где $\omega^{(1)},...,\omega^{(k_1^3)}$ – полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $K^1\omega = 0$;

(б) имеет место равенство:

$$k_3 - k_3^1 = -\frac{1}{\pi}\left[\arg\ \det\ S_0^k(t)\right]_\Gamma, \qquad (2.25)$$

где символ [ ] обозначает приращение выражения, заключенного в скобки, при обходе контура Γ один раз в положительном направлении. На основании этих утверждений докажем следующую теорему.

Теорема

Пусть матрица $G(t)$ граничного условия удовлетворяет условию (2.17) и для $S_0(t),...,S_{-k}(t)$ выполнено условие $k, k \geq 1$. Тогда задача Р Нетерова и ее индекс $\aleph$ вычисляется по формуле:

$$\aleph = n - \frac{1}{\pi}\left[\arg\ \det\ S_0^k(t)\right]_\Gamma. \qquad (*)$$

В случае $k = 1$ в формулировке «условия k» участвуют только матрицы $G(t_0)$ и $S_{-1}(t_0)$, где:

$$S_{-1}(t_0) = -G(t_0)M(t_0), \quad M = \{M_{ij}\}_{i,j=1}^n,$$

$$M_{ij}(t_0) = \overline{A_{ij}(t_0)}\left(\overline{q_i(t_0)}q_j(t_0) - 1\right)^{-1}\left(1 + q_j(t_0)\frac{\overline{t'(s_0)}}{t'(s_0)}\right).$$

Литература

1. Боярский, Б. В. Теория обобщенного аналитического вектора / Б. В. Боярский // Annales polonici mathematici. – 1966. – XVII.
2. Боярский, Б. В. Общее представление решений эллиптической системы 2 *n* уравнений на плоскости / Б. В. Боярский // ДАН СССР. – 1958. – 122 (4).
3. Боярский, Б. В. Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа на плоскости / Б. В. Боярский // ДАН СССР – 1959. – 124 (1).
4. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М.: Физматгиз, 1959.
5. Сакс, Р. С. Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений / Р. С. Сакс // Дифференциальные уравнения. – Т. V. – Вып. 1. – 1969.
6. Сакс, Р. С. О задаче Дирихле для одного класса эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка / Р. С. Сакс // Дифференциальные уравнения. – Т. VI. – Вып. 1. – 1970.
7. Товмасян, Н. Е. К теории общих линейных краевых задач для эллиптических систем / Н. Е. Товмасян // Сиб. мат. журнал. – 1967. – Т. VIII. – Вып. 5.
8. Петровский, И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: Наука, 1965.
9. Товмасян, Н. Е. К теории сингулярных интегральных уравнений / Н. Е. Товмасян // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. III. – Вып. 1.

УДК 534.327 : 517.972.6/534.327

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА, МОДЕЛИРУЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

Н. А. Кучер, О. В. Малышенко

I. Математическая постановка задачи в локальной форме

С физической точки зрения задача, которая является здесь объектом исследования, касается стационарного движения несжимаемой однородной жидкости через изотропную однородную пористую среду, разделяющую два резервуара с жидкостью различных уровней. Слева среда ограничена наклонной стенкой, а справа – вертикальной стенкой, основание является горизонтальным и непроницаемым (рис. 1).

Поток предполагается двумерным, т. е. картина течения одинакова во всех поперечных сечениях.

Далее, мы пока ограничимся простым случаем, предположив, что слева стенка прямолинейна и угол между нею и основанием острый $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$. Входными данными этой задачи будут следующие числа (рис. 1): a, b, y_1, y_2, a_1, причем:

$$0 < a_1 < a;\ \ 0 < y_2 < y_1 < b;\ arctg\frac{y_1}{a_1} < \frac{\pi}{2}.$$

Обозначим через Ω область течения (которая неизвестна в данной задаче), а через $\widehat{FC_\varphi}$ – свободную поверхность, представляющую собой график функции $y = \varphi(x)$; $\overline{CC_\varphi}$ – промежуток высачивания; через u обозначим пьезометрический напор (данная функция еще одна неизвестная задачи), а через v – функцию тока.

