МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Н. А. Кучер

Пусть D – ограниченная односвязная область комплексной плоскости $z=x+iy$ с границей Γ, причем точка $z=0\in D$.

Через $H(\overline{D})$, $\overline{D}=D+\Gamma$ $(H(\Gamma))$ мы обозначаем класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера на $\overline{D}$ (на Γ). По определению комплекснозначная функция $w(z)$ принадлежит классу $H_k(\overline{D})$, если все ее производные до порядка k включительно принадлежат классу $H(\overline{D})$.

Аналогично определяются классы $H_k(\Gamma)$.

В данной заметке рассматривается следующая задача Римана-Гильберта (задача Р).

Найти непрерывно дифференцируемое в D решение эллиптической системы:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}-Q(z)\frac{\partial w}{\partial z}-A(z)\overline{w}=0, \tag{1}$$

принадлежащее классу $H(D)$ и удовлетворяющее граничному условию:

$$\operatorname{Re}\left[\overline{G(t)}w(t)\right]=f(t),\quad t\in\Gamma. \tag{2}$$

Здесь $Q(z)=\{q_1(z),...,q_n(z)\}$ – диагональная комплекснозначная матрица размерности $n\times n$ класса $H_{2k-1}(\overline{D})$, $k\geq 1$, причем все функции $q_i(z)$ удовлетворяют неравенству:

$$|q_i(z)|\leq q_0<1,\quad z\in\overline{D},\quad q_0=const,\quad i=1,...,n., \tag{3}$$

которое является комплексной записью условия эллиптичности системы (1);

$A(z)-n\times n$ – матрица класса $H_{3k-1}(\overline{D})$;

$G(t)$ – заданная на Γ комплекснозначная матрица размерности $n\times n$, принадлежащая классу $H_{2k}(\Gamma)$.

Действительный вектор $f=(f_1,...,f_n)\in H_{k+1}(\Gamma)$ также задан на Γ и $\Gamma\in H_{3k}$.

Б. В. Боярским в [1], [3] было установлено, что если $\det G(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$, то условия эллиптичности (3) достаточно для нетеровости задачи Р.

Целью настоящей работы является исследование разрешимости задачи (1), (2) в случае, когда матрица $G(t)$, фигурирующая в граничном условии (2), вырождена. Как показывают простые примеры, одно только условие эллиптичности уже не обеспечивает нетеровость задачи. Ниже будет показано, что решающую роль здесь играют свойства матрицы A(z). При этом существенно используются результаты Н. Е. Товмасяна [9] и Р. С. Сакса [5], [6] по системам сингулярных интегральных уравнений, не являющихся системами нормального типа.

§ 1. Сведение задачи (1), (2) к системе сингулярных интегральных уравнений

Как известно [1], система дифференциальных уравнений (1) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений типа Фредгольма:

$$w(z)+\frac{1}{\pi}\iint_D V(t,z)A(t)\overline{w(t)}dD_t=\Phi(z), \tag{1.1}$$

где $\Phi(z)-Q$ – голоморфный вектор:

$$\Phi_{\bar z}-Q(z)\Phi_z=0,\quad z\in D, \tag{1.2}$$

связанный с $w(z)$ формулой:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)d_Qtw(t),\quad d_Qt=Edt+Q(t)\overline{dt},$$

E – единичная матрица размерности n, а $V(t,z)$ – ядро Коши системы (1.2).

Пусть $\{w_1(z),...,w_n(z)\}$ и $\{v_1(z),...,v_n(z)\}$ соответственно полные системы линейно независимых решений однородных систем, соответствующих системе (1.1) и однородной к (1.1) относительно метрики:

$$[w,v]=\operatorname{Re}\iint_D(w,\bar v)dD,\quad (w,\bar v)=\sum_{i=1}^n w_i\bar v_i.$$

Если Q – голоморфный вектор $\Phi(z)$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$[\Phi,v_j]=0,\quad j=1,...,N, \tag{1.3}$$

то общее решение системы (1), принадлежащее классу $H(\overline{D})$, дается формулой [1], [2]:

$$w(z)=\Phi(z)+\iint_D\left(\Gamma_1(z,t)\Phi(t)+\Gamma_2(z,t)\overline{\Phi(t)}\right)dD_t+\sum_{k=1}^N\hat C_k w_k(z), \tag{1.4}$$

