

ЭКОНОМИКА

УДК 519.2

К. А. Горбенко

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С КУМУЛЯТИВНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА И НЕЗАВИСИМЫМ ВРЕМЕНЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ КЛИЕНТА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Предлагаемая модель строится на основе трех случайных процессов:

$N(t)$ – число клиентов, пришедших в компанию на интервале $[t_0, t]$, где t_0 – момент возникновения компании и $N(t_0) = 0$;

$k(t)$ – число обслуживаемых клиентов в момент времени t , $k(t_0) = 0$;

$S(t)$ – величина капитала компании в момент времени t , $S(t_0) = S_0$.

Опишем события, которые могут произойти на интервале $[t, t + \Delta t]$, где Δt достаточно мало:

1. Пришел страхователь. Предполагается, что поток страхователей обладает следующими свойствами

$$P\{\Delta N(t) = 1 | N(t) = N\} = (\lambda + \beta N)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{\Delta N(t) = 0 | N(t) = N\} = 1 - (\lambda + \beta N)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{\Delta N(t) > 1 | N(t) = N\} = o(\Delta t),$$

где $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$, $\lambda > 0$, $\beta > 0$.

С каждым приходом клиента связывается страховой взнос, величина которого моделируется независимой случайной величиной ξ со средними характеристиками

$$M\xi = a_1, M\xi^2 = a_2.$$

2. Пришел повторный страховой взнос. Обозначим через $\Delta M(t)$ число повторных взносов на интервале $[t, t + \Delta t]$, тогда предполагается

$$P\{\Delta M(t) = 1 | k(t) = k\} = \lambda_c k \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^2 P\{\Delta M(t) = m | k(t) = k\} = o(\Delta t).$$

Размер повторного взноса – независимая случайная величина ζ с характеристиками

$$M\zeta = c_1, M\zeta^2 = c_2.$$

Замечание относительно страховых взносов:

- поступают независимо друг от друга;
- поступают независимо от поступления страхователей.

3. Страхователь обслуживается. Время обслуживания клиента моделируется независимой случайной величиной с произвольной, непрерывной функцией распределения $B(x)$.

4. Наступил страховой случай. Введем $\Delta L(t)$ – число наступивших страховых случаев на $[t, t + \Delta t]$, тогда

$$P\{\Delta L(t) = 1 | k(t) = k\} = \mu_\eta k \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} l^2 P\{\Delta L(t) = l | k(t) = k\} = o(\Delta t).$$

При этом размер страховой выплаты представляется как независимая случайная величина η со средними характеристиками

$$M\eta = b_1, M\eta^2 = b_2.$$

Замечание относительно страховых случаев:

- наступают независимо друг от друга;
- наступают независимо от поступления страхователей.

Вышесказанное схематично можно представить следующим образом:

Схема движения денежных средств

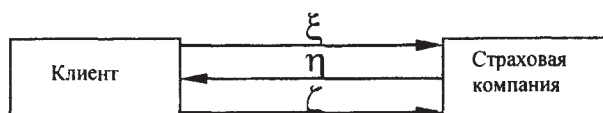
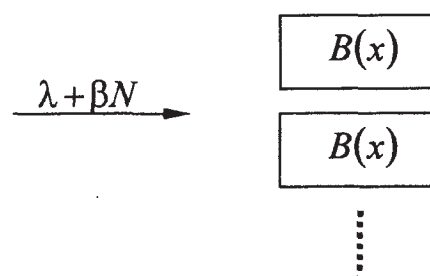


Схема функционирования страховой компании без учета движения денежных средств



При помощи Δt -метода и метода производящей функции получено одномерное распределение вероятностей значений процесса $N(t)$

$$\begin{cases} P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda(t-t_0)}, \\ P\{N(t) = n\} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\beta} + i \right)}{n!} (1 - e^{-\beta(t-t_0)})^n e^{-\lambda(t-t_0)}, \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

При использовании метода просеянного потока, для процессов $k(t)$ и $S(t)$ были получены

$$\bar{S}(t) = S_0 + \lambda \left(c_1 \lambda_{\zeta} - b_1 \mu_{\eta} \right) \int_{t_0}^t e^{\beta(x-t_0)} dx \int_x^t P(\tau - x) d\tau + a_1 \frac{\lambda}{\beta} (e^{\beta(t-t_0)} - 1),$$

где $P(x) = 1 - B(x)$.

математические ожидания, дисперсии и ковариации. Для наглядности приведем вид математических ожиданий

$$\bar{k}(t) = \lambda \int_{t_0}^t P(t - \tau) e^{\beta(\tau-t_0)} d\tau,$$

Литература

1. Балабанов, И. Т. Страхование: организация, структура, практика / И. Т. Балабанов, А. И. Балабанов. – СПб.: Питер, 2003. – 250 с.
2. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М.: Наука, 1988. – 447 с.
3. Змеев, О. А. Исследование математических моделей процессов страхования при нестационарных потоках страховых рисков: дис. ... д-ра физ.-мат. наук О. А. Змеев. – Томск, 2005.
4. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд. Том. ун-та, 2004. – 226 с.
5. Куликова, О. А. Метод просеянного потока для нахождения одномерного распределения вероятностей значений процесса изменения числа заявок в системе $M|G|\infty$ / О. А. Куликова, С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Обработка данных и управление в сложных системах. – Томск: Изд. Том. ун-та, 2005. – Вып. 7. – С. 134–137.