Для того чтобы сформулировать математическую задачу, соответствующую вышеупомянутой физической задаче, введем некоторые функциональные пространства.

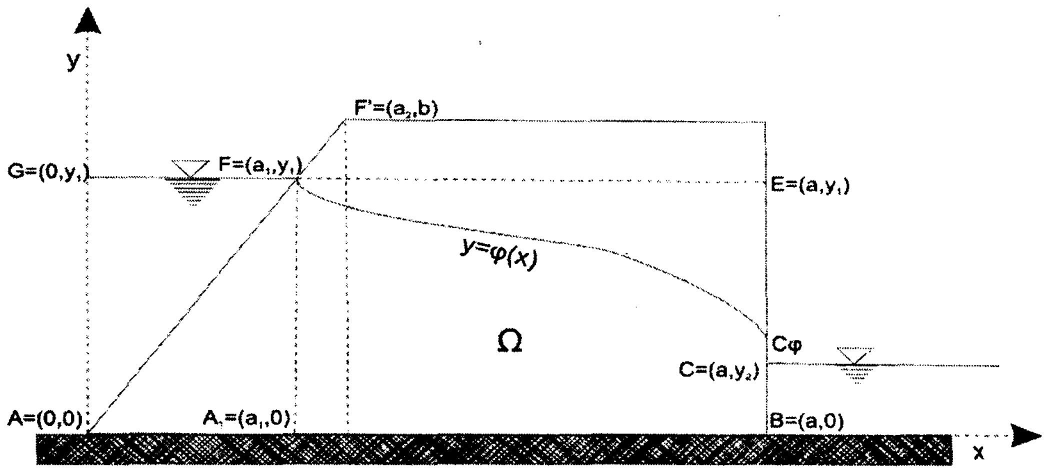

Рис. 1. **Вертикальное сечение плотины**

Если Ω – открытое ограниченное множество в R^2, то $C^k(\bar{\Omega})$ ($\bar{\Omega}$ – замыкание Ω), $k=0,1,...,\infty$ обозначает пространство функций, определенных и ограниченных в $\bar{\Omega}$, а также имеющих непрерывные частные производные до порядка k включительно. (Если $k=0$ или $k=\infty$, то получаем соответственно пространство непрерывных функций и пространство бесконечно дифференцируемых функций.)

Обозначим через $D(\Omega)$ пространство функций из $C^\infty(\Omega)$, равных нулю в окрестности $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ граница Ω).

Как обычно, $L^p(\Omega)$ ($1<p<+\infty$) – пространство действительных функций, определенных почти всюду на Ω, измеримых и суммируемых на Ω со степенью p.

$W^{k,p}(\Omega)$ ($k=1,2,...;\ 1<p<+\infty$) обозначает пространство С. Л. Соболева:

$\left\{f \in L^p(\Omega):\ D^k f \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \le k\right\}$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}},\quad |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2.$$

Как обычно для $p=2$ будем использовать запись $W^{k,2}(\Omega)=H^k(\Omega)$. Через D обозначим открытый четырехугольник с вершинами $ABEF$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача I. Найти $\{\varphi,\Omega,u,v\}$ такие, что:

Ω – открытое подмножество в D. (1)

$$\begin{cases}\varphi \in C^0([a_1,a]);\\ \varphi(a_1)=y_1;\ \varphi(a)\ge y_2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi(x)\text{ - строго убывающая функция на }[a_1,a];\\ \text{график }\varphi\text{ на }[a_1,a]\text{ задает множество: }\partial\Omega-\partial D.\end{cases}\quad (2)$$

$$u,v \in H^1(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega});\quad (3)$$

$$-v_y+u_x=0,\quad v_x+u_y=0 \text{ в } \Omega;\quad (4)$$

$$\begin{aligned}&u=y_1 \text{ на } \overline{AF};\ u=y_2 \text{ на } \overline{BC};\\ &u=y \text{ на } \widehat{FC_\varphi} \text{ и на } \overline{CC_\varphi};\end{aligned}\quad (5)$$

$$v=0 \text{ на } \widehat{FC_\varphi};\quad v=q \text{ на } \overline{AB}.\quad (6)$$

Замечание 1. Физический смысл величины q в условии (6) – это «расход» жидкости.

