МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ СМЕСИ ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин

В работе изучается модель, описывающая установившееся движение двухкомпонентной смеси вязких несжимаемых жидкостей в цилиндрических трубах.

В настоящее время имеется большое количество различных моделей для описания многокомпонентных смесей жидкостей или газов, все они являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении использования для решения конкретных задач. По этим причинам ни одна из них не стала общепринятой.

При построении замкнутой системы уравнений многокомпонентной смеси используются уравнения неразрывности для составляющих смеси:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+div\left(\rho_i\vec{u}^{(i)}\right)=h_i,\quad i=1,\dots,N,^{1} \qquad (1)$$

где ρ_i – плотность, $\vec{u}^{(i)}$ – скорость i-ой составляющей смеси. При этом $h_i\neq 0$, если различные компоненты могут обмениваться между собой массой в результате процессов смешения, ионизации, химических реакций и т. п.

Что касается уравнений сохранения импульса, то один из способов их построения заключается в том, что формулируются законы сохранения импульса для каждой составляющей смеси:

$$\rho_i\left[\frac{\partial\vec{u}^{(i)}}{\partial t}+\left(\vec{u}^{(i)}\nabla\right)\vec{u}^{(i)}\right]=div\,P^{(i)}+\rho_i\vec{f}^{(i)}+\vec{I}^{(i)},\quad i=1,\dots,N. \qquad (2)$$

Здесь $P^{(i)}$ – тензор напряжений, $\vec{f}^{(i)}$ – вектор массовых сил, $\vec{I}^{(i)}$ – члены, учитывающие обмен импульсом между различными составляющими для i-ой компоненты смеси. Функции $\vec{I}^{(i)}$ обычно считаются пропорциональными разности скоростей $\vec{u}^{(i)}-\vec{u}^{(j)}$, причем коэффициенты пропорциональности определяются различными авторами поразному, и единства в определении $\vec{I}^{(i)}$, а также $P^{(i)}$, в настоящее время нет.

Актуальность математических исследований уравнений (1) – (2) основывается на разнообразии их приложений, стимулируется потребностями развития индустриальных технологий. Результаты и методы, разрабатываемые при изучении проблем механики сплошных сред, имеют свое место в теории дифференциальных уравнений и соответственно, представляют самостоятельный научный интерес. Исследования корректности указанных задач способствуют разработке вычислительных методов для их решения.

В данной статье мы рассмотрим модель, которая описывает установившееся течение двухкомпонентной ($N=2$) (с математической точки зрения смеси с N компонентами ($N>2$), могут быть рассмотрены аналогично случаю с ($N=2$) смеси вязких несжимаемых ($\rho_i=const>0,\ i=1,2$) жидкостей в длинной цилиндрической трубе. Будем считать рассматриваемую смесь изотермической (с постоянной температурой) и не будем брать в расчет химические реакции ($h_i=0$).

Определим в (2) для $i=1,2$ [1], [2]:

$$P^{(i)}=\sigma^{(i)}-p_i I,$$

$$\sigma^{(i)}=2\mu_{i1}D\left(\vec{u}^{(1)}\right)+2\mu_{i2}D\left(\vec{u}^{(2)}\right)+\lambda_{i1}div\,\vec{u}^{(1)}I+\lambda_{i2}div\,\vec{u}^{(2)}I,$$

$$\vec{I}^{(i)}=(-1)^{i+1}a\left(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)}\right),\quad a=const>0 \qquad (3)$$

с постоянными коэффициентами вязкости μ_{ik},λ_{ik}, такими, что

$$\begin{gathered}\mu_{11}>0,\ \mu_{22}>0,\ 2\mu_{11}+\lambda_{11}>0,\ 2\mu_{22}+\lambda_{22}>0,\\ 4\mu_{11}\mu_{22}-(\mu_{12}+\mu_{21})^2>0,\\ 4(2\mu_{11}+\lambda_{11})(2\mu_{22}+\lambda_{22})-\\ -(2\mu_{12}+\lambda_{12}+2\mu_{21}+\lambda_{21})^2>0.\end{gathered} \qquad (4)$$

Здесь $\sigma^{(i)}$ – вязкая часть тензора напряжений, D – тензор скоростей деформаций ($D(\vec{\omega})=\frac{1}{2}\left(\nabla\vec{\omega}+(\nabla\vec{\omega})^T\right)$), p_i – давление i-ой составляющей смеси.

