Главная страница содержит общие сведения о кафедре и новостях.

Ссылки на внешние ресурсы ведут на официальный сайт КемГУ и сайт математического факультета.

Главное меню расположено слева и содержит в себе следующие пункты:

- *о кафедре*: история создания и важнейшие этапы в жизни кафедры;
- *состав кафедры*: открывает страницу ссылок на персональные страницы штатных сотрудников;
- *научная деятельность*: включает список специальностей аспирантуры, перечень направлений научной работы;
- *учебная деятельность*: содержит перечень дисциплин кафедры по каждому из факультетов, на которых ведутся занятия;
- *методический семинар*: здесь представлен план работ научно-методического семинара кафедры на текущий учебный год;
- *студентам*: полезная информация для студентов, объявления, требования курсовых и дипломных работ;
- *лаборатория*: содержит информацию о лаборатории, организованной при кафедре;
- *научные труды*: список научных трудов, общий для всей кафедры;
- *достижения кафедры*: патенты, полученные по результатам научных исследований и прочие достижения.

Меню пользователя – горизонтальное меню, расположенное в верхней части экрана. Этот управляющий элемент включает разделы, приведенные ниже:

- *главная страница: ссылка для возврата на главную страницу из любого места сайта;*
- *новости: динамически обновляемая колонка наиболее важных кафедральных событий;*
- *контакты: контактная информация;*
- *архив: содержит архив новостей;*
- *e-mail: форма для отправки электронных сообщений на почтовый ящик администратора сайта;*
- *авторы: информация и фото авторов сайта;*
- *гостевая книга: предназначена для отзывов посетителей.*

Проект сайта кафедры несет в себе двойную смысловую нагрузку. Во-первых, это средство приложения полученных теоретических знаний по языкам PHP и SQL. Во-вторых, грамотно сделанный сайт послужит информационным ресурсом кафедральной деятельности и позволит разместить нужную информацию в сети Интернет.

Литература

1. Кузнецов, М. PHP 5. Практика создания Web-сайтов / М. Кузнецов. – Петербург, 2005. – 952 с.
2. Кузнецов, М. Введение в PHP 5 / М. Кузнецов. – Петербург, 2005. – 924 с.
3. Мальчук, Е. HTML и CSS: самоучитель / Е. Мальчук. – С-Петербург: Вильямс, 2007. – 408 с.
4. http://ru2.php.net/.
5. http://phpclub.ru.
6. http://softtime.ru.

УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИКЕ В ЦЕЛОМ БЫСТРО ОСЦИЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В. А. Шалаумов

В работе на примере задачи Дирихле, сингулярно зависящей от малого параметра, предлагается метод построения асимптотических разложений в целом для быстро осцилирующих решений

В работе [1] предложен метод построения асимптотических разложений решений краевых задач, сингулярно зависящих от малого параметра в целом – на всей области задания краевой задачи. В отличие от широко известного метода пограничного слоя, имеющего принципиально локальный характер, этот метод позволяет, в частности, изучать асимптотическое поведение экспоненциально малых решений, их производных и их логарифмических производных. В данной статье этот приём распространяется на быстро осцилирующие решения одной задачи Дирихле.

Пусть $y = y(x,\varepsilon)$ – классическое решение краевой задачи:

$$\begin{cases} L^{\varepsilon}[y]=\varepsilon^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\gamma^2(x)y=0, \\ y(a,\varepsilon)=\alpha, \quad y(b,\varepsilon)=0; \quad a\le x\le b, \quad \gamma(x)\ge\gamma_0>0. \end{cases} \tag{1}$$

Так же как в [1], представим решение (1) в виде:

$$y = e^{-P_0}\sum_{k=0}^{+\infty}(R_{2k}+R_{2k+1}e^{-P_1})e^{-k(P_1+P_2)}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1). Если положить (см. (14) из [1]):

$P_0' = P_0'(x,\varepsilon) = \dfrac{\gamma(x)}{\varepsilon} \equiv i\dfrac{\gamma}{\varepsilon}, P_0(a,\varepsilon) = 0;$