где обобщенные резольвенты $\Gamma_1(z,t)$ и $\Gamma_2(z,t)$ могут быть вычислены методом, данным в [8], и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_1(z,t)=\sum_{j=1}^\infty K^{(2j)}(z,t),\\&\Gamma_2(z,t)=\sum_{j=0}^\infty K^{(2j+1)}(z,t),\\&K^{(1)}(z,t)=K(z,t)=-\frac{1}{\pi}V(z,t)A(t),\\&K^{(m)}(z,t)=\iint_D K(z,t)K^{(m-1)}(\tau,t)dD_\tau,\quad m=2,3,...\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

При этом действительные постоянные

$\hat{c}_i = [w, w_i]$, $i = 1,...,N$ определяются по w однозначно.

Следуя [1], представим $\Phi(z)$ в виде обобщенного интеграла типа Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma V(t,z)\,d_Q t\,\mu(t) + ic\,, \qquad (1.6)$$

где действительный вектор $(\mu_1(z),...,\mu_n(z)) \in H(\Gamma)$ и действительный n-мерный постоянный вектор c по заданному $\Phi(z)$ определяются единственным образом.

Используя (1.6), выведем формулу представления произвольного Q – голоморфного вектора $\Phi(z)$ класса $H(\overline{D})$, удовлетворяющего условиям (1.3).

Подставляя выражение для $\Phi(z)$ из (1.6) в (1.3), получаем, что $\mu(t)$ и c связаны соотношениями:

$$\operatorname{Im}\int_\Gamma\left(\phi_j(t)d_Q t, \mu(t) + i\frac{c}{2}\right)ds = 0, \quad j = 1,...,N, \quad (1.7)$$

где $\phi_j(t) = \frac{1}{\pi}\iint_D V(t,z)\overline{v_j(z)}\,dD_z$.

Перепишем равенства (1.7) в виде:

$$\left(\beta^{(j)}, c\right) = \int_\Gamma\left(\tilde{\phi}_j(t), \mu(t)\right)ds\,, \quad j = 1,...,N\,, \qquad (1.8)$$

где $\beta^{(j)}$, $j = 1,...,N$ – вполне определенные действительные постоянные n – мерные векторы, а векторы

$\tilde{\phi}_j(t) = -2\operatorname{Im}\left[\phi_j(t)X(t)\right]$,

$(X(t) = Et'(s) + Q(t)\overline{t'(s)}$, $t = t(s)$ – уравнение границы Γ, линейно независимы на Γ в силу линейной независимости:

$v_j(z)$, $j = 1,...,N$, $z \in \overline{D}$.

Пусть ρ – ранг матрицы β, столбцами которой являются векторы $\beta^{(1)},...,\beta^{(N)}$. Система (1.8) разрешима относительно c тогда и только тогда, когда ее правая часть ортогональна всем линейно независимым решениям однородной алгебраической системы, сопряженной к системе:

$$\left(\beta^{(j)}, c\right) = 0\,, \quad j = 1,...,N\,. \qquad (1.9)$$

Эти условия ортогональности будут иметь вид:

$$\int_\Gamma\left(\aleph^{(j)}(t), \mu(x)\right)ds = 0, \quad j = 1,...,N - \rho\,, \qquad (1.10)$$

где $\aleph^{(j)}(t)$ – линейно независимые вещественные векторы, причем мы будем считать их ортогональными на Γ, т. е. $\int_\Gamma\left(\aleph^{(i)}, \aleph^{(j)}\right)ds = \delta_{ij}$, δ_{ij} – символы Кронекера.