Выберем декартовы оси координат так, чтобы ось z была направлена по оси трубы. Обозначим через Σ поперечное сечение трубы плоскостью xy, которое представляет собой круг радиуса R, и через C контур, ограничивающий Σ (рис. 1) будем искать решения уравнений движения, предполагая, что линии тока – прямые, параллельные оси z, иначе говоря, примем, что $u_1^{(i)}=u_2^{(i)}=0$, $u_3^{(i)}\neq 0,\quad i=1,2$.

---

[1] Здесь и далее никакого суммирования по повторным индексам не производится, если не оговорено противное.

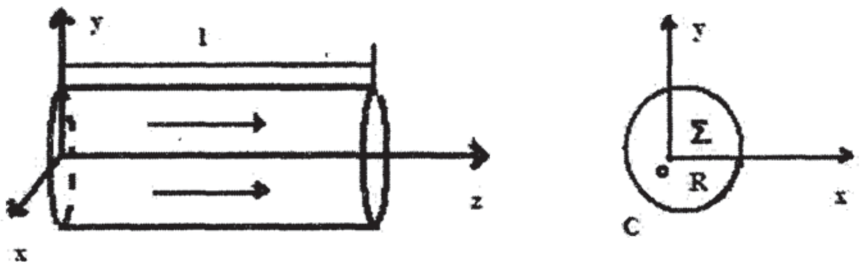


Рис. 1. **К течению смеси вязких жидкостей в цилиндрической трубе**

В этом случае система уравнений (1) – (2) существенно упрощается и принимает следующий вид: $\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial z}=0,\quad i=1,2,$ (5)

$$\frac{\partial p_i}{\partial x}=\frac{\partial p_i}{\partial y}=0,\quad i=1,2, \tag{6}$$

$$-\frac{\partial p_i}{\partial z}+\mu_{i1}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2}\right)+ +\mu_{i2}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial y^2}\right)+ +(-1)^{i+1}a\cdot\left(u_3^{(2)}-u_3^{(1)}\right)=0,\quad i=1,2. \tag{7}$$

Из (5) и (6) непосредственно вытекает, что

$$u_3^{(i)}=u_3^{(i)}(x,y),\quad i=1,2 \tag{8}$$

и $p_i=p_i(z),\quad i=1,2.$ (9)

Ясно, что равенство (7) может иметь место только тогда, когда обе части уравнения:

$$\frac{\partial p_i}{\partial z}=\mu_{i1}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2}\right)+ +\mu_{i2}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial y^2}\right)+ +(-1)^{i+1}a\cdot\left(u_3^{(2)}-u_3^{(1)}\right),\quad i=1,2$$

являются постоянной величиной.

Обозначив $\frac{\partial p_i}{\partial z}$ через $-k_i$, будем иметь:

$$p_i=-k_i z+C_i,\quad i=1,2. \tag{10}$$

Величина $k_i=-\frac{\partial p_i}{\partial z}$ (11)

представляет собой изменение давления вдоль оси трубы для i-ой компоненты смеси, отнесенное к единице длины трубы, и называется перепадом давления вдоль оси трубы i-ой составляющей смеси. Для полного определения вида прямой (10), характеризующей изменение давления вдоль оси трубы для i-ой компоненты смеси, т. е. для определения перепада k_i и C_i, достаточно задать значения давлений p_i^1 и p_i^2 в каких-либо двух сечениях трубы.

Рассмотрим теперь задачу об определении скорости движения каждой из рассматриваемых компонент смеси жидкостей $u_3^{(1)}$ и $u_3^{(2)}$ в трубе при условии, что перепады давления k_i i-ой составляющей смеси заданы.

Для определения $u_3^{(1)}$ и $u_3^{(2)}$ на основании (7) и (10) имеем следующую систему уравнений:

$$\mu_{i1}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y^2}\right)+ \mu_{i2}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial y^2}\right)+ (-1)^{i+1}a\cdot\left(u_3^{(2)}-u_3^{(1)}\right)=-k_i,\quad i=1,2, \tag{12}$$

которую дополним граничными условиями прилипания на контуре $C: u_3^{(i)}=0,\quad i=1,2.$ (13)

Складывая уравнения (12), получаем следующую задачу: $\Delta w=-(k_1+k_2),\ w|_C=0,$ (14)

где $w=(\mu_{11}+\mu_{21})\,u_3^{(1)}+(\mu_{12}+\mu_{22})\,u_3^{(2)}$,

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Эта задача имеет единственное решение, которое выглядит следующим образом:

$$w(x,y)=\frac{k_1+k_2}{4(\mu_{11}+\mu_{21})}\left(R^2-\left(x^2+y^2\right)\right). \tag{15}$$

