

УДК 519.876.5

М. А. Новосельцева, Л. В. Карташова

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Проблема исследования стохастических объектов и систем возникла достаточно давно, когда стало ясно, что детерминированные математические модели не могут в полной мере описать реальные объекты и системы. Модели реальных объектов и систем должны учитывать стохастичность. Причиной возникновения случайных процессов в системах управления может быть либо подача на вход детерминированной системы случайного сигнала или воздействие аддитивных помех, либо случайные изменения параметров этой системы. Корректность методов анализа случайных процессов, а также интерпретация результатов анализа в значительной степени влияют на правильность получения математической модели объекта управления. Суждение о стационарности, однородности и спектральной структуре реальных процессов по результатам их измерений является важной проблемой теории математической обработки наблюдений и позволяет получить адекватную модель объекта управления или выявить причины нарушения его функционирования.

Для характеристики случайных процессов используется показатель, предложенный А. Н. Колмогоровым [1]

$$C_x(t, t + \tau) = M\{x(t) - x(t + \tau)\}^2 \quad (1)$$

и названный впоследствии А. М. Обуховым структурной функцией ($x(t)$ – некоторый случайный процесс). Очевидно, что функция всегда неотрицательна, четна и удовлетворяет условию

$$C_x(0) = 0. \quad (2)$$

В отличие от корреляционной функции $R_{xx}(t)$, всегда являющейся ограниченной (в силу $R_{xx}(t) \leq R_{xx}(0)$), структурная функция может неограниченно возрастать при $t \rightarrow \infty$. Для стационарного случайного процесса с нулевым средним структурная функция имеет вид

$$\begin{aligned} C_x(t, t + \tau) &= M\{x(t) - x(t + \tau)\}^2 = \\ &= M(x^2(t)) - 2M(x(t)x(t + \tau)) + \\ &+ M(x^2(t + \tau)) = 2R_{xx}(0) - 2R_{xx}(\tau) = C_x(\tau), \end{aligned} \quad (3)$$

и не зависит от текущего момента времени. На основании (3) можно утверждать, что структурная функция стационарного случайного процесса с течением времени стремится к установившемуся значению:

$$C_x(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 2R_{xx}(0). \quad (4)$$

Практическое построение структурной функции более надежно по сравнению с корреляционной, поскольку на нее не влияют ошибки определения среднего значения процесса $x(t)$. Оно осуществляется по формуле:

$$C_x(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x(i) - x(i+k))^2, \quad (5)$$

где N – число измерений процесса $x(t)$.

Раздел теории случайных процессов, связанный с изучением случайных процессов на базе исследования структурных функций, носит название структурного анализа [1].

Важным свойством структурной функции, используемым для анализа стационарности случайного процесса, является следующее [2]:

- 1) структурная функция стационарного процесса ограничена и с течением времени выходит на установившееся значение;
- 2) структурная функция нестационарного процесса с течением времени неограниченно возрастает.

Для обеспечения эффективной алгоритмической и программной реализации данного метода анализа стационарности и исключения визуального анализа кривых структурной функции возможно получение модели структурной функции сигнала в форме непрерывной дроби [2]. Свойство стационарности случайного процесса отождествляется с устойчивостью полученной модели структурной функции в форме непрерывной дроби.

Для этого на основании значений структурной функции сигнала, полученных по формуле (5), расчетным путем определяется идентифицирующая матрица:

$$\begin{pmatrix} (-1) - \text{строка} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ (0) - \text{строка} & C_x(0) & C_x(\Delta t) & C_x(2\Delta t) & \dots & C_x(n\Delta t) & \dots \\ 1 - \text{строка} & \alpha_1(0) & \alpha_1(\Delta t) & \alpha_1(2\Delta t) & \dots & \alpha_1(n\Delta t) & \dots \\ \dots & \alpha_2(0) & \alpha_2(\Delta t) & \alpha_2(2\Delta t) & \dots & \alpha_2(n\Delta t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m - \text{строка} & \alpha_m(0) & \alpha_m(\Delta t) & \alpha_m(2\Delta t) & \dots & \alpha_m(n\Delta t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (6)$$