II. Редукция задачи I к вариационному неравенству

Метод исследования задачи I основан на работах Байокки [1], [2], и основная идея его заключается в подходящей замене неизвестных функций u,v. Именно продолжим функции u,v на всю область D, полагая:

$$\tilde{u}(x,y)=\begin{cases}u(x,y) & \text{в } \bar{\Omega}\\ y & \text{в } \bar{D}\setminus\bar{\Omega}\end{cases}\quad \tilde{v}(x,y)=\begin{cases}v(x,y) & \text{в } \bar{\Omega}\\ 0 & \text{в } \bar{D}\setminus\bar{\Omega}\end{cases}.\quad (7)$$

В силу (3) мы имеем:

$$-\tilde{v}_y+\tilde{u}_x=0,\quad \tilde{v}_x+\tilde{u}_y=X_{D\setminus\Omega} \text{ в } D,\quad (8)$$

где $X_{D\setminus\Omega}$ обозначает характеристическую функцию множества $D\setminus\bar{\Omega}$. Из (8) вытекает, что форма $-\tilde{v}dx+(y-\tilde{u})dy$ является точной, т. е. в D можно определить однозначную функцию $w(x,y)$ по формуле:

$$w(p)=\int_{\widehat{FP}}(-\tilde{v}dx+(y-\tilde{u})dy),\quad (9)$$

где $\widehat{FP}$ – произвольный путь в D, идущий от точки F до произвольной точки $P\in D$.

Введем следующие обозначения:

$\Gamma_N=]AF[$ и $\Gamma_D=\partial D-[AF]$ и будем рассматривать Γ_N и Γ_D как дуги кривой ∂D, ориентированной против часовой стрелки; $\bar{\Gamma}_N$ и $\bar{\Gamma}_D$ будут обозначать соответствующие замкнутые дуги.

Терема 1. Если $\{\varphi,\Omega,u,v\}$ – решение задачи I, то функция w, определенная по формуле (9), удовлетворяет следующим свойствам:

$$w \in C^1(\bar{D})\cap H^2(D),\quad (10)$$

$$w=0 \text{ на } D-\Omega;\quad w>0 \text{ в } \Omega,\quad (11)$$

$$\Delta w = X_\Omega \text{ в D},\quad (12)$$

$$w_y=y-y_1 \text{ на } \overline{AF},\quad (13)$$

$$w = g_q \text{ на } \overline{\Gamma}_D , \tag{14}$$

где функция g_q определяется по формуле:

$$g_q = \begin{cases} -q(x-a) + \frac{1}{2} y_2 & \text{на } [AB] \\ \frac{1}{2}(y_2 - y)^2 & \text{на } [BC] \\ 0 & \text{на } \overline{CC_\varphi} + \overline{CE} + \overline{EF} \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. Свойство (10) следует из (3) и формул (7) и (8). Ясно, что $w = 0$ в $D - \Omega$, а для доказательства неравенства $w > 0$ в Ω заметим, что функцию w можно вычислить с помощью формулы:

$$w(x, y) = \int_y^{y_1} [\tilde{u}(x,t) - t] dt, \quad (x, y) \in \bar{D}.$$

В частности, если $(x, y) \in \Omega$, то

$$w(x, y) = \int_y^{\varphi(x)} [u(x,t) - t] dt. \tag{16}$$

Мы имеем: $\Delta u = 0$ в Ω,

$u = y_1$ на $\overline{AF}$, $u = y_2$ на $\overline{BC}$;

$u = y$ на $\widehat{FC_\varphi}$ и на $\widehat{C_\varphi C}$; $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на AB. В силу принципа максимума, непрерывная на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$ и гармоническая в Ω функция $u(x, y)$ не может достигать своего максимума на участке границы $\overline{AB}$, а на оставшейся части границы $\partial\Omega$ области Ω удовлетворяет условию $u \geq y$. Тогда в Ω имеет место неравенство $u > y$. Тем самым доказано неравенство: $w > 0$ в Ω. Из формулы (9) следует, что

$$w_x = -\tilde{v}, \quad w_y = y - \tilde{u} \tag{17}$$

и поэтому $\Delta w = 1 - X_{D\setminus\Omega} = X_\Omega$ в D. Из (17) также следует соотношение (13) и (14).

