УДК 514.76

Н. А. Даурцева

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО КЭЛЕРОВЫ СТРУКТУРЫ НА $SU(2)\times SU(2)$

Рассмотрим произведение трехмерных сфер $S^3\times S^3$ как группу Ли $SU(2)\times SU(2)$. Будем исследовать только левоинвариантные почти комплексные структуры и метрики на $SU(2)\times SU(2)$. Так как эти структуры однозначно определяются своим ограничением на касательное пространство в единице группы, будем отождествлять их со своим ограничением на алгебру Ли $su(2)\times su(2)= T_e(SU(2)\times SU(2))$. Поскольку алгебра Ли $su(2)$ изоморфна $\boldsymbol{R}^3$, то естественно считать $su(2)\times su(2)= \boldsymbol{R}^3{}_1\times \boldsymbol{R}^3{}_2$. Если e_1, e_2, e_3 – стандартный базис $\boldsymbol{R}_1{}^3$ и e_4, e_5, e_6 – стандартный базис $\boldsymbol{R}_2{}^3$, то $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_1, e_3]=-e_2$, $[e_4, e_5]=e_6$, $[e_5, e_6]=e_4$, $[e_4, e_6]=-e_5$, $[e_i, e_j]=0$ для $i=1, 2, 3$; $j=4, 5, 6$. Форма Киллинга-Картана $B(X, Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\circ \mathrm{ad}Y)$ задает на $S^3\times S^3$ метрику $B(X, Y)=2(X_1, Y_1)+2(X_2, Y_2)$, где $(,)$ – стандартная метрика на $\boldsymbol{R}^3$, $X=(X_1, Y_1)$, $Y=(X_2, Y_2)\in \boldsymbol{R}^3{}_1\times \boldsymbol{R}^3{}_2$.

К S^3 применима конструкция расслоения Хопфа $\pi: S^3 \xrightarrow{S^1} CP^1$. Таким образом, для группы Ли $SU(2)\times SU(2)$ имеем:

$$\pi: \begin{array}{l} SU(2)\times SU(2) \xrightarrow{SU(1)\times SU(1)} \\ \to SU(2)/SU(1)\times SU(2)/SU(1). \end{array}$$

Без ограничения общности можно считать, что e_1 и e_4 – векторы, касательные в единице группы к первому и второму сомножителю слоя $SU(1)\times SU(1)$ соответственно, а $\pi_*(e_2)$, $\pi_*(e_3)$ ($\pi_*(e_5)$, $\pi_*(e_6)$) – касательные к первому (второму) сомножителю базы расслоения. Конструкция расслоения позволяет определить на $SU(2)\times SU(2)$ каноническую 2-форму $\omega = e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^3 + e^5\wedge e^6$. Известно [1], что для почти комплексной структуры J_0 такая, что $J_0e_1=e_4$, $J_0e_2=e_3$, $J_0e_5=e_6$, (B, J_0, ω) – эрмитова структура на $SU(2)\times SU(2)$. Рассмотрим множество всех левоинвариантных почти комплексных структур на $SU(2)\times SU(2)$. Все такие структуры образуют 18-параметрическое семейство Ai. Они однозначно определяются своим ограничением на касательное пространство $T_e(SU(2)\times SU(2))$, то есть определяются эндоморфизмами

$$I: \boldsymbol{R}^3{}_1\times \boldsymbol{R}^3{}_2 \to \boldsymbol{R}^3{}_1\times \boldsymbol{R}^3{}_2,\ I^2=-1.$$

В множестве Ai естественно выделить следующие подмножества:

$AO_B{}^+=\{J\in Ai$: $B(JX, JY)= B(X, Y)$, *J задают ту же ориентацию, что и $J_0\}$ – ортогональных почти комплексных структур*, и

$A_\omega{}^+=\{ J\in Ai$: $\omega(JX, JY)=\omega(X, Y)$, $\omega(X, JX) > 0$, $X \neq 0\}$ *– положительно ассоциированных с формой ω.*