в которой (-1) -строка содержит значения единичной функции $1(t)$, а (0) -строка – значения структурной функции входного сигнала $C_x(k\Delta t)$ в моменты времени $\{n\Delta t\}_0^N$, Δt – шаг дискретизации, а элементы $\alpha_m(n\Delta t)$ последовательно определяются с помощью соотношения:

$$\alpha_m(n) = \frac{\alpha_{m-2}(n+1)}{\alpha_{m-2}(0)} - \frac{\alpha_{m-1}(n+1)}{\alpha_{m-1}(0)}, \quad (7)$$

где $\alpha_{-1}(n) = 1(n\Delta t)$, $\alpha_0(n) = C_x(n\Delta t)$, $m=1,2,3,\dots$, $n=0,1,2,\dots$

Элементы первого столбца матрицы (6) позволяют получить модель структурной функции сигнала в форме дискретной передаточной функции (ДПФ) объекта-преобразователя:

$$G(z) = \frac{\alpha_0(0)z^{-1}}{1 + \frac{\alpha_1(0)z^{-1}}{1 + \frac{\alpha_2(0)z^{-1}}{1 + \frac{\alpha_3(0)z^{-1}}{1 + \dots}}}} \quad (8)$$

При аппроксимации дробно-рациональной функции конечного порядка в матрице (6) наблюдается появление нулевой строки, номер которой позволяет идентифицировать порядок функции. Если в некоторой i -й строке ($i=0,1,2,\dots$) матрицы (6) конечное число k_i первых элементов равны нулю, а последующие элементы отличны от нуля, то необходимо осуществить сдвиг влево на k_i элементов до появления в нулевом столбце ненулевого элемента и далее продолжить определение других элементов матрицы (6) по правилу (7). Для i -й строки при восстановлении правильной C -дроби (8) элемент $\alpha_i(0)$ умножается на z^{-k_i} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 6.46566 & 8.59372 & 9.58143 & 9.62135 & 9.70000 & 9.70000 & \dots \\ -0.32913 & -0.48190 & -0.048807 & -0.50023 & -0.50023 & - & \\ 0.13500 & -0.00102 & -0.03178 & -0.01962 & - & - & \end{pmatrix},$$

в которой 2-ю строку можно считать нулевой. На основании элементов первого столбца матрицы аппроксимируем непрерывной дробью (8) модель структурной функции входного сигнала в форме ДПФ объекта-преобразователя

$$G_{C_x}(z) = \frac{6.46566 z^{-1}}{1 - 0.32913 z^{-1}}.$$

Далее производится проверка устойчивости полученного объекта-преобразователя по математической модели ДПФ (8) с помощью любого из известных критериев устойчивости. В случае устойчивости объекта-преобразователя следует утверждать, что данный сигнал стационарен. В противном случае сигнал является нестационарным.

Пример 1

Объект имеет непрерывную передаточную функцию (НПФ)

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

На вход объекта подается случайный сигнал, дискретная модель которого имеет вид:

$$x(k) = 2a(k) + 0.36788 x(k-1), \quad k = \overline{1, 90},$$

где $a(k)$ – белый шум с математическим ожиданием $M_a = 0$ и дисперсией $D_a = 1$. На выходе имеется случайный сигнал

$$y(k) = 0.63212 x(k-1) + y(k-1), \quad k = \overline{1, 90}.$$

На основании дискретных моделей моделировались реализации $x(k\Delta t)$ и $y(k\Delta t)$ с шагом дискретизации $\Delta t=1$. По полученным реализациям вычисляются значения структурных функций $C_x(k\Delta t)$ и $C_y(k\Delta t)$ соответственно.

