравнения движения в постановке «функция тока – вихрь»:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\Omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Omega)}{\partial y} = \nu \Delta \Omega, \quad (1.1)$$

$$\Delta \psi = \Omega, \quad (1.2)$$

уравнения движения, записанные только относительно функции тока:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta \psi \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \psi \right)}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi, \quad (1.3)$$

начальные условия:

$$\psi|_{t=0} = \Phi(x, y), \quad x, y \in G, \quad (2)$$

краевые условия:

$$\psi|_{\partial G} = \Psi_1(x, y, t), \quad t \in [0; T], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial G} = \Psi_2(x, y, t), \quad t \in [0; T]. \quad (4)$$

Здесь $\nu > 0$ – коэффициент вязкости, $\Phi(x, y)$, $\Psi_1(x, y, t)$, $\Psi_2(x, y, t)$ – заданные функции своих аргументов, G – выпуклая, односвязная область решения, ∂G – граница области G . Будем считать, что задача (1) – (4) имеет единственное решение [4].

2. Введем в области G неравномерную по t , x , y , согласованную с границей ∂G сетку G_h . На сетке G_h в зависимости от выбора постановки исходной дифференциальной задачи можно использовать несколько вариантов ее аппроксимации:

а) дифференциальная задача записана в постановке «функция тока – вихрь». Для аппроксимации конвективных слагаемых используется некоторая схема расщепления:

$$\frac{\Omega_h^{n+1/2} - \Omega_h^n}{\tau/2} + L_{hx}^n \Omega_h^{n+1/2} + L_{hy}^n \Omega_h^n = f_h^{n+1/2}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\Omega_h^{n+1} - \Omega_h^{n+1/2}}{\tau/2} + L_{hx}^n \Omega_h^{n+1/2} + L_{hy}^n \Omega_h^{n+1} = f_h^{n+1}, \quad (5.2)$$

$$\Lambda_h \psi_h^{n+1} = \Omega_h^{n+1}, \quad (5.3)$$

$$K_h \psi_h^{n+1} = g_h^{n+1}, \quad (5.4)$$

где (5.1) – (5.3) есть аппроксимация дифференциального уравнения (1) (L_{hx}^n, L_{hy}^n) – некоторая аппроксимация конвективных слагаемых в (1.1) – линейные операторы с матрицей простой структуры, Λ_h – некоторая аппроксимация оператора Лапласа), а (5.4) – некоторая аппроксимация краевых условий (3), (4);

б) дифференциальная задача записана в постановке «функция тока – вихрь». Для аппроксимации конвективных слагаемых схемы расщепления не используются:

$$\frac{\Omega_h^{n+1} - \Omega_h^n}{\tau} + L_h^{n+1} \Omega_h^{n+1} = f_h^{n+1}, \quad (6.1)$$

$$\Lambda_h \psi_h^{n+1} = \Omega_h^{n+1}, \quad (6.2)$$

$$K_h \psi_h^{n+1} = g_h^{n+1}, \quad (6.3)$$

где (5.1) – (5.2) есть аппроксимация дифференциального уравнения (1) (L_h^{n+1} – некоторая аппроксимация конвективных слагаемых в (1.1), Λ_h – некоторая аппроксимация оператора Лапласа), а (6.3) – некоторая аппроксимация краевых условий (3), (4);

с) дифференциальная задача записана относительно только функции тока:

$$\frac{\Delta\Psi_h^{n+1} - \Delta\Psi_h^n}{\tau} + L_h^{n+1}\Psi_h^{n+1} = f_h^{n+1}, \quad (7.1)$$

$$K_h \psi_h^{n+1} = g_h^{n+1}, \quad (7.2)$$

где (7.1) есть аппроксимация дифференциального уравнения (1) (L_h^{n+1}) – некоторая аппроксимация конвективных слагаемых в (1.3), а (7.2) – некоторая аппроксимация краевых условий (3), (4).