Напомним, что $S^3\times S^3$ не допускает кэлеровых структур, так как по топологическим причинам на произведении нечётномерных сфер нельзя построить замкнутую, невырожденную 2-форму. Поэтому интересно изучить структуры, «близкие» к кэлеровым: эрмитовы и приблизительно кэлеровы. Инвариантные эрмитовы структуры на $SU(2)\times SU(2)$ описаны в [2]. Приблизительно кэлеровы структуры (B, J), $J\in AO_B{}^+$ были исследованы в [3]. В классе $AO_B{}^+$ все почти комплексные структуры связаны инвариантностью относительно одной и той же метрики B. Для почти эрмитового многообразия $(SU(2)\times SU(2), B, J)$ меняется только $J\in AO_B{}^+$, это упрощает ситуацию. Рассмотрим теперь $J\in A_\omega{}^+$. Известно, что пара (ω, J) определяет J-эрмитову метрику по формуле $g_J(X, Y)=\omega(X, JY)$.

Метрики, полученные таким образом, называются положительно ассоциированными с формой ω, пространство таких метрик обозначается AM_ω. Формула (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $A_\omega{}^+$ и AM_ω. В работе рассматриваются структуры (g_J, J) на $SU(2)\times SU(2)$, такие что $J\in A_\omega{}^+$. Изучается вопрос, когда $(SU(2)\times SU(2), g_J, J)$ – приблизительно кэлерово?

Теорема: $(SU(2)\times SU(2), g_J, J)$*– приблизительно кэлерово для $J\in A_\omega{}^+$, если и только если метрика g_J принадлежит одному из следующих однопараметрических семейств:*

1). $g_J(e_1, e_1)= g_J(e_4, e_4)=t$,
$g_J(e_1, e_4)= f(t)$,
$g_J(e_2, e_2)= g_J(e_3, e_3)= g_J(e_5, e_5)= g_J(e_6, e_6)=y(t)$,
$g_J(e_2, e_3)= g_J(e_5, e_6)=-x(t)$,
$g_J(e_2, e_5)=- g_J(e_3, e_6)=v(t)$,
$g_J(e_i, e_j)=0$, *для других i,j;*

2). $g_J(e_1, e_1)= g_J(e_4, e_4)=t$,
$g_J(e_1, e_4)= f(t)$,
$g_J(e_2, e_2)= g_J(e_3, e_3)= g_J(e_5, e_5)= g_J(e_6, e_6)=y(t)$,
$g_J(e_2, e_3)=- g_J(e_5, e_6)=x(t)$,
$g_J(e_2, e_5)=g_J(e_3, e_6)=-v(t)$,
$g_J(e_i, e_j)=0$, *для других i,j,*

где $f(t)=\sqrt{1-t^2}$, $y(t)=\dfrac{1}{4}\left(t+f+\sqrt{(t+f)^2+16}\right)$,

$x^2(t)=\dfrac{1}{2}(t-f)y$, $v^2(t)=u^2(t)=fy$, $t\in(1;+\infty)$;

3). $g_J(e_1, e_1)=t$,
$g_J(e_4, e_4)=1/t$,

$$g_J(e_2, e_2)= g_J(e_3, e_3)=\frac{t+\sqrt{t^2+16}}{4},$$

$$g_J(e_5, e_5)= g_J(e_6, e_6)=\frac{1+\sqrt{16t^2+1}}{4t},$$

$$g_J(e_2, e_3)=\frac{t}{2}\, g_J(e_2, e_2),$$

$$g_J(e_5, e_6)^2=\frac{1}{2t}\, g_J(e_5, e_5),$$

$g_J(e_i, e_j)=0$, *для других i,j.*

Доказательство. Для того, чтобы $(SU(2)\times SU(2), g_J, J)\in NK$, необходимо и достаточно [4], чтобы $\nabla_X\omega(X,Y)=0$, $\forall X,Y\in su(2)\times su(2)$, где ∇ – связность Леви-Чевита метрики g_J.

Так как g_J меняется вместе с J, то связность для каждой пары (g_J, J) необходимо вычислять заново.

Если почти комплексная структура J определяется матрицей $\{i_{kl}\}_{k,l=1}^{6}$, во введенном выше базисе $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$, то условие $J \in A_\omega^+$ для компонент матрицы $\{i_{kl}\}_{k,l=1}^{6}$ выглядит следующим образом:

$i_{42}=i_{31}$, $i_{43}=-i_{21}$, $i_{11}=-i_{44}$, $i_{45}=i_{61}$,
$i_{46}=-i_{51}$, $i_{22}=-i_{33}$, $i_{12}=-i_{34}$, $i_{62}=i_{35}$,
$i_{52}=-i_{36}$, $i_{24}=i_{13}$, $i_{25}=-i_{63}$, $i_{26}=i_{53}$, $i_{15}=-i_{64}$, $i_{16}=i_{54}$, $i_{66}=-i_{35}$.