Применим модифицированный алгоритм В. Висковатова для аппроксимации непрерывной дробью модели структурной функции входного сигнала. Для этого определим матрицу (6) с учетом того, что в нулевой строке необходимо сделать сдвиг влево на один элемент, обусловленный начальным значением $C_x(0) = 0$,

ДПФ объекта-преобразователя имеет один полюс $z^p = 0.32913$, на основании значения которого можно сделать вывод об устойчивости объекта-преобразователя и, следовательно, о стационарности входного сигнала.

Аналогичным образом определим матрицу вида (6) для выходного сигнала

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 2.50000 & 5.13043 & 8.79223 & 12.49554 & 16.30433 & 20.15440 & \dots \\ -1.05217 & -2.51689 & -3.99822 & -5.52173 & -7.06176 & - & \\ -0.33992 & -0.28307 & -0.24972 & -0.18987 & - & - & \end{pmatrix},$$

в которой 2-ю строку можно считать близкой к нулевой (при расчете элементов следующей строки их значения резко возрастают). Тогда модель структурной функции выходного сигнала в форме ДПФ объекта-преобразователя имеет вид:

$$G_{Cy}(z) = \frac{2.50000 z^{-1}}{1 - 1.05217 z^{-1}}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 2.52426 & 3.46965 & 3.87024 & 3.88968 & 3.90000 & \dots \\ -0.37453 & -0.53322 & -0.54093 & -0.54501 & - & \\ -0.0492 & 0.08894 & 0.08572 & - & - & \end{pmatrix}.$$

ДПФ объекта-преобразователя имеет вид:

$$G_{Cy}(z) = \frac{2.52426 z^{-1}}{1 - 0.37453 z^{-1}},$$

$z^n = 0.37453$, следовательно, сигнал стационарен.

Под структурной однородностью случайного процесса понимается постоянство его корреляционной функции на всем временном промежутке $t = \overline{1, N}$, где N – число измерений. Объединение двух стационарных реализаций с разными корреляционными функциями приводит к стационарной реализации с отличной от исходной корреляционной функцией [3]. В конечном счете невыявление структурной неоднородности данных может привести к ошибочной модели процесса или объекта.

Для иллюстрации актуальности данной задачи приведем два простых стохастических процесса

$y^1(t)$ и $y^2(t)$ (рис. 1), взятых из [4]:

$$y^1(t) = 10 + x(t) + x(t-1), \quad t = \overline{1, 50} \quad (9)$$

$$y^2(t) = 10 + x(t) - x(t-1), \quad t = \overline{51, 100}, \quad (10)$$

где $x(t)$ – белый шум с нулевым средним и единичной дисперсией. Математические ожидания и дисперсии процессов $y^1(t)$ и $y^2(t)$ одинаковы:

$$M(y^1(t)) = M(y^2(t)) = 10,$$

$$D(y^1(t)) = D(y^2(t)) = 2.$$

Так как полюс ДПФ объекта-преобразователя лежит вне единичной окружности, можно сделать вывод о неустойчивости объекта. Следовательно, выходной сигнал нестационарен. Применим процедуру стационаризации

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k), \quad k = \overline{1, N-1},$$

после чего вновь вычислим структурную функцию выходного сигнала. Матрица (6) будет иметь вид:

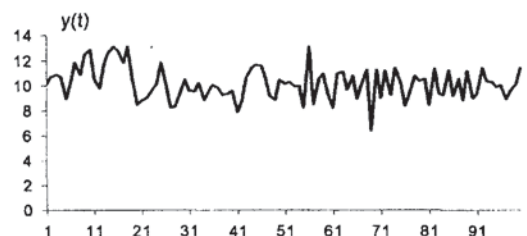


Рис. 1. Реализация случайного процесса (9) при $t = \overline{1, 50}$ и (10) при $t = \overline{51, 100}$