Тогда все действительные векторы $\mu(t)$ класса $H(\Gamma)$, удовлетворяющие условиям (1.10), даются формулой:

$$\mu(t) = v(t) - \sum_{k=1}^{N-\rho}\left[\left(\aleph^{(k)}(\tau), v(\tau)\right)ds_\tau\right]\aleph^{(k)}(t), \qquad (1.11)$$

где $v(t)$ – произвольный действительный вектор класса $H(\Gamma)$, причем $v(t)$ определяется по $\mu(t)$ с точностью до линейной комбинации с действительными коэффициентами векторов

$\aleph^{(1)},..., \aleph^{(N-\rho)}$. Подставляя теперь выражение для $\mu(t)$ из (1.11) в (1.8) и решая систему (1.8) относительно c, получаем:

$$c = \int_\Gamma N(\tau)v(\tau)\,ds_\tau + \sum_{k=1}^{n-\rho} p_k c^{(k)}\,, \qquad (1.12)$$

где $N(\tau)$ – вполне определенная действительная $(n \times n)$ – матрица класса $H_{3k-1}(\Gamma)$, $c^{(1)},..., c^{(N-\rho)}$ – линейно независимые решения алгебраической системы (1.9), а $p_1,..., p_{N-\rho}$ – произвольные действительные постоянные.

Из формул (1.6), (1.11) и (1.12) следует искомое представление для $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma V(t,z)\,d_Q t\,v(t) + \int_\Gamma N_1(z,\tau)v(\tau)\,d\tau + i\sum_{k=1}^{n-\rho} p_k c^{(k)}\,, \quad (1.13)$$

где $N_1(z,\tau)$ – вполне определенная матрица размерности $(n \times n)$ класса H_{3k-1} по переменным $z \in \overline{D}$, $\tau \in \Gamma$.

Подставляя теперь значение $\Phi(z)$ из (1.13) в (1.4) получаем общее представление решения $w(z) \in H(\overline{D})$ системы (1) в виде:

$$w(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)\,d_Q t\,v(t) - \Omega_2(z,t)\,\overline{d_Q t\,v(t)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma M(z,\tau)v(\tau)\,ds_\tau + \sum_{k=1}^{n-\rho} p_k \tilde{w}_k(z) + \sum_{r=1}^{N}\hat{c}_r w_r(z), \quad (1.14)$$

где $\Omega_1(z,t) = V(t,z) + \iint_D \Gamma_1(z,\tau)V(t,\tau)\,dD_\tau$,

$\Omega_2(z,t) = \iint_D \Gamma_2(z,\tau)\overline{V(t,\tau)}\,dD_\tau$,

$$\tilde{w}_k(z) = ic^{(k)} + \iint_D\left(\Gamma_1(z,\tau)ic^{(k)} + \Gamma_2(z,\tau)\overline{ic^{(k)}}\right)dD_\tau\,, \quad (1.15)$$

$M(z,\tau)$ – $(n \times n)$ – матрица класса H_{3k-1}, $z \in \overline{D}$, $\tau \in \Gamma$. Здесь $v = (v_1,...,v_n)$ – произвольный действительный вектор класса $H(\Gamma)$, $p_1,..., p_{n-\rho}$, $\hat{c}_1,...,\hat{c}_N$ – произвольные действительные постоянные, которые вычисляются по w однозначно, а $v(t)$ определяется (по w) с точностью до линейной комбинации (с действительными коэффициентами) векторов $\aleph^{(1)},..., \aleph^{(N-\rho)}$.

Подставляя интегральное представление (1.14) в граничное условие (2), приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений для определения вектора $v = (v_1,...,v_n)$ и постоянных $p_1,..., p_{n-\rho}$, $\hat{c}_1,...,\hat{c}_N$:

$$\operatorname{Re}\overline{G(t_0)}v(t_0)+\int_\Gamma K_1(t_0,t)v(t)\,ds_\tau+\int_\Gamma K_2(t_0,t)\overline{v(t)}\,ds_\tau+$$
$$+H(t_0)q=f(t_0),$$
$$K_1(t_0,t)=\operatorname{Re}\left\{\frac{\overline{G(t_0)}}{\pi i}\left(\Omega_1(t_0,t)x(t)-\Omega_2(t_0,t)\overline{x(t)}\right)\right\},$$
$$x(t)=E_n t'(s)+Q(t)\overline{t'(s)},$$
$$K_2(t_0,t)=\operatorname{Re}\left[\overline{G(t_0)}M(t_0,t)\right], \tag{1.16}$$
$$q=(p_1,\ldots,p_{n-\rho},\hat c_1,\ldots,\hat c_N),$$