$P_1' = -2P_0', P_1(b,\varepsilon) = 0;\quad P_2 = P_2(x,\varepsilon) = 2P_0(x,\varepsilon)$,

i – мнимая единица, то функции $R_k = R_k(x,\varepsilon)$ удовлетворяют следующей рекуррентной системе краевых задач (с одним краевым условием):

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[R_{2k}] \equiv \varepsilon\dfrac{d^2R_{2k}}{dx^2} - i2\gamma\dfrac{dR_{2k}}{dx} - \gamma' iR_{2k} = 0, \\ R_0(a,\varepsilon) = \alpha, \quad R_{2k}(a,\varepsilon) = -R_{2k-1}(a,\varepsilon), \quad k = 1,2,\ldots . \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[R_{2k+1}] \equiv \varepsilon\dfrac{d^2R_{2k+1}}{dx^2} + i2\gamma\dfrac{dR_{2k+1}}{dx} + \gamma' iR_{2k+1} = 0, \\ R_{2k+1}(b,\varepsilon) = -R_{2k}(b,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots . \end{cases} \tag{4}$$

Краевые условия в (3), (4) найдены из следующих соображений: граничное условия для R_k находим последовательно (учитывая то , что $P_0(a,\varepsilon) = 0, P_1(b,\varepsilon) = 0, P_2(a,\varepsilon) = 0,$

$\delta = y(a,\varepsilon) =$

$= \exp\{-P_0(a,\varepsilon)\}(R_0(a,\varepsilon) + \ldots) \;\Rightarrow R_0(a,\varepsilon) = \delta;$

$0 = y(b,\varepsilon) = \exp\{-P_0(b,\varepsilon)\}(R_0(b,\varepsilon) +$

$+\exp\{-P_1(b,\varepsilon)\}R_1(b,\varepsilon)) + \ldots) \;\Rightarrow R_1(b,\varepsilon) = -R_0(b,\varepsilon);$

$\delta = y(a,\varepsilon) = R_0(a,\varepsilon) + \exp\{-P_1(a,\varepsilon)\}[R_1(a,\varepsilon)) +$

$+\exp\{-P_2(a,\varepsilon)\}R_2(a,\varepsilon))] + \ldots) \Rightarrow 0 = R_1(a,\varepsilon)) +$

$+\exp\{-P_2(a,\varepsilon)\}R_2(a,\varepsilon))] \Rightarrow R_2(a,\varepsilon)) = -R_1(a,\varepsilon).$

Абсолютно аналогично:

$R_3(b,\varepsilon) = -R_2(b,\varepsilon), R_4(a,\varepsilon) = -R_3(a,\varepsilon)$ и т. д.

Представим R_k в виде формальных асимптотических рядов $R_k(x,\varepsilon) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \varepsilon^p \varphi_p^k(x)$. Подставляя их в (2), получим:

$$y = e^{-P_0}\sum_{p=0}^{+\infty}\varepsilon^p\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(\varphi_p^{2k} + \varphi_p^{2k+1}e^{-P_1})e^{-k(P_1+P_2)}\Big). \tag{5}$$

Учитывая специальный вид операторов в (3) и (4), процедуру последовательного нахождения φ_k^p представим в виде следующей схемы:

$$L_0[\bullet] = -2\gamma i\frac{d}{dx} - i\gamma';\quad L_1[\,] = 2\gamma i\frac{d}{dx} + i\gamma'. \tag{6}$$

	L_0	L_1	L_0	L_1	… ,
ε^0	φ_0^0	φ_0^1	φ_0^2	φ_0^3	….,
ε^1	φ_1^0	φ_1^1	φ_1^2	φ_1^3	….,
ε^2	φ_2^0	φ_2^1	φ_2^2	φ_2^3	…. .