Заметим, что оператор L_h^{n+1} в (6.1) и (7.1) может быть как линейным, так и нелинейным, в зависимости от способа аппроксимации конвективных

слагаемых $\frac{\partial(u\Omega)}{\partial x}$, $\frac{\partial(v\Omega)}{\partial y}$ в (1.1) и

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Delta\psi\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta\psi\right)}{\partial y} \text{ в (1.3). В случае, если}$$

для аппроксимации величин, входящих в конвективные слагаемые, используются значения с верхнего временного слоя, то оператор L_h^{n+1} является нелинейным, в случае же использования для аппроксимации указанных величин значений с нижнего временного слоя, то оператор L_h^{n+1} становится линейным, и мы получим линеаризованную разностную схему.

3. Независимо от выбора постановки исходной дифференциальной задачи и способа аппроксимации конвективных слагаемых разностные задачи (5) – (7) для каждого момента времени t_{n+1} можно единообразно записать как систему алгебраических уравнений вида

$$A(u, u) = f, \quad (8)$$

где u, f – векторы размерности m (число узлов сетки), $A(u, v) = A_1(u, v) + A_2v$,

A_2 – линейный оператор, A_1 – билинейное отображение, обладающее свойством

$$\begin{aligned} &A_1(\xi_1 u^{(1)} + \xi_2 u^{(2)}, \eta_1 v^{(1)} + \eta_2 v^{(2)}) = \\ &= \xi_1 \eta_1 A_1(u^{(1)}, v^{(1)}) + \xi_1 \eta_2 A_1(u^{(1)}, v^{(2)}) + \\ &+ \xi_2 \eta_1 A_1(u^{(2)}, v^{(1)}) + \xi_2 \eta_2 A_1(u^{(2)}, v^{(2)}), \end{aligned} \quad (9)$$

$u^{(i)}, v^{(i)}$ – произвольные векторы размерности m , ξ_i, η_i – произвольные постоянные, $i=1, 2$.

Отметим, что в случае линеаризованной разностной схемы, на каждом шаге по времени мы имеем систему линейных алгебраических уравнений

($A_1 \equiv 0$), матрица которой, однако, зависит от временного слоя. При этом достаточно сложно установить некоторые свойства матрицы полученной системы линейных алгебраических уравнений (например, неособенность и знакоопределенность), которые бы позволили применять богатый арсенал методов для решения этой системы [5]. В случае же нелинейной (билинейной) системы алгебраических уравнений ($A_1 \neq 0$) данная проблема еще более обостряется. Очевидно, что для решения системы (8) необходимо использовать такие методы, которые позволяли бы получать её решение с использованием минимальной информации о свойствах оператора A .

Далее, независимо от того, является ли система (8) линейной или нелинейной, для её решения построим итерационный процесс [6]:

$$u^{n+1/2} = u^n - \tau_{n+1}[A(u^n, u^n) - f], \quad (10)$$

$$u^{n+1} = u^{n+1/2} + \alpha_{n+1}x^n, \quad n=1, 2, \dots, \quad (11)$$

где x^n – некоторый вектор размерности m , u^0 – произвольное начальное приближение из области определения оператора A , τ_{n+1}, α_{n+1} – итерационные параметры.

Пусть α_{n+1} – квадратная матрица с m ненулевыми элементами $\alpha_{k,j}^{(n+1)}$, $i, j=1..m$, k – произвольное целое число от 1 до m .

Перепишем (9) в виде:

$$u^{n+1} = y_{(p-1)}^{n+1/2} + \sum_{i=p}^m \alpha_{k,i}^{(n+1)} e^{k_i}, \quad p, j=1, 2, \dots, m, \quad (12)$$

где $y_{(p-1)}^{n+1/2} = u^{n+1/2} + \alpha_{k,j}^{(n+1)} e^{(k_1)} + \dots + \alpha_{k_{p-1},j}^{(n+1)} e^{(k_{p-1})}$, $y_{(0)}^{n+1/2} = u^{n+1/2}$, $e^{(k_i)}$ – вектор с одной ненулевой k_i – ой компонентой.