$H(t_0)$ – матрица размерности $n\times(n+N-\rho)$, столбцами которой являются векторы:

$$\left\{\operatorname{Re}\left(\overline{G(t_0)}\,\tilde w_i(t_0)\right)\right\},\quad i=1,\ldots,n-\rho;$$
$$\left\{\operatorname{Re}\left(\overline{G(t_0)}w_k(t_0)\right)\right\},\quad k=1,\ldots,N.$$

§ 2. Исследование системы интегральных уравнений (1.16)

Из формул (1.5) следуют соотношения:

$$K^{(2n)}(z,t)=-\frac{1}{\pi}\overset{0}{K}{}^{(2n)}(z,t)A(t);$$
$$K^{(2n+1)}(z,t)=-\frac{1}{\pi}\overset{0}{K}{}^{(2n-1)}(z,t)A(t),\quad n=1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

где

$$\overset{0}{K}{}^{(1)}(z,t)=V(t,z);$$
$$\overset{0}{K}{}^{(m)}(z,t)=-\frac{1}{\pi}\iint_D V(t,z)A(\tau)\overline{\overset{0}{K}{}^{(m-1)}(\tau,t)}\,dD_\tau.$$

Кроме того, легко получить следующие равенства:

$$\overset{0}{K}{}^{(2n)}(z,t)=-\frac{1}{\pi}\iint_D \overset{0}{K}{}^{(2n-1)}(z,\tau)A(\tau)\overline{V(t,\tau)}\,dD_\tau,$$
$$\overset{0}{K}{}^{(2n+1)}(z,t)=-\frac{1}{\pi}\iint_D \overset{0}{K}{}^{(2n)}(z,\tau)\overline{A(\tau)}V(t,\tau)\,dD_\tau. \tag{2.2}$$

Из формул (1.5), (1.15), (2.1), (2.2) теперь получаем разложение ядер $\Omega_1(z,t)$ и $\Omega_2(z,t)$ в виде:

$$\Omega_1(z,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\overset{0}{K}{}^{(2j+1)}(z,t);$$
$$\Omega_2(z,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\overset{0}{K}{}^{(2j)}(z,t). \tag{2.3}$$

Так как в нашем случае $Q(z)$ – диагональная матрица, то ядро Коши $V(z,t)$ системы (1.2) также является диагональной матрицей [1]:

$$V(t,\tau)=\{V_1(t,\tau),\ldots,V_n(t,\tau)\},$$
$$V_k(t,\tau)=\frac{\partial\xi_k(t)}{\partial t}\frac{1}{\xi_k(t)-\xi_k(\tau)},\quad k=1,\ldots,n, \tag{2.4}$$

где $\xi_k(z)$ – основной гомеоморфизм уравнения Бельтрами [4]:

$$\frac{\partial\xi_k}{\partial\bar z}-q_k(z)\frac{\partial\xi_k}{\partial z}=0, \tag{2.5}$$

причем мы предполагаем $\xi_k(0)=0$.

Из (2.1), (2.4) и свойств гладкости гомеоморфизмов $\xi_k(z)$ уравнений (2.5) тогда следует, что:

$$\overset{0}{K}{}^{(1)}(t_0,t)X(t)-\frac{t'(s)}{t-t_0}E=$$
$$=V(t_0,t)X(t)-\frac{t'(s)}{t-t_0}E\in H_{3k-2}(\Gamma\times\Gamma), \tag{2.6}$$

$X(t)=Et'(s)+Q(t)\overline{t'(s)}$, E – единичная матрица размерности n. Выделим теперь особенности у матричной функции:

$$\overset{0}{K}{}^{(2)}(t_0,t)=\left\{\overset{0}{K}{}^{(2)}_{im}(t_0,t)\right\}_{i,m=1}^{n},\quad t_0,t\in\Gamma.$$

Согласно формулам (2.1), (2.2):

$$\overline{\overset{0}{K}{}^{(2)}_{im}(t_0,\sigma)}=-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma V_m(\sigma,\tau)\overline{A_{im}(\tau)}\,\overline{V_i(\tau,t_0)}\,dD_\tau,$$
$$t_0\in\Gamma,\quad\sigma\in D, \tag{2.7}$$

A_{im}, $i,m=1,\ldots,n$ – элементы матрицы A.

