Следствие: *Если* ($SU(2)\times SU(2)$, g_J, J)– *приблизительно кэлерово для* $J\in A_\omega^+$, *то:*

$J<e_1, e_4>\subset <e_1, e_4>$; $J<e_2, e_3, e_5, e_6>\subset <e_2, e_3, e_5, e_6>$

Литература

1. Calabi, E. A class of compact complex manifolds which are not algebraic / B. A. Eckmann // Ann. Math. – 1935. – Vol. 58. – P. 494–500.
2. Даурцева, Н. А. Инвариантные комплексные структуры на $S^3\times S^3$ // Электронный журнал «Исследовано в России», 81, С. 882–887, 2004, http://zhurnal/ape.relarn.ru/articles/2004/081.pdf.
3. Даурцева, Н. А. Функционал нормы тензора Нейенхейса на множестве левоинвариантных почти комплексных структур на $SU(2)\times SU(2)$, ортогональных относительно метрики Киллинга-Картана // Вестник КемГУ. – 2004. – Т. 17. – С. 156–158.
4. Gray A. The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants / L. M. Hervella // Ann. Math. Pura Appl. – 1980. – Vol. 123. – P. 35–58.
5. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2.

УДК 514.76

Е. С. Корнев

ПРИВОДИМЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ОДНОСВЯЗНЫХ ГРУППАХ ЛИ РАЗМЕРНОСТИ 4

В данной работе изучается вопрос о существовании комплексных структур специального вида на связных односвязных группах Ли размерности 4. Этот класс состоит из так называемых приводимых почти комплексных структур, действующих инвариантно на выбранной паре распределений. Такие структуры естественно возникают при рассмотрении некоторых расслоений. В частности, в работе [2] они вводятся на расслоении Хопфа. В параграфе 1 дается классификация связных односвязных четырехмерных групп Ли на основе результатов, приведенных в [3]. В параграфах 3 и 4 дается ответ на вопрос: какие из групп Ли, приведенных в следствии 1.2, допускают или не допускают приводимые комплексные структуры и при каких условиях. Основным результатом статьи является полная классификация приводимых почти комплексных структур на таких группах Ли.

1. Классификация односвязных групп Ли размерности 4

Пусть G – односвязная группа Ли, размерности 4, снабженная левоинвариантной римановой метрикой. Если считать, что G действует на себе левыми сдвигами, то G становится однородным римановым пространством. Тогда по теореме 4.1 из [3] G либо разрешима, либо изоморфна одной из групп: $\mathbf{R}\times SU(2)$, $\mathbf{R}\times SL(2)$.

Дифференцированием алгебры Ли $L(G)$ называется линейный оператор A: $L(G)\to L(G)$ такой, что для любых X,Y из $L(G)$, $A[X,Y]=[AX,Y]+[X,AY]$. Обозначим через $D(L(G))$ алгебру Ли всех дифференцирований $L(G)$, скобка Ли на которой вводится стандартным образом: $[A,B]=AB-BA$. Пусть $L(G)_1$ и $L(G)_2$ – произвольные алгебры Ли и ρ – гомоморфизм алгебр Ли $L(G)_1$ и $D(L(G)_2)$, тогда полупрямым произведением алгебр $L(G)_1$ и $L(G)_2$ называется алгебра Ли $L(G)_1\times_\rho L(G)_2$, модельное пространство которой равно $L(G)_1\oplus L(G)_2$ и скобка Ли между векторами $X\in L(G)_1$ и $Y\in L(G)_2$ задается по формуле $[X,Y]=\rho(X)Y$.

В [4] полупрямое произведение $L(G)_1$ и $L(G)_2$ называется расширением алгебры $L(G)_2$ алгеброй $L(G)_1$. Обозначим через H_3 трехмерную группу Гейзенберга, а через $L(H_3)$ ее алгебру Ли. Выберем в $L(H_3)$ базис f_1, f_2 и f_3 такой, что

$$[f_1,f_2]=f_3,\quad [f_1,f_3]=[f_2,f_3]=0. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. Любая разрешимая алгебра Ли размерности 4 изоморфна одной из следующих алгебр:

$$A^1\times_\rho L(H_3),\quad A^1\times_\rho A^3,\quad A^2\times_\rho A^2, \tag{1.2}$$

где A^k – абелева алгебра Ли размерности k.