Корреляционные функции процессов (9) и (10) соответственно равны:

$$R_{y^1}(\tau) = \begin{cases} 2, & \tau = 0 \\ 1, & \tau = 1 \\ 0, & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$$R_{y^2}(\tau) = \begin{cases} 2, & \tau = 0 \\ -1, & \tau = 1 \\ 0, & \tau \geq 2. \end{cases}$$

Определим корреляционную функцию стационарного случайного процесса на интервале $t = \overline{1, 100}$ (рис. 2) по формуле:

$$R_y(\tau) = M(y(t) - m_y)(y(t+\tau) - m_y),$$

где m_y – среднее значение процесса. Это доказывает, что объединение двух стационарных реализаций с разными корреляционными функциями приводит к стационарной реализации с отличной от исходной корреляционной функцией. В конечном счете невыявление структурной неоднородности

данных может привести к ошибочной модели процесса или объекта.

В литературе проведено недостаточно исследований в направлении выявления структурной неоднородности данных измерений. Например, в [5] предполагается, что «последовательности, из которых «склеена» выборка отличаются математическими ожиданиями». Если же последовательности отличаются только корреляционными функциями, авторы предлагают сформировать по исходной выборке новую выборку $\{X_t X_{t+k}\}$, для которой имеет место изменение среднего при некотором k . Однако каким образом производится определение k , в [5] не поясняется.

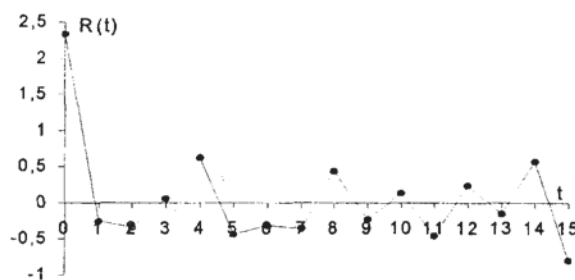


Рис. 2. Корреляционная функция объединенного процесса $t = 1, 100$

Для проверки структурной однородности данных измерений возможно использование моделей структурных функций в форме непрерывной дроби [3], полученных на различных отрезках ре-

ализации. Из формулы (3) следует, что изменение корреляционной функции стационарного случайного процесса влечет за собой изменение его структурной функции. Поэтому предлагается использовать принцип дихотомии, который предполагает разбиение стационарной последовательности измерений на два подынтервала n^1 и n^2 с целью получения на каждом из них модели структурной функции. В случае совпадения моделей на подынтервалах n^1 и n^2 по структуре и параметрам с некоторой заданной вероятностью можно утверждать, что однородность случайного процесса не нарушается. В противном случае, следует продолжить применение принципа дихотомии до совпадения моделей на подынтервалах.

Пример 2

Для подтверждения работоспособности данного метода вернемся к реализации, представленной на рис. 1, и определим структурные функции на интервалах $n^1 = [1, 50]$ и $n^2 = [51, 100]$.

1-й интервал

На основании значений структурной функции построим идентифицирующую матрицу (6) с учетом $C_x(0) = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 2.7000 & 4.68900 & 4.77110 & 4.85121 & 4.55261 & 5.01020 & \dots \\ -0.73667 & -0.76667 & -0.79630 & -0.68519 & -0.85185 & - & \\ 0.69594 & 0.68572 & 0.86618 & 0.52882 & - & - & \\ 0.05541 & -0.16367 & 0.17025 & - & - & - & \end{pmatrix},$$

в которой 3-ю строку можно считать нулевой. На основании элементов первого столбца матрицы аппроксимируем непрерывной дробью модель структурной функции сигнала в форме ДПФ объекта-преобразователя

$$G_{Cy}(z) = \frac{2.70000z^{-1}(1 + 0.69594z^{-1})}{1 - 0.04073z^{-1}}. \quad (11)$$

2-й интервал

Идентифицирующая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 7.85000 & 4.68900 & 4.5100 & 4.63321 & 4.55240 & 4.63632 & \dots \\ 0.40267 & 0.42548 & 0.41019 & 0.42038 & -0.48038 & - & \\ -0.45930 & -0.44414 & -0.45416 & -0.54344 & - & - & \\ 0.08963 & 0.02985 & -0.13922 & - & - & - & \end{pmatrix}.$$