Таким образом:

$$u_3^{(1)}=\frac{k_1+k_2}{4(\mu_{11}+\mu_{21})}\left(R^2-\left(x^2+y^2\right)\right)- -\frac{\mu_{12}+\mu_{22}}{\mu_{11}+\mu_{21}}u_3^{(2)}. \tag{16}$$

Далее, подставим (16) во второе уравнение (12) и получим следующую задачу для определения функции $u_3^{(2)}$:

$$\Delta u_3^{(2)} + c_1 u_3^{(2)} = c_2\left(R^2 - \left(x^2+y^2\right)\right) + c_3,$$
$$u_3^{(2)}\big|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \tag{17}$$

где:

$$c_1 = -a\frac{\mu_{11}+\mu_{12}+\mu_{21}+\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21}},$$
$$c_2 = -a\frac{k_1+k_2}{4\left(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21}\right)},$$
$$c_3 = \frac{k_1\mu_{21}-k_2\mu_{11}}{\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21}}.$$

Из условий (4) вытекает, что постоянная $c_1 < 0$ и, следовательно, задача (17) имеет единственное решение (см. [3]).

Для решения задачи (17) перейдем к полярной системе координат (r,φ). Введем новые независимые переменные по формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и перепишем (17) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial \varphi^2} + c_1 u_3^{(2)} = c_2\left(R^2 - r^2\right) + c_3, \quad u_3^{(2)}\big|_{r=R} = 0. \tag{18}$$

Будем искать решение задачи (18) в следующем виде:

$$u_3^{(2)}(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)U_n(r), \tag{19}$$

где A_n и B_n неизвестные постоянные, которые мы определим позже.

Подставив (19) в уравнение (18), получим бесконечное число обыкновенных дифференциальных уравнений Бесселя:

$$rU_0'' + U_0' + c_1 rU_0 = c_2 r\left(R^2 - r^2\right) + c_3 r,$$
$$r^2U_n'' + rU_n' + \left(c_1 r^2 - n^2\right)U_n = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

решая которые, находим:

$$U_0(r) = C_0\,J_0\left(\sqrt{c_1}r\right) + D_0\,Y_0\left(\sqrt{c_1}r\right) + \frac{c_1\left(c_2R^2 - c_2r^2 + c_3\right) + 4c_2}{c_1^2},$$
$$U_n(r) = C_n\,J_n\left(\sqrt{c_1}r\right) + D_n\,Y_n\left(\sqrt{c_1}r\right), \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{20}$$

где $J_\nu(r)$ и $Y_\nu(r)$ – бесселевы функции первого и второго рода соответственно (см. [4]). Но так как нас интересуют только регулярные функции, то следует положить $D_n = 0, n = 0,1,2,\ldots$ (в противном случае в точке $r = 0$ величина U_n обратится в бесконечность).

Таким образом, решение уравнения в (18), удовлетворяющее естественным физическим условиям периодичности (однозначности) и регулярности имеет следующий вид:

$$u_3^{(2)}(r,\varphi) = C_0\,J_0\left(\sqrt{c_1}r\right) + \frac{c_1\left(c_2R^2 - c_2r^2 + c_3\right) + 4c_2}{c_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n'\cos n\varphi + B_n'\sin n\varphi\right)J_n\left(\sqrt{c_1}r\right), \tag{21}$$

где $A_n' = A_nC_n$, $B_n' = B_nC_n$.

Удовлетворяя граничные условия (18), получим:

$$A_n' = B_n' = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots,$$
$$C_0 = -\frac{c_1c_3 + 4c_2}{c_1^2 J_0\left(\sqrt{c_1}R\right)}$$

и, следовательно, решение задачи (18) выражается по формуле:

$$u_3^{(2)}(r) = -\frac{c_1c_3 + 4c_2}{c_1^2 J_0\left(\sqrt{c_1}R\right)}J_0\left(\sqrt{c_1}r\right) + \frac{c_1\left(c_2R^2 - c_2r^2 + c_3\right) + 4c_2}{c_1^2}. \tag{22}$$