Доказательство. Известно, что алгебра Ли $L(G)$ разрешима тогда и только тогда, когда ее первый производный идеал $L(G)'$ нильпотентен (см. [5]). Кроме того, известно, что единственная не абелева алгебра Ли размерности меньше 4 – это $L(H_3)$. Пусть $L(G)'=0$, тогда $L(G)=A^4=A^2\times_\rho A^2$ при $\rho=0$. Пусть $L(G)'=A^1$ и e_0 – базисный вектор в A^1. Обозначим через e_1', e_2', e_3' остальные базисные векторы из $L(G)$. Если $[e_0,e_i']=0$ при $i=1,2,3$, то $[e_1',e_2']=ke_0$, $[e_1',e_3']=e_0$,

$[e_2',e_3']=\mu e_0$, $k,l,m\in\mathbf{R}$. С точностью до выбора ориентации можно считать, что $k\neq 0$. Тогда полагая $e_1'=f_1$, $e_2'=f_2$, $e_0/k=f_3$, получаем базис, удовлетворяющий (1.1). Так как гомоморфизм ρ полностью определяется скобками базисных векторов, то, полагая $e_3'=f_0$, получаем, что $L(G)\approx A^1\times_\rho L(H_3)$, где ρ задается соотношениями $[f_0,f_1]=-klf_3$, $[f_0,f_2]=-kmf_3$, $[f_0,f_3]=0$. Если хотя бы для одного индекса i, $[e_0,e_i']\neq 0$ (с точностью до выбора ориентации можно считать, что $i = 1$), то полагая $v = ae_1' + be_2' + ce_3'$, находим, что уравнение $[e_0,v] = 0$ эквивалентно уравнению $(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c)e_0 = 0$, где λ_i – константа, возникающая при взятии скобки e_0 и e_i'. Это уравнение имеет два линейно независимых решения. Обозначим их через e_2 и e_3 и положим $e_1 = e_1'$. Тогда из тождества Якоби получаем:

$$[[e_1,e_2],e_3] + [[e_2,e_3],e_1] + [[e_3,e_1],e_2] = \lambda[e_0,e_3] + \mu [e_0,e_1] + \mu [e_0,e_2] = \mu [e_0,e_1] = 0.$$

Откуда $\mu = 0$ и, следовательно, $[e_2, e_3] = 0$.

Таким образом, линейная оболочка векторов e_0, e_2, e_3 равна A^3, линейная оболочка вектора e_1 равна A^1, и мы получаем изоморфизм $L(G) \approx A^1\times_\rho A^3$. Пусть $L(G)' = A^2$ и V – двумерное дополнение $L(G)'$ до $L(G)$. Возьмем комплексификацию алгебры $L(G)$, $L(G)^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\otimes L(G)$ и зафиксируем вещественный вектор f_1 из V. Тогда линейный оператор Ad_{f_1} имеет четыре собственных значения, одно из которых равно 0 (так как $Ad_{f_1}(f_1) = 0$). Поскольку $Ad_{f_1}(L(G')) = L(G')$, то $L(G)'$ является собственным подпространством, которому соответствуют два комплексно сопряженных собственных значения.

Таким образом, оставшееся четвертое собственное значение должно быть вещественным. Обозначим его через λ, а соответствующий ему собственный вектор – через f_2. Имеем $Ad_{f_1}(f_2) = \lambda f_2 \in L(G')$, но так как $f_2 \notin L(G)'$, то $\lambda = 0$, откуда $[f_1,f_2] = 0$. Следовательно, $L(G) \approx A^2\times_\rho A^2$. Если $L(G') = A^3$ или $L(G') = L(H_3)$, то в силу того что любое дополнение трехмерного подпространства одномерно, а значит, абелево, получаем, что $L(G)$ изоморфно либо $A^1\times_\rho A^3$, либо $A^1\times_\rho L(H_3)$. Теорема доказана.