Введем обозначение:

$$r_{(i)}^{n+1/2} = A(y_{(i-1)}^{n+1/2} + \alpha_{k,j}^{(n+1)} e^{(k_i)}), \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

$$y_{(i-1)}^{n+1/2} + \alpha_{k,j}^{(n+1)} e^{(k_i)} - f$$

Очевидно, что

$$r^{n+1} = r_{(m)}^{n+1/2} = A(u^{n+1}, u^{n+1}) - f \text{ и}$$

$$r_{(0)}^{n+1/2} = r^n = A(u^n, u^n) - f - \text{невязки схемы (11).}$$

Переписывая (12) относительно нормы невязки и выбирая $\alpha_{k,j}^{(n+1)}$ из условия минимума $\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2$ [6] можно получить:

$$\|r_{(i)}^{n+1/2}\| \leq \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad n=1, 2, \dots \quad (14)$$

Неравенство (14) означает, что на каждом итерационном шаге норма вектора невязки не возрастает. Необходимо отметить, что в случае линейной системы уравнений ($A_1 \equiv 0$) можно показать [7], что $\|r^n\| \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$, т. е. итерационный

процесс (10), (11) сходится при любом начальном приближении.

Приведенный алгоритм означает, что элементы матрицы α_{n+1} выбираются последовательно, исходя из условия минимума соответствующей невязки. В ряде случаев удается использовать не последовательную, а многопараметрическую оптимизацию [7]. Рассмотрим предельный случай многопараметрической оптимизации в случае линейных систем, когда она осуществляется по всем элемен-

там матрицы α_{n+1} одновременно. Выражение (12) тогда очевидно примет следующий вид:

$$u^{n+1} = u^{n+1/2} + \alpha_1^{(n+1)} z_1^n + \dots + \alpha_m^{(n+1)} z_m^n, \quad (15)$$

где параметры $\alpha_i^{(n+1)}$ выбираются из условия минимума нормы вектора невязки

$r^{n+1} = A(u^{n+1}, u^{n+1}) - f$. Для нахождения оптимальных параметров необходимо решить следующую систему линейных уравнений [7]:

$$\begin{pmatrix} (Az_1^n, Az_1^n) & (Az_1^n, Az_2^n) & \dots & (Az_1^n, Az_m^n) \\ (Az_2^n, Az_1^n) & (Az_2^n, Az_2^n) & \dots & (Az_2^n, Az_m^n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Az_m^n, Az_1^n) & (Az_m^n, Az_2^n) & \dots & (Az_m^n, Az_m^n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}^1 \\ \alpha_{n+1}^2 \\ \dots \\ \alpha_{n+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Az_1^n, r^n) \\ (Az_2^n, r^n) \\ \dots \\ (Az_m^n, r^n) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В общем случае система (16) может оказаться полностью заполненной. Однако систему векторов z_i^n можно выбрать таким образом, что при $i \neq j$ величины (Az_i^n, Az_j^n) обратятся в нуль. Такой подход оказывается особенно выгоден в случае необходимости решения большого числа систем линейных уравнений с одной и той же матрицей оператора (так, например, обстоит дело при использовании варианта аппроксимации (5.1) – (5.3), т. к. разностный оператор Лапласа не зависит от временного шага). Проведя однажды ортогонализацию системы векторов z_i^n , ее можно использовать в дальнейшем, причем схема (10), (11) будет сходиться за одну итерацию [7].

Если система (8) является нелинейной, то в случае плохой сходимости схемы (10), (11) для нее аналогично линейному случаю [8] можно построить процедуру ускорения сходимости, суть которой заключается в комбинации приближений схемы (10), (11) на n -м и $n+2$ -м итерационном шаге [7]:

$$x^{n+2} = (1 + \omega_n) u^{n+2} - \omega_n u^n,$$

где u^{n+2} , u^n – приближения схемы (8), (9), а ω_n выбирается из условия

$$\min \| \bar{r}^{-n+2} \| = A(x^{n+2}, x^{n+2}) - f \quad [7].$$

4. Для проверки эффективности предложенного метода решения системы (1)-(4) были проведены численные расчеты классической модельной задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости в квадратной каверне с неравномерно движущейся верхней крышкой и задачи об обтекании вязкой однородной несжимаемой жидкостью обратного уступа.