Из (3), (4) и (6) имеем:

$$\begin{cases} L_0[\varphi_0^0] = 0, \\ \varphi_0^0(a) = \alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} L_1[\varphi_0^1] = 0, \\ \varphi_0^1(b) = -\varphi_0^0(b); \end{cases}$$
$$\begin{cases} L_0[\varphi_0^2] = 0, \\ \varphi_0^2(a) = -\varphi_0^1(a); \end{cases} \quad \begin{cases} L_1[\varphi_0^3] = 0, \\ \varphi_0^3(b) = -\varphi_0^2(b). \end{cases} \tag{7}$$

Так как L_0 [ ] = $-L_1$ [ ] , то отсюда вытекает, что имеет место следующая рекуррентная система краевых задач:

$$\begin{cases} \overline{L}_1[\varphi_0^{2k}] \equiv 2\gamma\dfrac{d\varphi_0^{2k}}{dx} + \gamma'\varphi_0^{2k} = 0, \\ \varphi_0^0(a) = \alpha, \varphi_0^{2k}(a) = -\varphi_0^{2k-1}(a), k = 1,2,\ldots; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \overline{L}_1[\varphi_0^{2k+1}] \equiv 2\gamma\dfrac{d\varphi_0^{2k+1}}{dx} + \gamma'\varphi_0^{2k+1} = 0, \\ \varphi_0^{2k+1}(b) = -\varphi_0^{2k}(b), k = 0,1,2,\ldots . \end{cases} \tag{8}$$

Но тогда:

$$\varphi_0^{2k}(x) = \varphi_0^0(x) = \alpha\sqrt{\frac{\gamma(a)}{\gamma(x)}};\quad \varphi_0^{2k-1}(x) = -\varphi_0^0(x)$$

и, следовательно, нулевое приближение в (5) имеет вид:

$$y = y(x,\varepsilon) = \exp\{-P_0\}[\sum_{k=0}^{+\infty}(\varphi_0^{2k} +$$
$$+\varphi_0^{2k}\cdot exp\{-P_1\})\exp\{-k(P_1+P_2)\}(1+O(\varepsilon))] =$$
$$= \exp\{-P_0\}\varphi_0^0(x)(1-\exp\{-P_1\}).$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\exp\{-k(P_1+P_2)\}(1+O(\varepsilon)) =$$
$$= \varphi_0^0\,\frac{\exp\{-P_0\}(1-\exp\{-P_1\})}{1-\exp\{-(P_1+P_2)\}}$$
$$(1+O(\varepsilon)) \equiv \varphi_0^0 J(1+O(\varepsilon)).$$

Вычислим в явном виде J, учитывая, что:

$$P_0(x) = i\frac{1}{\varepsilon}\int_a^x\gamma(u)du \equiv i\overline{P}_0;$$

$$P_1(x) = i\frac{2}{\varepsilon}\int_x^b\gamma(u)du \equiv i\overline{P}_1;$$

$$P_2(x) = i\frac{2}{\varepsilon}\int_a^x\gamma(u)du \equiv i\overline{P}_2;$$

$$P_1(x) + P_2(x) =$$
$$= i\frac{2}{\varepsilon}\int_a^b\gamma(u)du \equiv i(\overline{P}_1 + \overline{P}_2) = i\overline{P}_1(a) = i\overline{P}_2(b).$$

Имеем:

$$J=\frac{\exp\{-i\overline{P}_0\}(1-\exp\{-i\overline{P}_1\})}{1-\exp\{-i(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\}}=$$

$$=\frac{cos\overline{P}_0-cos(\overline{P}_0+\overline{P}_1)+i(\sin(\overline{P}_0+\overline{P}_1)-\sin\overline{P}_0)}{1-cos(\overline{P}_2+\overline{P}_1)+i\sin(\overline{P}_2+\overline{P}_1)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\overline{P}_1}{2}}{\sin\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}}\cdot\frac{\sin(\overline{P}_0+\frac{\overline{P}_1}{2})+i\cos(\overline{P}_0+\frac{\overline{P}_1}{2})}{\sin\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}+i\cos\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\overline{P}_1}{2}}{\sin\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}}(\cos(\frac{\overline{P}_2}{2}-\overline{P}_0)+i\sin(\frac{\overline{P}_2}{2}-\overline{P}_0))=$$

$$=\frac{\sin\frac{\overline{P}_1}{2}}{\sin\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}}. \qquad (9)$$