В [4] доказан тот факт, что любая четырехмерная алгебра Ли с нулевым центром – это одна из алгебр, приведенных в теореме 1.1. Поскольку односвязные группы Ли изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли и групповая операция выражается через скобки Ли (подробней см. в [5]), получаем

Следствие 1.2. Любая связная односвязная группа Ли размерности 4 изоморфна одной из групп:

$$\mathbf{R}\times SU(2),\quad \mathbf{R}\times SL(2),$$

$$\mathbf{R}\times_\rho L(H_3),\quad \mathbf{R}\times_\rho \mathbf{R}^3,\quad \mathbf{R}^2\times_\rho \mathbf{R}^2. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что все четырехмерные связные односвязные группы Ли G имеют структуру прямого или полупрямого произведения $\mathbf{R}$ на трехмерную группу G_3. Если h_t – однопараметрическая подгруппа, действующая на G_3, то на G естественным образом возникает пара распределений, одно из которых порождается вектором, касательным к $\mathbf{R}$, и вектором, касательным к орбите действия h_t на G_3, а другое – его ортогональное дополнение относительно заданной метрики. Такая ситуация возникает достаточно часто. Кроме того, изучение инвариантных п.к.с. на таких группах сводится к ограниченному числу случаев.

2. Приводимые почти комплексные структуры

Пусть $L(G)$ – алгебра Ли односвязной группы Ли G. Обозначим через Σ – левоинвариантное распределение на G, порожденное векторами e_0 и e_1 из алгебры Ли $L(G)$, и пусть $\Sigma^\perp$ – дополнительное к нему левоинвариантное распределение, порожденное векторами e_2 и e_3. Определим на G левоинвариантную метрику g_0, полагая ортонормированным выбранный базис e_0, e_1, e_2, e_3,

$$g_0(e_i,e_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j = 0,1,2,3. \tag{2.1}$$

В дальнейшем на алгебре Ли будут выбираться специальные базисы e_0, e_1, e_2, e_3, которые будут считаться ортонормированными, а распределения Σ и $\Sigma^\perp$ всегда порождены векторами e_0, e_1 и e_2, e_3, соответственно.

Определение 2.1. Приводимой почти комплексной структурой на группе Ли G называется почти комплексная структура, инвариантно действующая на распределениях Σ и $\Sigma^\perp$.

Если J – приводимая п.к.с., то в выбранном базисе

$$J = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где A и B – блоки ранга 2.

Почти комплексная структура J на группе Ли G называется инвариантной, если для любого $h \in G$, $J(h) = dL_h J(1)$.

Теорема 2.1. Если J – приводимая почти комплексная структура на четырехмерной группе Ли, то:

$$J = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

где $\quad a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1. \qquad (2.3)$

Доказательство сразу получается из блочного вида матрицы (2.3) и из условия $J{\cdot}J = -E$.

Структуры вида (2.2) естественным образом возникают, когда G является расслоением Хопфа (см. [2]) или иным расслоением с двумерным слоем. Известно [1], что п.к.с. J интегрируема тогда и только тогда, когда тензор Неенхейса

$$N(X,Y) = 2([JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]) \tag{2.4}$$

равен нулю.

Приступим теперь к изучению приводимых п.к.с. на неабелевых группах Ли. Выразим тензор Неенхейса через структурные константы. Подставляя в (2.4) выражения

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k \quad \text{и} \quad J(e_i) = J_i^k e_k,$$

получаем

$$N(e_i, e_j) = 2(J_i^l J_j^m C_{lm}^k + J_i^l J_m^k C_{jl}^m -$$
$$- J_j^l J_m^k C_{il}^m - C_{ij}^k) e_k,$$

откуда

$$N_{ij}^k = 2(J_i^l J_j^m C_{lm}^k + J_i^l J_m^k C_{jl}^m - J_j^l J_m^k C_{il}^m - C_{ij}^k). \quad (2.5)$$

В следующих параграфах будут рассмотрены инвариантные приводимые п.к.с. для групп, приведенных в списке (1.3).