На основании элементов первого столбца матрицы запишем модель структурной функции сигнала в форме ДПФ объекта-преобразователя

$$G_{Cy}(z) = \frac{7.85000z^{-1}(1 - 0.45930z^{-1})}{1 - 0.05662z^{-1}}. \quad (12)$$

Модели (11) и (12) совпадают по структуре, однако отличаются параметрами. Следовательно, можно сделать вывод о том, что данные разнородны по структуре. На основании принципа дихотомии продолжим разбиение интервалов.

Интервал $n^1 = [1, 25]$

Идентифицирующая матрица (6) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.68790 & 4.71200 & 4.81200 & 4.84459 & 4.55987 & 5.02369 \\ -0.75304 & -0.79025 & -0.80237 & -0.69644 & -0.86900 & - \\ 0.70364 & 0.72474 & 0.87753 & 0.54245 & - & - \\ 0.01941 & -0.18163 & 0.15391 & - & - & - \end{pmatrix}.$$

Тогда модель ДПФ объекта-преобразователя

$$G_{Cy}(z) = \frac{2.768790z^{-1}(1 + 0.70364z^{-1})}{1 - 0.0494z^{-1}}. \quad (13)$$

Интервал $n^2 = [26, 50]$

Идентифицирующая матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.82370 & 4.82560 & 4.98561 & 5 & 4.89710 & 5.12369 \\ -0.70897 & -0.76563 & -0.77073 & -0.73429 & -0.77912 & - \\ 0.62904 & 0.67851 & 0.73501 & 0.63534 & - & - \\ 0.00127 & -0.08136 & 0.02570 & - & - & - \end{pmatrix}$$

позволяет получить ДПФ объекта-преобразователя

$$G_{Cy}(z) = \frac{2.82370z^{-1}(1 + 0.62904z^{-1})}{1 - 0.07993z^{-1}}. \quad (14)$$

Модели (13) и (14) совпадают по структуре и с точностью до погрешности вычислений по параметрам. Следовательно, процесс однороден на интервале $n = [1, 50]$.

Интервал $n^3 = [51, 75]$

Идентифицирующая матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7.92530 & 4.71258 & 4.49856 & 4.65236 & 4.55123 \\ 0.40537 & 0.43238 & 0.41297 & 0.42573 & - \\ -0.47199 & -0.45112 & -0.46320 & - & - \\ 0.11083 & 0.03738 & - & - & - \end{pmatrix}$$

позволяет получить ДПФ объекта-преобразователя

$$G_{Cy}(z) = \frac{7.92530z^{-1}(1 - 0.47199z^{-1})}{1 - 0.06662z^{-1}}. \quad (15)$$

Интервал $n^4 = [75, 100]$

Идентифицирующая матрица (6) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7.80012 & 4.68999 & 4.47569 & 4.55512 & 4.32589 \\ 0.39873 & 0.42620 & 0.41602 & 0.44541 & - \\ -0.46763 & -0.46957 & -0.53309 & - & - \\ 0.06477 & -0.09661 & - & - & - \end{pmatrix}$$

Модель структурной функции запишем в виде:

$$G_{C_y}(z) = \frac{7.80012z^{-1}(1 - 0.46763z^{-1})}{1 - 0.0689z^{-1}}. \quad (16)$$

Модели (15) и (16) совпадают, следовательно, процесс однороден.