Таким образом, в первом приближении:

$$y=y(x,\varepsilon)=\alpha\frac{\sqrt{\gamma(a)}}{\sqrt{\gamma(x)}}\cdot\frac{\sin(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^b\gamma(u)du)}{\sin(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b\gamma(u)du)}\cdot(1+O(\varepsilon)),$$

$$\varepsilon\neq\frac{1}{\pi k}\int_a^b\gamma(u)du,\ k=1,2,3,\ldots. \qquad (10)$$

Отметим, что при x = a это выражение равно α и равно нулю при x = b, что согласуется с краевыми условиями для $y = y(x,\varepsilon)$.

Следующее по порядку приближение для $y = y(x,\varepsilon)$ имеет вид:

$$I_1=\exp(-P_0),$$

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\varphi_1^{2k}+\varphi_1^{2k+1}\bullet\exp\{-P_1\}\right)\exp\{-k(P_1+P_2)\}\right]. \qquad (11)$$

Из (5), (6), (7) и (8) имеем:

$$\begin{cases}L_0\left[\varphi_1^0\right]\equiv-2\gamma i\frac{d\varphi_1^0}{dx}-\gamma' i\varphi_1^0=-(\varphi_0^0)''\equiv-G_0,\\ \varphi_1^0(a)=0;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{L}_1\left[\varphi_1^0\right]\equiv2\gamma\frac{d\varphi_1^0}{dx}+\gamma'\varphi_1^0=-iG_0,\\ \varphi_1^0(a)=0;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi_1^0(x)=-\frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^x\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du=$$

$$=-\frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^b\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du-\frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_b^x\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du.$$

$$\begin{cases}L_1\left[\varphi_1^1\right]\equiv2\gamma i\frac{d\varphi_1^0}{dx}+\gamma' i\varphi_1^0=(\varphi_0^0)''\equiv G_0,\\ \varphi_1^1(b)=-\varphi_1^0(b);\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{L}_1\left[\varphi_1^1\right]\equiv2\gamma\frac{d\varphi_1^1}{dx}+\gamma'\varphi_1^1=-iG_0,\\ \varphi_1^1(b)=-\varphi_1^0(b);\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi_1^1(x)=\frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^b\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du-$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_b^x\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du.$$

Абсолютно аналогично для φ_1^2 и φ_1^3 имеем:

$$\begin{cases}\overline{L}_1\left[\varphi_1^2\right]=-iG_0,\\ \varphi_1^2(a)=-\varphi_1^1(a);\end{cases}\qquad\begin{cases}\overline{L}_1\left[\varphi_1^3\right]=-iG_0,\\ \varphi_1^3(b)=-\varphi_1^2(b).\end{cases}\Rightarrow$$

$$\varphi_1^2(x)=-\frac{2i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^b\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du-\frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_b^x\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du,$$

$$\varphi_1^3(x)=\frac{2i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^b\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du-\frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}.\int_b^x\frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du$$

И так как

$$\begin{cases}\overline{L}_1\left[\varphi_1^{2k}\right]=-iG_0,\\ \varphi_1^{2k}(a)=-\varphi_1^{2k-1}(a);\end{cases}\qquad\begin{cases}\overline{L}_1\left[\varphi_1^{2k+1}\right]=-iG_0,\\ \varphi_1^{2k+1}(b)=-\varphi_1^{2k}(b), k=2,3\ldots\end{cases}$$

то индукцией имеем для k = 2, 3, ...\

$$\varphi_1^{2k}(x) = -\frac{(2k+1)i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^b \frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du - \frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_b^x \frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du \equiv (2k+1)D_0 + D_1;$$

$$\varphi_1^{2k+1}(x) = \frac{(2k+1)i}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^b \frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du - \frac{i}{2\sqrt{\gamma(x)}}.\int_b^x \frac{G_0(u)}{\sqrt{\gamma(u)}}du \equiv -(2k+1)D_0 + D_1.$$