Заметим, что для любой скалярной функции $\varphi(\tau)\in W_p^1(D)\cap C$ имеет место тождество:

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D V_m(\sigma,\tau)L_m^*\varphi(\tau)\,dD_\tau=$$
$$=\varphi(\sigma)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V_m(\sigma,\tau)\,d_{q_m}\tau\,\varphi(\tau),\quad\sigma\in D,$$
$$L_m^*\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(q_m(\tau)\varphi\right),\quad m=1,\ldots,n. \tag{2.8}$$

Преобразуем теперь выражение (2.7), используя тождество (2.8) и следующее равенство:

$$\overline{V_i(\tau,t_0)}=\left(\overline{q_i(\tau)}q_m(\tau)-1\right)^{-1}L_m\left[\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)\right]-$$
$$-\left(\overline{q_i(\tau)}q_m(\tau)-1\right)^{-1}\frac{\partial q_m}{\partial\tau}\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right),$$
$$t_0\in\Gamma,\quad\tau\in D, \tag{2.9}$$

где под логарифмом понимается ветвь, котор... ращается в нуль при $\tau=0$ $(\xi_k(0)=0)$. Тогда получаем:

$$\overset{0}{K}{}^{(2)}_{im}(t_0,\sigma)=\overline{B^{(1)}_{im}(\sigma)}\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\sigma)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V_m(\sigma,\tau)\,d_{q_m}\tau\,\overline{B^{(1)}_{im}(\tau)}.$$

$$\cdot\ln\left(1-\frac{\xi_i(\tau)}{\xi_i(t_0)}\right)\cdot$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint_D V_m(\sigma,\tau)L_m^*\left[\overline{B_{im}^{(1)}(\tau)}\right]\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)+$$

$$+dD_\tau,\quad \sigma\in D, \tag{2.10}$$

где

$$\overline{B_{im}^{(1)}(\sigma)}=\overline{A_{im}(\sigma)}\left(\overline{q_i(\sigma)}q_m(\sigma)-1\right)^{-1}. \tag{2.11}$$

Точно также мы выделим последовательно из последнего слагаемого в правой части формулы (2.10) члены класса $G_1,...,G_{k-1}$. (По определению функция $f(t,z)\in G_k$, если ее производные k-го порядка в точке $t=z$ имеют особенность не выше логарифмического порядка и непрерывны при $t\neq z$).

Для этого достаточно воспользоваться формулой (2.8) и следующими тождествами:

$$\frac{\left[\overline{\xi_i(\tau)}-\overline{\xi_i(t_0)}\right]^{n-1}}{(n-1)!}\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)=$$

$$=\left[\left(\overline{q_i(\tau)}q_m(\tau)-1\right)\frac{\partial\overline{\xi_i(\tau)}}{\partial\overline{\tau}}\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot L_m^*\left\{\frac{\left[\overline{\xi_i(\tau)}-\overline{\xi_i(t_0)}\right]^{n}}{(n)!}\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)\right\}-$$

$$-\frac{\partial q_m}{\partial\tau}\left[\left(\overline{q_i(\tau)}q_m(\tau)-1\right)\frac{\partial\overline{\xi_i(\tau)}}{\partial\overline{\tau}}\right]^{-1}\frac{\left[\overline{\xi_i(\tau)}-\overline{\xi_i(t_0)}\right]^{n}}{(n)!}\ln$$

$$\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)-\frac{\left[\overline{\xi_i(\tau)}-\overline{\xi_i(t_0)}\right]^{n-1}}{(n)!};\quad n=1,2,...$$

В результате получаем представление:

$$\overset{0\,(2)}{K_{im}}(t_0,\sigma)=Q_{im}^{(k)}(t_0,\sigma)\ln\left(1-\frac{\xi_i(\sigma)}{\xi_i(t_0)}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\overline{V_m(\sigma,\tau)}\,\overline{d_{q_m}\tau}\,Q_{im}^{(k)}(t_0,\tau)\cdot\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)+R(t_0,\sigma), \tag{2.12}$$