а) Течение в квадратной каверне:

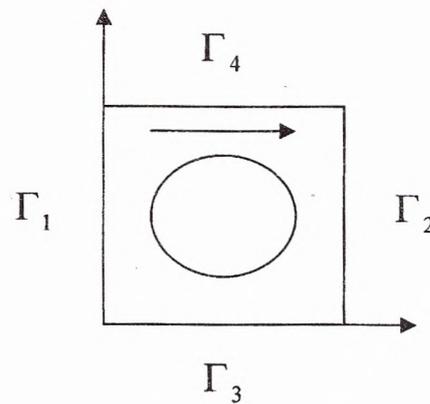


Рис. 1. Границы расчетной области в задаче о течении в квадратной каверне: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – твердые стенки, Γ_4 – движущаяся верхняя крышка, вовлекающая жидкость в движение силами вязкости.

Постановка начальных и краевых условий этой задачи для уравнения (1) имеет вид:

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad x, y \in G, \quad \psi|_{\partial G} = 0, \quad t \in [0; T],$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{\partial G} = 0, \quad t \in [0; T], \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0,$$

$$t \in [0; T], \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{\Gamma_4} = u(t), \quad t \in [0; T].$$

Здесь $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $u(t)$ – скорость движения верхней крышки каверны.

Расчеты проводились для каверны со стороны, равной 1, на равномерной сетке по времени с шагом τ и равномерной сетке по пространственным переменным с шагом h . На каждом шаге по времени решалась система билинейных уравнений итерационным методом (10), (11). Условием оста-

новки расчета на каждом временном шаге было

$$\|r^n\| < \varepsilon.$$

Приведем некоторые результаты расчета при различных параметрах системы уравнений и разностной схемы:

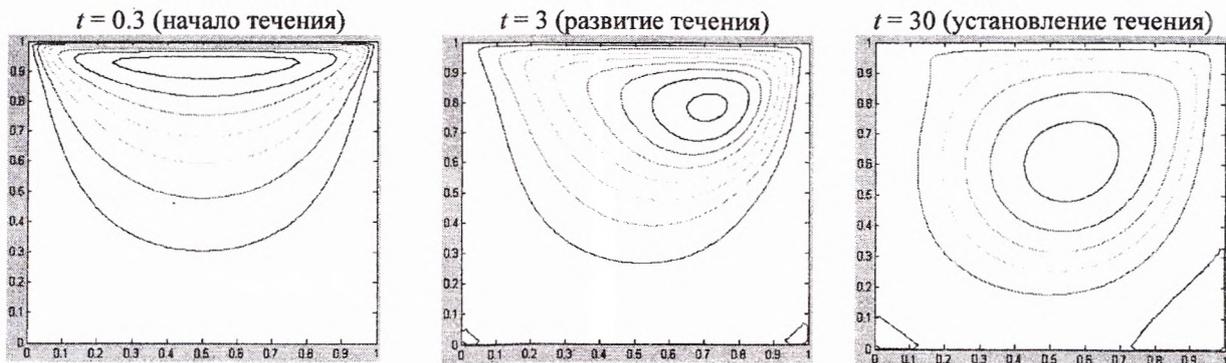


Рис. 3. $\nu = 0.0025$; $u(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$; $T = 30$; $\tau = 0.01$; $h = 0.015$; $\varepsilon = 0.001$;