При выявлении скрытых периодичностей реальных процессов возможно использование m -го дискретного структурного преобразования (где $m \neq 1$), представляемого в виде:

$$C_x^m(k) = \frac{1}{N_m - k} \sum_{i=1}^{N_m-k} (C_x^{m-1}(i) - C_x^{m-1}(i+k))^2, \quad (17)$$

$$N_m < N_{m-1}$$

где N_m – число значений m -го структурного преобразования, N_{m-1} – число значений $(m-1)$ -го структурного преобразования. 1-е структурное преобразование имеет вид структурной функции (5), где в качестве исходных данных выступает сам процесс $x(t)$. 2-е структурное преобразование записывается в виде:

$$C_x^2(k) = \frac{1}{N_2 - k} \sum_{i=1}^{N_2-k} (C_x^1(i) - C_x^1(i+k))^2, \quad (18)$$

$$N_2 < N,$$

в качестве исходных данных используются полученные значения структурной функции (5) (N_2 – число значений 2-го структурного преобразования).

Структурное преобразование обладает высокой селективностью по отношению к гармонике с наибольшей амплитудой. Поясним это на следующем примере. Пусть задан полигармонический процесс

$$x(t) = \sum_{j=1}^v A_j \sin \omega_j t, \quad (19)$$

где A_j – амплитуда j -й гармоники, ω_j – круговая частота j -й гармоники. Пусть в $x(t)$ гармонические компоненты занумерованы в порядке убывания амплитуд $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \dots$. Введем обозначение для отношения всех амплитуд к наибольшей

$$\alpha_j = \frac{A_j}{A_1} \leq 1.$$

Проведя последовательно ℓ структурных преобразований вида:

$$x^\ell(\tau) = \frac{1}{a} \int_0^a (x^\ell(t) - x^\ell(t+\tau))^2 dt, \quad (20)$$

получим:

$$x^\ell(\tau) = (A_1)^\ell \left(1 - \cos \omega_1 \tau + \sum_{j=2}^v (\alpha_j)^{2^\ell} (1 - \cos \omega_j \tau) \right). \quad (21)$$

В преобразованном процессе (21) роль всех гармоник с амплитудами меньше A_1 сильно уменьшается. Для выявления остальных гармонических составляющих необходимо вычесть из исходного сигнала гармоническую составляющую с максимальной амплитудой, после чего следует повторить процедуру нахождения структурных преобразований.

Наличие в анализируемом процессе $x(t)$ случайной компоненты

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t)$ – периодическая составляющая, $n(t)$ – шум, сводится к появлению некоторой дополнительной неслучайной составляющей в структурной функции $x(t)$

$$C_x(\tau) = C_s(\tau) + C_n(\tau),$$

совпадающей со структурной функцией помехи. Однако практические расчеты и машинный эксперимент показали, что при проведении трех последовательных структурных преобразований роль шумовой составляющей значительно ослабевает ввиду высокого селективирующего действия данного типа преобразований.

Структурный анализ случайных процессов в ряде случаев приводит к более устойчивым характеристикам по сравнению с корреляционными. Эффективность структурного анализа по сравнению с корреляционным заключается в том, что параметры структурной функции обладают свойствами инвариантности относительно некоторых форм нестационарности, проявляющихся, например, при смещенности по математическому ожиданию, а также в случае квазистационарного характера случайного процесса. Кроме того, характерной особенностью предлагаемых методов является возможность эффективной алгоритмической и программной реализации, что подчеркивает их компьютерную ориентацию.

Литература

1. Романенко, А. Ф. Вопросы прикладного анализа случайных процессов / А. Ф. Романенко, В. А. Сергеев. – М.: Советское радио, 1968. – 247 с.
2. Карташов, В. Я. Способ идентификации линейного объекта / В. Я. Карташов, М. А. Новосельцева // Патент РФ № 2189622.
3. Новосельцева, М. А. Идентификация моделей совместных случайных процессов горного производства: дис. ... канд. мат. наук. – Кемерово, 2001. – 141 с.
4. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1. – 406 с.
5. Бродский, Б. Е. Непараметрический метод обнаружения моментов переключения двух случайных последовательностей / Б. Е. Бродский, Б. С. Дарховский // Автоматика и телемеханика, 1989. – № 10. – С. 66–75.