Из формул (22) и (16) находим, что:

$$u_3^{(1)}(r) = \frac{k_1+k_2}{4\left(\mu_{11}+\mu_{21}\right)}\left(R^2 - r^2\right) - \frac{\mu_{12}+\mu_{22}}{\mu_{11}+\mu_{21}}\left(-\frac{c_1c_3+4c_2}{c_1^2J_0\left(\sqrt{c_1}R\right)}J_0\left(\sqrt{c_1}r\right) + \frac{c_1\left(c_2R^2 - c_2r^2 + c_3\right) + 4c_2}{c_1^2}\right). \tag{23}$$

Возвращаясь к декартовым координатам, в итоге получим решение задачи (12) – (13):

$$u_3^{(1)}(x,y) = \frac{k_1+k_2}{4\left(\mu_{11}+\mu_{21}\right)}\left(R^2 - \left(x^2+y^2\right)\right) - \frac{\mu_{12}+\mu_{22}}{\mu_{11}+\mu_{21}}\left(-\frac{c_1c_3+4c_2}{c_1^2J_0\left(\sqrt{c_1}R\right)}J_0\left(\sqrt{c_1\left(x^2+y^2\right)}\right) + \frac{c_1\left(c_2R^2 - c_2\left(x^2+y^2\right) + c_3\right) + 4c_2}{c_1^2}\right), \tag{24}$$

$$u_3^{(2)}(x,y) = -\frac{c_1c_3+4c_2}{c_1^2J_0\left(\sqrt{c_1}R\right)}J_0\left(\sqrt{c_1\left(x^2+y^2\right)}\right) + \frac{c_1\left(c_2R^2 - c_2\left(x^2+y^2\right) + c_3\right) + 4c_2}{c_1^2}. \tag{25}$$

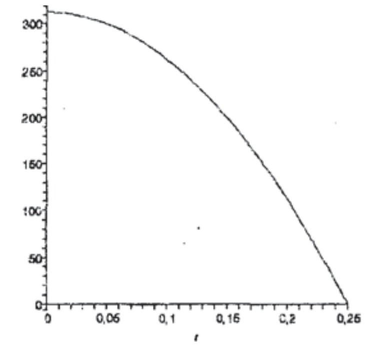
Заметим, что если в уравнениях (2) мы не будем брать в расчет слагаемые, отвечающие за обмен импульсом между различными составляющими рассматриваемой смеси жидкостей (т. е. слагаемые $(-1)^{i+1}a\cdot\left(u_3^{(2)} - u_3^{(1)}\right)$, $i = 1,2$), то решение задачи (12)-(13) также единственно и имеет следующий вид:

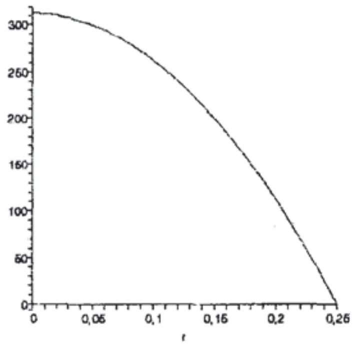
$$u_3^{(1)}(x,y)=\frac{k_1\mu_{22}-k_2\mu_{12}}{4(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21})}\left(R^2-\left(x^2+y^2\right)\right), \qquad (26)$$

$$u_3^{(2)}(x,y)=\frac{k_2\mu_{11}-k_1\mu_{21}}{4(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21})}\left(R^2-\left(x^2+y^2\right)\right). \qquad (27)$$

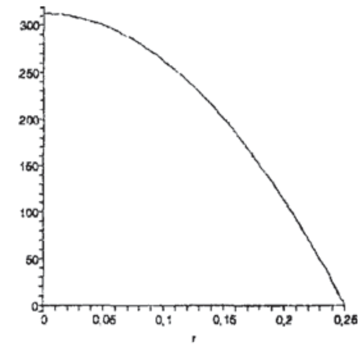
Проведем сравнительный анализ результатов доставляемых предложенной моделью смеси и классической моделью, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе.

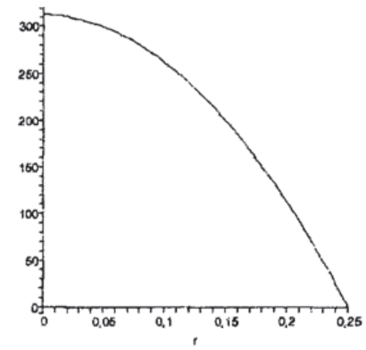
Предположим, что обе компоненты смеси физически неразличимы и их движение в трубе происходит при одинаковых перепадах давлений. В соответствии с этим зададим значения коэффициентов вязкости $\mu_{11}=0.01$, $\mu_{12}=0$, $\mu_{21}=0$, $\mu_{22}=0.01$; значения перепадов давлений – $k_1=200$, $k_2=200$;
радиус трубы – $R=0.25$; $a=3$. Ясно, что картина движения такой смеси ничем не должна отличаться от течения вязкой несжимаемой жидкости с теми же свойствами. Убедимся в этом, построив графики функций $u_3^{(1)}(r)$, $\tilde{u}_3^{(1)}(r)$ соответственно:





и $u_3^{(2)}(r)$, $\tilde{u}_3^{(2)}(r)$ соответственно





Из данных графиков видно, что решения рассматриваемой задачи совпадают:

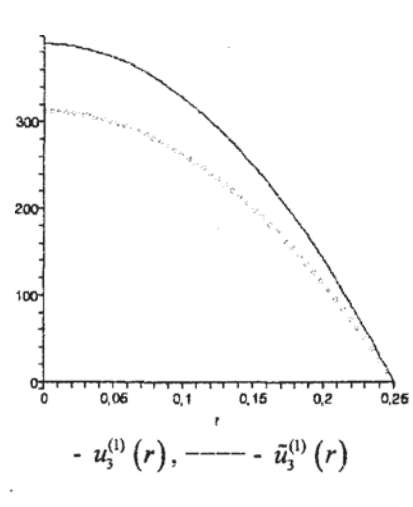
($\max\limits_{0<r<R}\left|u_3^{(1)}(r)-\tilde{u}_3^{(1)}(r)\right|=0$,

$\max\limits_{0<r<R}\left|u_3^{(2)}(r)-\tilde{u}_3^{(2)}(r)\right|=0$,

$\max\limits_{0<r<R}\left|u_3^{(1)}(r)-u_3^{(2)}(r)\right|=0$,

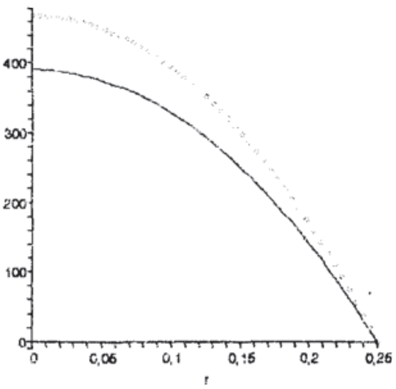
$\max\limits_{0<r<R}\left|\tilde{u}_3^{(1)}(r)-\tilde{u}_3^{(2)}(r)\right|=0$), что соответствует действительности. Очевидно, что никакого обмена импульсом между составляющими такой смеси в этом случае не происходит.

Однако, если обе компоненты имеют одну и ту же физическую структуру, но их движение обусловлено разными перепадами давлений, то учет слагаемых, отвечающих за обмен импульсом между составляющими рассматриваемой смеси, существенно влияет на результаты. В связи с этим при тех же значениях параметров, изменив только $k_2=190$, снова построим графики функций $u_3^{(1)}(r)$, $\tilde{u}_3^{(1)}(r)$



- $u_3^{(1)}(r)$, ------ - $\tilde{u}_3^{(1)}(r)$

и $u_3^{(2)}(r)$, $\tilde{u}_3^{(2)}(r)$



- $u_3^{(2)}$, ——— - $\tilde{u}_3^{(2)}$

Видно, что в этом случае решения $u_3^{(1)}(r)$, $\tilde{u}_3^{(1)}(r)$ и $u_3^{(2)}(r)$, $\tilde{u}_3^{(2)}(r)$ отличаются друг от друга:

$$\max_{0<r<R}\left|u_3^{(1)}(r)-\tilde{u}_3^{(1)}(r)\right| = 78.0417,$$

$$\max_{0<r<R}\left|u_3^{(2)}(r)-\tilde{u}_3^{(2)}(r)\right| = 78.0417.$$

А т. к. $\max\limits_{0<r<R}\left|u_3^{(1)}(r)-u_3^{(2)}(r)\right| = 156.25$ и $\max\limits_{0<r<R}\left|\tilde{u}_3^{(1)}(r)-\tilde{u}_3^{(2)}(r)\right| = 0.17$, то можно сделать вывод, что между составляющими рассматриваемой смеси происходит обмен импульсом, обусловленный различными перепадами давлений компонент смеси, даже если эти компоненты одинаковы и что решения $\tilde{u}_3^{(1)}(r)$, $\tilde{u}_3^{(2)}(r)$ этот обмен импульсом практически не учитывают (что и предполагалось выше).