3. Случай прямого произведения

Пусть e_0, e_1, e_2, e_3 – базис алгебры Ли группы $\mathbf{R}\times SU(2)$. Известно, что алгебра Ли этой группы изоморфна $A^1\times\mathbf{R}^3$, где $\mathbf{R}^3$ имеет векторное произведение в качестве операции. Отсюда получаем:

$$[e_0, e_i] = 0 \text{ при } i = 1,2,3, \quad [e_1, e_2] =$$
$$= e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1. \quad (3.1)$$

Поэтому структурные константы имеют вид

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1, \; C_{13}^2 = -C_{31}^2 = -1,$$
$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1, \quad (3.2)$$

а все остальные структурные константы нулевые. Из условий (2.3) следует, что b и c имеют разные знаки и β, γ также имеют разные знаки. В дальнейшем будем считать, что $b<0$ и $\beta<0$.

Теорема 3.1. Приводимые почти комплексные структуры на группе $\mathbf{R}\times SU(2)$ интегрируемы тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$, $\gamma = -\beta = 1$.

Доказательство. Пусть N – тензор Неенхейса структуры J вида (2.3). Вычисляя $N(e_0,e_1)$ с помощью (2.4), получаем: $N(e_0,e_1) = 0$, откуда $N_{01}^k = 0$ при $k = 0,1,2,3$. Далее, подставляя в (2.5) значения структурных констант и коэффициентов J_{ij}, находим

$$N_{02}^2 = -N_{03}^3 = -2(c\beta + c\gamma),$$
$$N_{02}^3 = N_{03}^2 = 4c\alpha,$$
$$N_{12}^2 = -N_{13}^3 = 2(a\beta + a\gamma + \alpha\gamma - \alpha\beta),$$
$$N_{12}^3 = -N_{13}^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - 1),$$
$$N_{23}^0 = -4b\alpha,$$
$$N_{23}^1 = 2(2a\alpha - \alpha^2 - \beta\gamma - 1),$$

а остальные компоненты либо нулевые, либо совпадают с приведенными выше компонентами с точностью до знака. Приравнивая все компоненты к нулю, получаем систему, решая которую с учетом (2.3), получаем $\alpha = 1$, $\gamma = -\beta = 1$.

Если $\widetilde{G}$ – универсальная накрывающая группа ли G размерности 4 и комплексная структура J на $\widetilde{G}$ инвариантна относительно правого действия группы $\pi_1(G)$ на $\widetilde{G}$, то есть $J\cdot dR_\alpha = J$ для всех $\alpha \in \pi_1(G)$, то J переносится на G с помощью дифференциала проекции.

Следствие 3.2. Если $\widetilde{G} \cong \mathbf{R}\times SU(2)$ и J – приводимая комплексная структура на $\widetilde{G}$, инвариантная относительно первого действия группы $\pi_1(G)$ на $\widetilde{G}$, то группа Ли G допускает комплексную структуру J.

Известно, что алгебра Ли группы $SL(2,\mathbf{R})$ состоит из бесследовых матриц и имеет базис e_1, e_2, e_3 такой, что

$$[e_1,e_2] = e_3, \quad [e_1,e_3] = -2e_1, \quad [e_2,e_3] = 2e_2. \quad (3.3)$$

Дополним этот базис вектором e_0 до базиса алгебры Ли $\mathbf{R}\times SL(2,\mathbf{R})$. Тогда $[e_0,e_i] = 0$, $i = 1,2,3$. Отсюда получаем, что структурные константы имеют вид

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1, \; C_{13}^1 = -C_{31}^1 = -2,$$
$$C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 2$$

и $C_{ij}^k = 0$ для всех остальных индексов i, j, k.

Теорема 3.3. Группа Ли $\mathbf{R}\times SL(2,\mathbf{R})$ не допускает приводимых комплексных структур.