Таким образом для (11) имеем:

$$I_1 = \exp\{-P_0\}(1-\exp\{-P_1\})\cdot D_0\cdot\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\exp\{-k(P_1+P_2)\} + +\exp\{-P_0\}\cdot D_1\cdot(1+\exp\{-P_1\})\sum_{k=0}^{+\infty}\exp\{-k(P_1+P_2)\} =$$

$$= D_0\frac{\exp\{-P_0\}(1-\exp\{-P_1\})}{1-\exp\{-(P_1+P_2)}\times\frac{(1+\exp\{-(P_1+P_2)\})}{(1-\exp\{-(P_1+P_2)\})} + D_1\frac{\exp\{-P_0\}(1+\exp\{-P_1\})}{1-\exp\{-(P_1+P_2)\}} = D_0\cdot I\cdot\frac{(1+\exp\{-i(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\})}{(1-\exp\{-i(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\})} +$$

$$+ D_1\frac{\exp\{-i\overline{P}_0\}(1+\exp\{-i\overline{P}_1\})}{1-\exp\{-i(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\}}.$$

Вычислим выражения, входящие в правую часть последнего равенства.

Учитывая (6) и выражения для $\overline{P}_0, \overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ (см. выше) имеем:

$$D_0\cdot I\cdot\frac{(1+\exp\{-i(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\})}{(1-\exp\{-i(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\})} = -iD_0\cdot I\cdot\frac{\cos\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}}{\sin\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}} = -\frac{\sin\frac{\overline{P}_1}{2}}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^b\frac{G_0}{\sqrt{\gamma}}du\cdot\frac{\cos\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}}{\sin^2\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}};$$

$$D_1\frac{\exp\{-i\overline{P}_0\}(1+\exp\{-i\overline{P}_1\})}{1-\exp\{-i(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\}} = D_1\frac{\cos\overline{P}_0+\cos(\overline{P}_0+\overline{P}_1)-i(\sin\overline{P}_0+\sin(\overline{P}_0+\overline{P}_1))}{1-\cos(\overline{P}_1+\overline{P}_2)+i\sin(\overline{P}_1+\overline{P}_2)} =$$

$$= D_1\cdot\frac{\cos\frac{\overline{P}_1}{2}}{\sin\frac{(\overline{P}_1+\overline{P}_2)}{2}}\times\frac{\cos(\overline{P}_0+\frac{\overline{P}_1}{2})-i\sin(\overline{P}_0+\frac{\overline{P}_1}{2})}{\sin\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}+i\cos\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}} = D_1\cdot\frac{\cos\frac{\overline{P}_1}{2}}{\sin\frac{(\overline{P}_1+\overline{P}_2)}{2}}(\sin(\frac{\overline{P}_2}{2}-\overline{P}_0)-i\cos(\frac{\overline{P}_2}{2}-\overline{P}_0)) =$$

$$= -i\cdot D_1\cdot\frac{\cos\frac{\overline{P}_1}{2}}{\sin\frac{(\overline{P}_1+\overline{P}_2)}{2}} = -\frac{\cos\frac{\overline{P}_1}{2}}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_b^x\frac{G_0}{\sqrt{\gamma}}du\frac{1}{\sin\frac{\overline{P}_1+\overline{P}_2}{2}}.$$

Окончательно для второго приближения имеем:

$$I_1 = -\frac{\sin(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^b\gamma(u)du)}{2\sqrt{\gamma(x)}}\cdot\int_a^b\frac{G_0}{\sqrt{\gamma}}du\cdot\frac{\cos(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b\gamma(u)du)}{\sin^2(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b\gamma(u)du)} - \frac{\cos(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^b\gamma(u)du)}{2\sqrt{\gamma(x)}}\cdot\int_b^x\frac{G_0}{\sqrt{\gamma}}du\frac{1}{\sin(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b\gamma(u)du)}.$$

Отметим, что это выражение равно нулю как при x = a ,так и при x = b.

Последующие приближения можно также выписывать в явном виде используя Леммы 3.4. § 2 из [1].

Литература

1. Шалаумов, В. А. Об одном преобразовании линейного дифференциального оператора второго порядка / В. А. Шалаумов // Вестник КемГУ. – 2005. – № 4. – С. 169 – 174.