Замечание 2. Если найдена функция w, то можно определить все неизвестные задачи I по формулам:

$$\Omega = \{(x, y): \ w(x, y) > 0\};$$

$$\varphi(x) = \max\{y, (x, y) \in \bar{\Omega}\}; \tag{18}$$

$$u = y - w_y; \quad v = -w_x \quad \text{на } \Omega . \tag{19}$$

Определим непустое замкнутое выпуклое множество в $H^1(D)$

$$K_q = \{v \in H^1(D): \ v = g_q \ \text{на } \Gamma_D\}. \tag{20}$$

Функция, определенная в (9), является решением следующего вариационного неравенства.

Задача P. Найти $w \in K_q$,

$$a(w, v - w) + \psi(v) - \psi(w) + (f, v - w) \geq 0 \tag{21}$$

$\forall\, v \in K_q$,

где $(u, v) \to a(u, v)$ – билинейная форма на $H^1(D) \times H^1(D)$:

$$a(u,v) = \int_D \left\{ \nabla u \nabla v + \frac{y_1}{a_1}\left[u_x v_y - u_y v_x\right] \right\} dy dx ,$$

$\psi(v) = \frac{1}{2}\int_D |v| \, dx dy$ – выпуклый функционал на $H^1(D)$, $(f, v) = \frac{y_1^2 + a_1^2}{y_1 a_1} \int_D (y - y_1) v dy + \frac{1}{2}\int_D v \, dx dy$ – линейный непрерывный функционал на $H^1(D)$.

Задачу P удобно преобразовать так, чтобы краевое условие на участке Γ_D стало однородным. Именно, рассмотрим в D гладкую функцию $G(x, y)$:

$$G(x, y) = (a - x) h_1(y) + \frac{x}{a} h_2(y) ,$$

$$h_1(y) = q + \frac{y_2^2}{2a} - \left(\frac{q}{y_1} + \frac{y_2^2}{2 a y_1} \right) y ,$$

$$h_2(y) = \begin{cases} \frac{(y_2 - y)^2}{2}, & 0 \leq y \leq y_2 \\ 0 & , \ y \geq y_2 \end{cases} .$$

Поскольку $G(x, y)|_{\Gamma_D} = g_q$, то $K_q = K_0 + G$, где

$$K_0 = V_0 = \{ v \in H^1(D): \ v|_{\Gamma_D} = 0 \}.$$

Тем самым задача P эквивалентна следующей.

Задача P_0.

$\omega \in V_0$,

$$a(\omega, v - \omega) + j(v) - j(\omega) + (\tilde{f}, v - \omega) \geq 0 \tag{22}$$

$\forall\, v \in V_0$.

Здесь $j(v) = \psi(v + G), \ v \in V_0$,

$(\tilde{f}, v) = a(G, v) + (f, v), \ v \in V_0$.

Преимуществом задачи P_0 является то обстоятельство, что множество V_0 линейное. Задачу построения численного алгоритма решения вариационного неравенства (22) осложняет факт несимметричности формы $a(u, v)$. По этой причине рассмотрим следующую бесконечномерную аппроксимацию неравенства (22).

Пусть $\omega \in V_0$ – заданный элемент, а $z \in V_0$ есть решение следующего вариационного неравенства:

$$b(z, v - z) + \rho(j(v) - j(z)) \geq b(\omega, v - z) -$$
$$-\rho[a(\omega, v - z) - (\tilde{f}, v - z)], \forall\ v \in V_0,$$

где $b(u, v)$ – симметричная форма, причем функция $v \to \sqrt{b(v, v)}$ задает норму в V_0, а $\rho > 0$ – некоторый параметр.