Доказательство. Пусть J – приводимая п.к.с. вида (2.2). Если J интегрируема, то все компоненты тензора Неенхейса N_{ij}^k равны нулю, в частности, $N_{02}^1 = 0$. Подставляя в (2.5) значения структурных констант, находим $N_{02}^1 = -4c\gamma$. Из условия (2.3) следует:
$bc = -a^2 - 1$, $\beta\gamma = -\alpha^2 - 1$. Следовательно, $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$, а значит, и $N_{02}^1 \neq 0$, то есть J не может быть интегрируемой.

Замечание

Матрица $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда $x_1x_4 - x_2x_3 = 1$. После замены координат $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_3 - y_4$, $x_3 = y_3 + y_4$, $x_4 = y_1 + y_2$ уравнение принимает вид:

$$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + y_4^2 = 1, \text{ т. е. группа}$$

$\mathbf{R}\times SL(2,\mathbf{R})$ диффеоморфна $\mathbf{R}\times S(2,2)$, где $S(2,2)$ – единичная псевдосфера относительно псевдоримановой метрики сигнатуры (2.2). Таким образом, пространство $\mathbf{R}\times S(2,2)$ не допускает приводимых комплексных структур.

4. Случай полупрямого произведения

Пусть A^{2+} и A^{2-} – соответственно первый и второй сомножители полупрямого произведения $A^2 \times_\rho A^2$. Будем считать, что e_0, e_1 – базис в A^{2+} и e_2, e_3 – базис в A^{2-}.

Теорема 4.1. Группа Ли $\mathbf{R}^2\times_\rho\mathbf{R}^2$ допускает приводимые комплексные структуры тогда и только тогда, когда в некотором базисе ее алгебры Ли

$A^2\times_\rho A^2$, структурные константы удовлетворяют условию:

$$C_{13}^2+C_{12}^3+C_{03}^3-C_{02}^2=0,$$
$$C_{13}^3-C_{12}^2-C_{03}^2-C_{02}^3=0. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Пусть J – приводимая п.к.с. вида (2.2) в базисе e_0, e_1, e_2, e_3. Поскольку J инвариантно действует на A^{2+} и A^{2-}, то существует базис f_0, f_1 в A^{2+} и базис f_2, f_3 в A^{2-} такие, что $J(f_0)=f_1$ и $J(f_2)=f_3$. Пусть C_{ij}^k – структурные константы в базисе f_0, f_1, f_2, f_3. Тогда $C_{ij}^k=0$ при $k=0,1$. Если $\rho\equiv 0$, то группа становится абелевой, и, следовательно, J – интегрируема и (4.1) тождественно выполняется. Если $\rho\neq 0$, то структурные константы C_{ij}^k одновременно не обращаются в ноль при $k=2,3$. Пусть N – тензор Неенхейса структуры J в базисе f_0, f_1, f_2, f_3. Вычисляя его компоненты с помощью (2.5), получаем:

$$N_{01}^k=N_{23}^k=0 \text{ при } k=0,1,2,3,$$
$$N_{ij}^0=N_{ij}^1=0 \text{ для всех } i,j,$$
$$N_{02}^2=-N_{12}^3=-N_{13}^2=-N_{03}^3=2(C_{13}^2+C_{12}^3+C_{03}^3-C_{02}^2),$$
$$N_{02}^3=N_{03}^2=N_{12}^2=-N_{13}^3=2(C_{13}^3-C_{12}^2-C_{03}^2-C_{02}^3).$$

Таким образом, условие интегрируемости структуры J принимает вид $N_{02}^2=N_{02}^3=0$, откуда получаем (4.1).

Известно, что в $L(H_3)$ можно выбрать базис e_1, e_2, e_3 такой, что $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=[e_2,e_3]=0$. Дополним этот базис вектором e_0 до базисов в $A^1\times_\rho L(H_3)$. Тогда структурные константы в этом базисе имеют вид:

$$C_{0j}^k=-C_{j0}^k=0 \text{ при } j,k=1,2,3,$$
$$C_{12}^3=-C_{21}^3=1,$$

а все остальные структурные константы тождественно равны нулю. Поскольку группа $\mathbf{R}^2\times_\rho\mathbf{R}^2$ является частным случаем групп $\mathbf{R}^1\times_\rho H_3$ и $\mathbf{R}^1\times_\rho\mathbf{R}^3$, то в дальнейшем будем обозначать через ρ^* те значения гомоморфизма ρ, при которых эти группы вырождаются в $\mathbf{R}^2\times_\rho\mathbf{R}^2$.