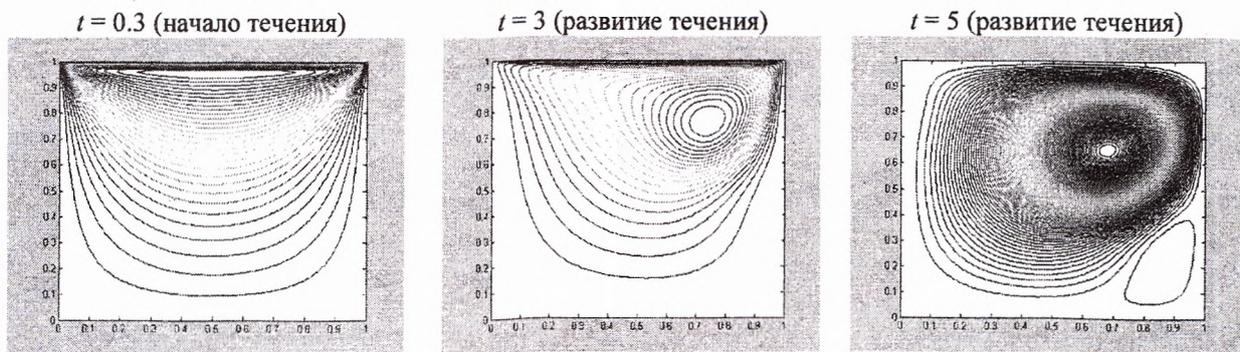


Рис. 4. $\nu = 0.0025$; $u(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+t^5}, & t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}$; $T = 30$; $\tau = 0.01$; $h = 0.015$; $\varepsilon = 0.001$;

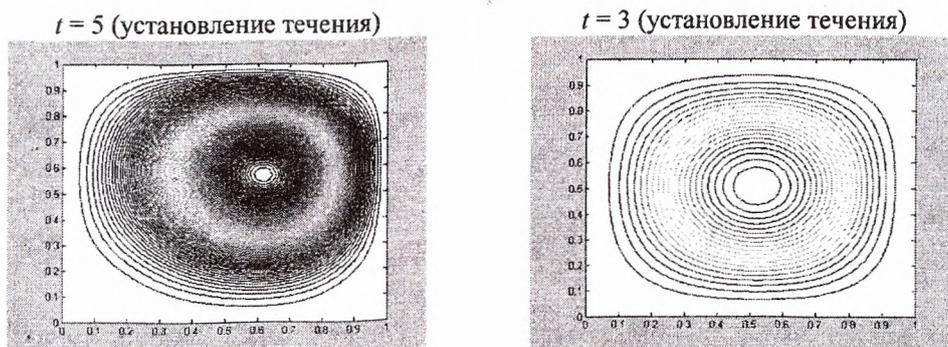


Рис. 4. (продолжение).

б) Обтекание обратного уступа:

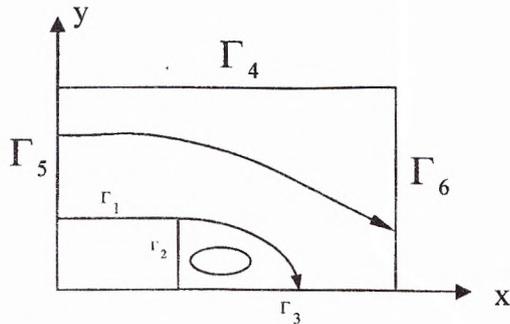


Рис. 5. Граница расчетной области в задаче об обтекании обратного уступа: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – твердые стенки, Γ_4 – верхняя граница, Γ_5 – входная граница, Γ_6 – выходная граница.

Постановка начальных и краевых условий этой задачи для уравнения (1) имеет вид:

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_5} = \Psi_1(t, y),$$

$$\psi|_{\Gamma_4} = \Psi_1(t, H), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}|_{\Gamma_5} = U(t, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{\partial G} = 0, \quad t \in [0; T].$$

Здесь $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $\Psi_1(t, y)$

и $U(t, y)$ – профили функции тока и горизонтальной компоненты вектора скорости соответственно, задающие течение Пуазейля, H – высота каверны. Расчеты проводились для каверны с длиной и высотой, равными 5 и 1 соответственно, длиной и высотой уступа, равными 0.5, на равномерной сетке по времени с шагом τ и равномерной сетке по пространственным переменным с шагом h . На каждом шаге по времени решалась система билинейных уравнений итерационным методом (10), (11). Условием остановки расчета на каждом временном шаге было $\|r^n\| < \varepsilon$.