Поскольку все рассматриваемые структуры левоинвариантны, нам достаточно провести все вычисления в точке – единице группы. Будем руководствоваться следующими соображениями:

$$\nabla_X\omega(X,Y) = -\omega(X,\nabla_X Y) = -B(J_0X,\nabla_X Y).$$

Таким образом,

$$\nabla_{e_1}\omega(e_1,Y) = -(\nabla_{e_1}Y)^4,$$

$$\nabla_{e_2}\omega(e_2,Y) = -(\nabla_{e_2}Y)^3,$$

$$\nabla_{e_{31}}\omega(e_3,Y) = (\nabla_{e_3}Y)^2,\ \nabla_{e_4}\omega(e_4,Y) = (\nabla_{e_4}Y)^1,$$

$$\nabla_{e_5}\omega(e_5,Y) = -(\nabla_{e_5}Y)^6,$$

$$\nabla_{e_6}\omega(e_6,Y) = (\nabla_{e_6}Y)^5.$$

Вычислим, например, $\nabla_{e_1}\omega(e_1,e_1)$. Воспользуемся формулой [5]:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] + U(X,Y),$$

где $2g(U(X,Y), Z)=g([Z, X], Y)+g(X, [Z, Y])$, для любого $\forall Z \in su(2)\times su(2)$.

В нашем случае

$$(\nabla_{e_1}e_1)^4 = \frac{1}{2}[e_1,e_1]^4 + U(e_1,e_1)^4 = U(e_1,e_1)^4$$

$$2g_J(U(e_1,e_1), Z)=g_J([Z,e_1], e_1)+ g_J([Z,e_1], e_1)= =2\, g_J([Z,e_1], e_1).$$

Таким образом, $g_J(U(e_1,e_1), e_i)=0$, если $i=1,4,5,6$; $g_J(U(e_1,e_1), e_2)=-g_J(e_3, e_2)=i_{21}$, $g_J(U(e_1,e_1), e_3)= g_J(e_2, e_1)=i_{31}$.

Записывая эти равенства в матричном виде, получаем:

$$g_J\cdot U = \begin{pmatrix}0\\ i_{21}\\ i_{31}\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ U = g_J^{-1}\begin{pmatrix}0\\ i_{21}\\ i_{31}\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = (\omega I)^{-1}\begin{pmatrix}0\\ i_{21}\\ i_{31}\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = I\omega\begin{pmatrix}0\\ i_{21}\\ i_{31}\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow U(e_1,e_1)^4 = \left[I\begin{pmatrix}0\\ i_{21}\\ i_{31}\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right]^4 = i_{31}^2 + i_{21}^2$$

$\nabla_{e_1}\omega(e_1,e_1) = -(\nabla_{e_1}e_1)^4 = U(e_1,e_1)^4=0$, если и только если $i_{31}= i_{21}=0$.

Аналогично могут быть найдены остальные условия. В итоге получаем, что $(SU(2)\times SU(2), g_J, J) \in NK$ в том и только том случае, если:

1) $i_{31}= i_{21}=i_{45}= i_{46}= i_{12}= i_{13}= i_{15}= i_{16}=0$;
2) $-1+ i_{32}^2- i_{41}\, i_{32}+ i_{22}^2=0$;
3) $i_{11}\, i_{32}+ i_{35}^2+ i_{36}^2=0$;
4) $1- i_{22}^2- i_{41}\, i_{23}- i_{23}^2=0$;
5) $i_{25}^2- i_{11}\, i_{23}+ i_{26}^2=0$;
6) $i_{35}^2+ i_{11}\, i_{65}+ i_{25}^2=0$;
7) $-1+ i_{55}^2+i_{14}\, i_{65}+ i_{65}^2=0$;
8) $i_{26}^2- i_{11}\, i_{56}+ i_{36}^2=0$;
9) $1- i_{55}^2+ i_{14}\, i_{56}- i_{56}^2=0$.