Теорема 4.2. Группа Ли $\mathbf{R}\times_\rho H_3$ не допускает приводимых комплексных структур для всех $\rho\neq\rho^*$.

Доказательство. Пусть J – приводимая комплексная структура вида (2.3) и N_{ij}^k – компоненты ее тензора Неенхейса. Тогда из условия интегрируемости J следует, что $N_{12}^0=N_{13}^0=0$. С помощью (2.5) получаем: $N_{12}^0=-2b^2C_{02}^1=0$, $N_{13}^0=-2b^2C_{03}^1=0$, откуда $C_{02}^1=C_{03}^1=0$. Обозначим через W линейную оболочку векторов e_2 и e_3. Имеем: $[e_0,e_2]\in W$, $[e_0,e_3]\in W$. Из тождества Якоби находим:

$$[[e_0,e_1],e_2]=-[[e_1,e_2],e_0]-[[e_2,e_0],e_1]=$$
$$=[e_0,e_3]+C_{02}^2[e_2,e_1]+C_{02}^3[e_3,e_1]=$$
$$=[e_0,e_3]-C_{02}^2e_3\in W,$$

откуда $C_{01}^1=0$, и, следовательно, $[e_0,e_1]\in W$.

Таким образом, получаем, что W является первым производным идеалом. Далее, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы (1.1), получаем, что $A^1\times_\rho L(H_3)\cong A^2\times_\rho A^2$, а так как $\rho\neq\rho^*$, то структура J не может быть интегрируемой.

Пусть J – приводимая п.к.с. вида (2.3) на группе $\mathbf{R}^2\times_\rho\mathbf{R}^2$ и N_{ij}^k – компоненты ее тензора Неенхейса. С помощью (2.5) находим, что $N_{12}^0=-2b^2C_{02}^1$, $N_{13}^0=-2b^2C_{03}^1$. Далее, рассуждая аналогично доказательству теоремы (4.2), получаем:

Теорема 4.3. Группа Ли $\mathbf{R}^2\times_\rho\mathbf{R}^2$ не допускает приводимых комплексных структур для всех $\rho\neq\rho^*$.

Замечание. Если G – связная группа Ли размерности 4 и $\widetilde{G}$ – ее универсальная накрывающая, то $\widetilde{G}$ допускает приводимые комплексные структуры только тогда, когда $\widetilde{G}$ либо $\mathbf{R}\times SU(2)$, либо $\mathbf{R}^2\times_\rho\mathbf{R}^2$.

Обобщая результаты частей 3 и 4, получаем итоговый результат.

Теорема 4.4. Среди связных односвязных групп Ли размерности 4 только группы $\mathbf{R}\times SU(2)$ и $\mathbf{R}^2\times_\rho\mathbf{R}^2$ допускают приводимые комплексные структуры, причем $\mathbf{R}\times SU(2)$ является комплексным многообразием, а среди групп $\mathbf{R}^2\times_\rho\mathbf{R}^2$ комплексными многообразиями являются те, для которых выполняется условие (4.1).

Литература

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 1, 2.
2. Годушон, П. Поверхности Хопфа – квазикомплексные многообразия размерности 4 / П. Годушон // Четырехмерная риманова геометрия. Семинар А. Бесе 1978–1979 гг. – М.: Мир, 1985.
3. Берар-Бержери, Л. Однородные римановы пространства размерности / Л. Берар-Бержери // Четырехмерная риманова геометрия. Семинар А. Бессе 1978–1979 гг. – М.: Мир, 1985.
4. De Smedt V., Salamon S. Anti–Self–Dual Metricson Lie groups // Contemporary Mathematica. 2002. – Vol. 308. – P. 63–75.
5. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М.: Мир, 1964.