Приведем результаты расчета при следующих параметрах уравнения и разностной схемы:

а) $\nu = 0.0025$, $T = 30$, $\tau = 0.01$, $h = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$,

$$U(t, y) = 1 - \frac{1}{1+t^5};$$

начало течения

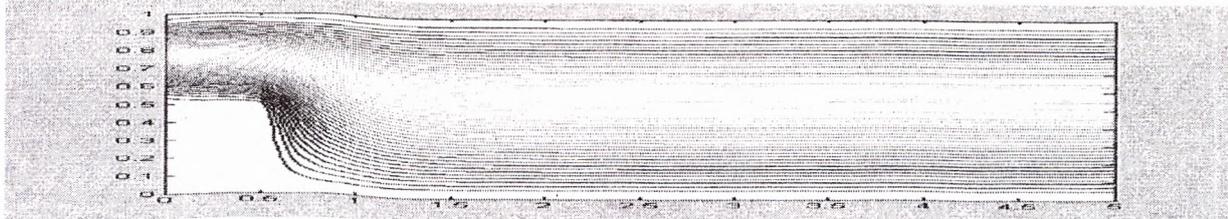


Рис. 6

развитие течения

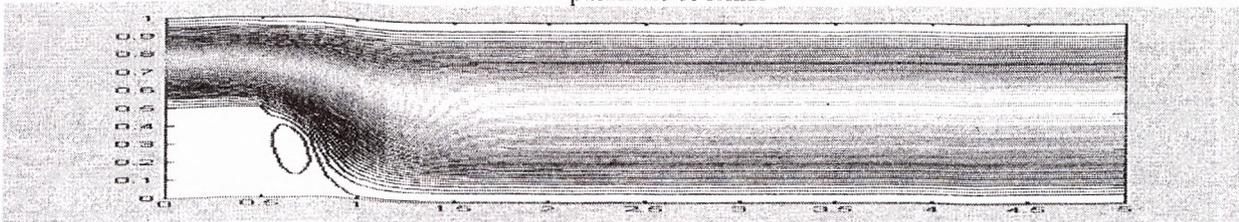


Рис. 6 (продолжение)

установление течения

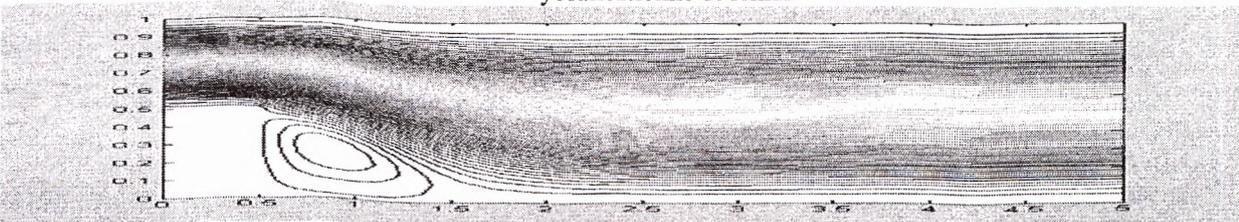


Рис. 6 (продолжение)

б) $\nu = 0.0025$, $T = 30$, $\tau = 0.01$, $h = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$, $U(t, y) = (2/3)t$;