Таким образом, в рассматриваемой модели смеси слагаемые, ответственные за обмен импульсом между ее составляющими, способны существенно влиять на физическую картину течения.

В заключение покажем, что для рассматриваемой модели смеси сохраняются качественные зависимости, хорошо известные для классической модели, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе.

Заметим, что максимальная скорость каждой из компонент смеси жидкостей достигается на оси трубы при $r=0$, причем:

$$u_{\max}^{(1)} = \frac{R^2}{4}\cdot\frac{k_1+k_2}{\mu_{11}+\mu_{21}} - \frac{\mu_{12}+\mu_{22}}{\mu_{11}+\mu_{21}}u_{\max}^{(2)}, \qquad (28)$$

$$u_{\max}^{(2)} = \frac{c_1\left(c_2R^2+c_3\right)+4c_2}{c_1^2} - \frac{c_1c_3+4c_2}{J_0\left(\sqrt{c_1}R\right)c_1^2}. \qquad (29)$$

Пусть $\mu_{11}=\mu_{22}$, $\mu_{12}=0$, $\mu_{21}=0$. Тогда максимальная скорость всей смеси в этом случае будет равна:

$$u_{\max} = u_{\max}^{(1)} + u_{\max}^{(2)} = \frac{kR^2}{4\mu_{11}}, \qquad (30)$$

где $k=k_1+k_2$ – перепад давлений вдоль оси трубы для всей смеси жидкостей. Напомним, что максимальная скорость течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе также имеет вид (30) (см. [5]).

Подсчитаем теперь объемный расход i-ой компоненты смеси жидкостей Q_i, т. е. объем i-ой компоненты смеси жидкостей, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени.

Имеем:

$$Q_1 = 2\pi\int_0^R u_3^{(1)}(r)rdr = \frac{2\pi R^2\left(c_1^2k_1R^2+c_1^2k_2R^2-4\mu_{22}c_1c_2R^2-4\mu_{22}c_1c_3-16\mu_{22}c_2-4\mu_{12}c_1c_2R^2-4\mu_{12}c_1c_3-16\mu_{12}c_2\right)}{8c_1^2\left(\mu_{11}+\mu_{21}\right)} -$$

$$-\frac{2\pi R^4\left(k_1c_1-4\mu_{12}c_2+k_2c_1-4\mu_{22}c_2\right)}{16c_1\left(\mu_{11}+\mu_{21}\right)} + \frac{2\pi R\left(c_1c_3+4c_2\right)\left(\mu_{12}+\mu_{22}\right)J_1\left(R\sqrt{c_1}\right)}{c_1^{5/2}\left(\mu_{11}+\mu_{21}\right)J_0\left(R\sqrt{c_1}\right)}, \qquad (31)$$

$$Q_2 = 2\pi\int_0^R u_3^{(2)}(r)rdr = \frac{2\pi R^2\left(c_1c_2R^2+c_1c_3+4c_2\right)}{2c_1^2} - \frac{2\pi R^4c_2}{4c_1} - \frac{2\pi R\left(c_1c_3+4c_2\right)J_1\left(R\sqrt{c_1}\right)}{c_1^{5/2}J_0\left(R\sqrt{c_1}\right)}. \qquad (32)$$

Тогда, средняя скорость течения смеси жидкостей в круглой трубе будет равна:

$$u_{cp} = \frac{Q_1+Q_2}{\pi R^2}. \qquad (33)$$

Снова возьмем:

$\mu_{11}=\mu_{22}$, $\mu_{12}=0$, $\mu_{21}=0$,

получим: $u_{cp} = \dfrac{kR^2}{8\mu_{11}} = \dfrac{u_{\max}}{2}$. (34)

Заметим, что формула для определения средней скорости течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе аналогична (34) [5].

Таким образом, в случае, когда обе составляющие смеси одинаковы, можно сделать вывод о том, что основные характеристики движения такой смеси в цилиндрической трубе совпадают с аналогичными характеристиками движения вязкой несжимаемой жидкости в этой же трубе.

Литература

1. Frehse, J. A Stokes-like system for mixtures / J. Frehse, S. Goj, J. Málek // Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics II. International Mathematical Series. – London, 2002.

2. Rajagopal, K. R. An introduction to mixture theory / K. R. Rajagopal // In Mathematical theory in fluid mechanics. – Harlow, 1996.

3. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант // Мир. – 1964. – 319 с.

4. Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон // ИЛ. – 1949. – Т. 1, 2.

5. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1970. – Т. 1, 2.