Так как J положительно ассоциирована, то $i_{41}>0$, $i_{32}>0$. Обозначим $t= i_{41}$. Рассмотрим два случая: $i_{11}=0$, $i_{11}\neq 0$.

I. Если $i_{11}=0$, то из условий 3), 5), 6), 8) следует $i_{25}= i_{26}= i_{35}= i_{36}=0$. В результате остаются следующие ограничения:
   - $(SU(2)\times SU(2), g_J, J) \in NK$, если и только если 2), 4), 7), 9);
   - $J^2=-1$ если и только если $i_{14}\, i_{41}=-1$; $i_{22}^2+ i_{32}\, i_{23}=-1$; $i_{55}^2+ i_{56}\, i_{65}=-1$.

Условия 7) и 9) дают $(i_{56}+ i_{65})(i_{56}- i_{65}+1/t)=0$. Условия $1/t=- i_{56}+ i_{65}$, $i_{55}^2+ i_{56}\, i_{65}=-1$ и 9) несовместны. Следовательно, $i_{56}=- i_{65}$, аналогично $i_{32}=- i_{23}$. Выражая i_{23}, i_{56} через t, получаем третье однопараметрическое семейство из утверждения теоремы.

II. Если $i_{11}\neq 0$, то складывая 2) и 4), имеем: $(i_{23}+ i_{32})(i_{23}- i_{32}+t)=0$.

Предположим, что $t=- i_{23}+ i_{32}$, тогда из 4) $i_{22}^2= 1- i_{41}\, i_{23}- i_{23}^2=1- i_{23}\, i_{32}$. Главный минор третьего порядка матрицы g_J равен: $\begin{vmatrix} i_{41} & 0 & 0\\ 0 & i_{32} & -i_{22}\\ 0 & -i_{22} & -i_{23}\end{vmatrix}$ $=i_{41}(-i_{32}\, i_{23}- i_{22}^2)=- i_{41}<0$, что противоречит положительной определенности матрицы g_J. Значит, $i_{32}=- i_{23}$, аналогично $i_{56}=- i_{65}$. Условия 3), 5), 6), 8) принимают вид:

3) $i_{35}^2+ i_{36}^2=- i_{11}\, i_{32}$;
5) $i_{25}^2 + i_{26}^2=- i_{11}\, i_{32}$;
6) $i_{35}^2 + i_{25}^2=- i_{11}\, i_{65}$;
8) $i_{26}^2 + i_{36}^2=- i_{11}\, i_{65}$.

Так как $i_{41}>0$, $i_{32}>0$, то $i_{11}\leq 0$. Из условий 3), 5), 6), 8) следует $i_{25}^2 = i_{36}^2$, $i_{26}^2 = i_{35}^2$, $i_{65} = i_{32}$. Случай $i_{25}= i_{36}$, $i_{26}= i_{35}$ дает первое однопараметрическое семейство метрик из утверждения теоремы, а случай $i_{25}=- i_{36}$, $i_{26}= i_{35}$ второе.

Следствие: *Если* $(SU(2)\times SU(2),\ g_J,\ J)$ – *приблизительно кэлерово для* $J\in A_\omega^+$, *то:*

$$J\langle e_1,\ e_4\rangle \subset \langle e_1,\ e_4\rangle;\ J\langle e_2,\ e_3, e_5,\ e_6\rangle \subset \langle e_2,\ e_3, e_5,\ e_6\rangle$$

Литература

1. Calabi, E. A class of compact complex manifolds which are not algebraic / B. A. Eckmann // Ann. Math. – 1935. – Vol. 58. – P. 494–500.
2. Даурцева, Н. А. Инвариантные комплексные структуры на $S^3\times S^3$ // Электронный журнал «Исследовано в России», 81, С. 882–887, 2004, http://zhurnal/ape.relarn.ru/articles/2004/081.pdf.
3. Даурцева, Н. А. Функционал нормы тензора Нейенхейса на множестве левоинвариантных почти комплексных структур на $SU(2)\times SU(2)$, ортогональных относительно метрики Киллинга-Картана // Вестник КемГУ. – 2004. – Т. 17. – С. 156–158.
4. Gray A. The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants / L. M. Hervella // Ann. Math. Pura Appl. – 1980. – Vol. 123. – P. 35–58.
5. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2.