начало течения

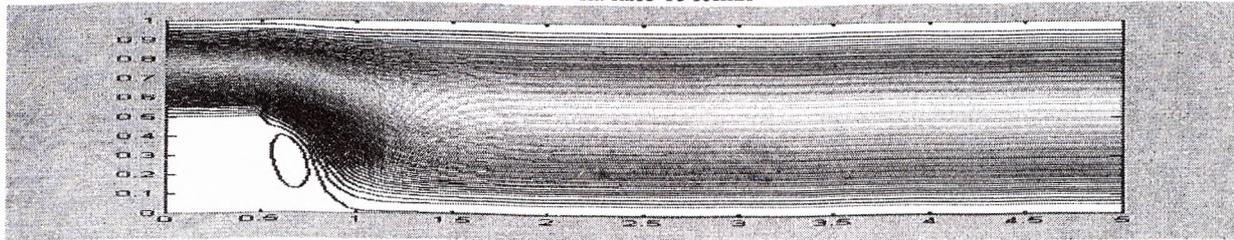


Рис. 7

развитие течения

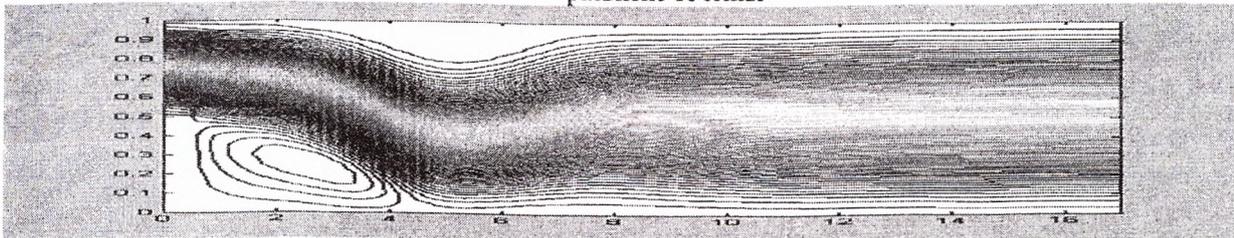


Рис. 7 (продолжение)

развитие течения

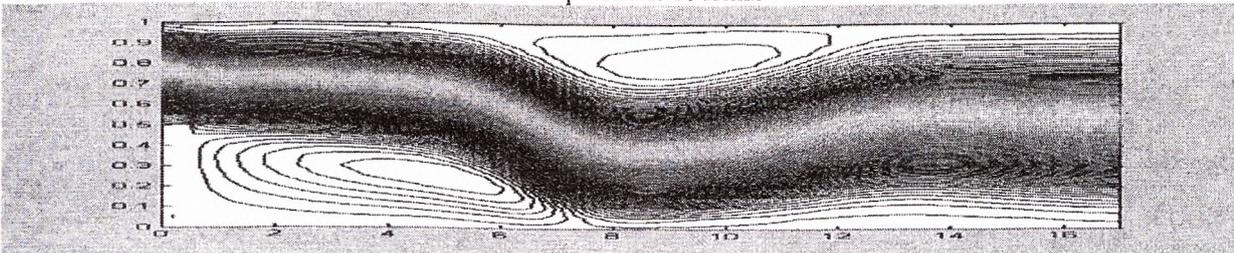


Рис. 7 (продолжение)

развитие течения

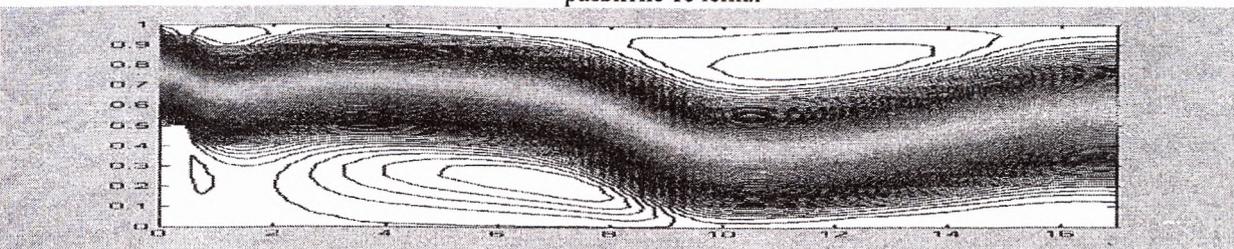


Рис. 7 (продолжение).

Литература

1. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст]: учеб. для вузов / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
2. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика [Текст]: монография / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
3. Beam, R. M Newton's methods for the Navier-Stokes equations [Текст] / R. M. Beam, H. E. Bailey // Comput. Mech. '88: Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci., Atlanta, Ga, Apr. 10-14. – Berlin, 1988. – Vol. 2. – Pp. 51.П.1-51.П.4.
4. Ладыженская, А. О. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости [Текст]: монография / А. О. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 340 с.
5. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений [Текст]: учеб. для вузов / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
6. Захаров, Ю. Н. Метод минимальных невязок решения одного класса нелинейных уравнений [Текст] / Ю. Н. Захаров, Е. Егорова, М. А. Толстых, Ю. И. Шокин // Препринт. – 1991. – № 9. – С. 32.
7. Захаров, Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики [Текст]: монография / Ю. Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2004. – 238 с.
8. Николаев, Е. С. Нелинейное ускорение двухслойных итерационных методов вариационного типа [Текст] / Е. С. Николаев // ЖВМ и МФ. 1976. – № 6. – С. 1387.