Так как неравенство (23) имеет и притом единственное решение, то тем самым определен оператор: $z = S(\omega) \quad (S: V_0 \to V_0)$. (24)

Очевидно, неподвижная точка этого оператора является решением задачи P. Кроме того, параметр $\rho > 0$ может быть выбран так, что оператор S в (24) является оператором сжатия. Условимся, параметр $\rho > 0$ фиксировать так, чтобы свойство сжатия выполнялось.

В таком случае неподвижная точка $\omega_* \in V_0$ оператора S является в V_0 пределом последовательных приближений $\{\omega_n\}$, $\omega_{n+1} = S(\omega_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, $\omega_0 \in V_0$ – произвольный элемент. Другими словами, нахождение такого решения неравенства (23) с любой наперед заданной степенью точности сводится к решению последовательности неравенств:

$$\omega_n \in V_0,$$

$$b(\omega_{n+1}, v-\omega_{n+1}) + \rho(j(v) - j(\omega_{n+1})) \geq b(\omega_n, v-\omega_{n+1}) - \\ -\rho[a(\omega_n, v-\omega_{n+1}) - (\tilde{f}, v-\omega_{n+1})], \forall\, v \in V_0, \quad (25)$$

Для дальнейшего изложения, удобно сформулировать модельную задачу, соответствующую задаче (25).

Задача М.

$$\omega \in V_0,$$

$$b(\omega, v-\omega) + \rho(j(v) - j(\omega)) \geq (g, v-\omega), \quad \forall\, v \in V_0. \quad (26)$$

Недифференцируемый, собственно выпуклый функционал $v \to j(v)$ мы приблизим однопараметрическим семейством дифференцируемых функционалов:

$$j_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_D \sqrt{(v+G)^2 + \varepsilon^2}\,dxdy\,. \quad (27)$$

Имеют место следующие свойства:

a) $j_\varepsilon(v) \to j(v)$ при $\varepsilon \to 0$, $\forall\, v \in V_0$,

b) Если $\omega_\varepsilon \to \omega$ слабо в V_0, то

$$\inf \lim_{\varepsilon \to 0} j(\omega_\varepsilon) \geq j(\omega)\,. \quad (28)$$

Рассмотрим следующую регуляризацию неравенства (26).

Задача M_ε.

Найти $\omega_\varepsilon \in V_0$ так, что

$$b(\omega_\varepsilon, v-\omega_\varepsilon) + \rho(j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(\omega_\varepsilon)) \geq (g, v-\omega_\varepsilon), \quad \forall\, v \in V_0. \quad (29)$$

В силу свойств (28) справедливо следующее утверждение.

Последовательность ω_ε решений неравенств (29) при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится в V_0 к решению $\omega \in V_0$ задачи М.

Далее. Поскольку множество V_0 линейное, неравенство (29), как известно [3], эквивалентно уравнению: $\omega \in V_0$,

$$b(\omega_\varepsilon, \sigma) + \rho\langle j'_\varepsilon(\omega_\varepsilon), \sigma\rangle = (g, \sigma), \quad \forall\, \sigma \in V_0, \quad (30)$$

где $$\langle j'_\varepsilon(\omega_\varepsilon), \sigma\rangle = \frac{1}{2}\int_D \frac{\omega_\varepsilon + G}{\sqrt{(\omega_\varepsilon + G)^2 + \varepsilon^2}}\,\sigma\,dxdy \quad (31)$$

В основе алгоритма численного решения задачи P_0 лежит уравнение (30), для отыскания приближенного решения которого используется метод внешних аппроксимаций. Написана программа, решения получившихся конечно разностных уравнений, проведена серия тестовых расчетов.

Литература

1. Baiocchi, C. Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides a travers des milieux poreux, / C. Baiocchi // C. R. Acad. Sc. – Paris, 1971. – P. 1215 – 1217.

2. Baiocchi, C. Su un problema di frontiera libra connesso a questioni di idraulica / C. Baiocchi // Ann. di. Mat. pura e appl. № 92. – 1972. – P. 107 – 127.

3. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Ж. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Р. Тремольер. – М: Мир, 1979. – 576 с.