где

$R(t_0,\sigma)\in H_{2k-1},\quad t_0\in\Gamma,\quad \sigma\in D.$

$B_{im}^{(1)}(\sigma)$ вычисляются по формуле (2.11) и

$$\overline{B_{im}^{(s)}(\sigma)}=L_m^*\left[\overline{B_{im}^{(s-1)}(\sigma)}\right]\left[\left(\overline{q_i(\sigma)}q_m(\sigma)-1\right)\frac{\partial\overline{\xi_i(\sigma)}}{\partial\overline{\sigma}}\right]^{-1},$$

$i,m=1,...,n.$

Из (2.12) по формуле типа Сохоцкого-Племеля [1] находим предельные значения:

$$\overset{0\,(2)}{K_{im}}(t_0,t)=\frac{1}{2}Q_{im}^{(k)}(t_0,t)\ln\left(1-\frac{\xi_i(t)}{\xi_i(t_0)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V_m(t,\tau)\,d_{q_m}\tau\,Q_{im}^{(k)}(t_0,\tau)\cdot\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)+$$

+ функции класса $H_{2k-1}(\Gamma\times\Gamma)$.

Учитывая, что при $\Gamma\in H_{3k}$

$$\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_j(\tau)}}{\overline{\xi_j(t_0)}}\right)-\ln\left(1-\frac{\overline{\tau}}{\overline{t_0}}\right)\in H_{3k-2},$$

$$\ln\left(1-\frac{\overline{\tau}}{\overline{t_0}}\right)-\ln\left(1-\frac{t_0}{\tau}\right)\in H_{3k-1},\quad t_0,\tau\in\Gamma \tag{2.13}$$

и используя результаты работы [5], получаем:

$$\overset{0\,(2)}{K_{im}}(t_0,t)=Q_{im}^{(k)}(t_0,t)\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)+\text{функции класса}$$

$$\left(H_{2k-1},H_{3k-2}\right),\quad k\geq 1. \tag{2.14}$$

Пусть $\overset{0\,(3)}{K_{ij}}(t_0,t)$, $i,j=1,...,n$ – элементы матрицы $\overset{0\,(3)}{K}(t_0,t)$, $t_0,t\in\Gamma$. По формулам (2.2):

$$\overset{0\,(3)}{K_{ij}}(t_0,t)=\sum_{m=1}^{n}-\frac{1}{\pi}\iint_D\overset{0\,(2)}{K_{im}}(t_0,\sigma)\overline{A_{mj}(\sigma)}V_j(t,\sigma)dD_\sigma. \tag{2.15}$$

В силу (2.12) и (2.7), очевидно, имеем:

$$\overset{0\,(3)}{K_{ij}}(t_0,t)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint_D\sum_{m=1}^{n}Q_{im}^{(k)}(t_0,\sigma)\overline{A_{mj}(\sigma)}\ln\left(1-\frac{\xi_i(\sigma)}{\xi_i(t_0)}\right)V_j(t,\sigma)dD_\sigma+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\overline{\overset{0\,(2)}{K_{mj}}(\tau,t)}\,\overline{d_{q_m}\tau}\,Q_{im}^{(k)}(t_0,\tau)\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)+$$

+ функции класса H_{2k}.

Легко видеть, что все интегралы в этом равенстве принадлежат классу $H_{2k}(\Gamma\times\Gamma)$.

Для первого слагаемого это очевидно, поскольку:

$$\sum_{m=1}^{n}Q_{im}^{(k)}(t_0,\sigma)\overline{A_{mj}(\sigma)}\in H_{2k},\quad \sigma\in D,\quad t_0\in\Gamma.$$

Для остальных интегралов это следует из формул (2.13), (2.14):

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\overline{\overset{0\,(2)}{K_{mj}}(\tau,t)}\,\overline{d_{q_m}\tau}\,Q_{im}^{(k)}(t_0,\tau)\ln\left(1-\frac{\overline{\xi_i(\tau)}}{\overline{\xi_i(t_0)}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\overline{Q_{mj}^{(k)}(\tau,t)}Q_{im}^{(k)}(t_0,t)\left(\overline{q_m(\tau)}+\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)}\right)\ln$$

$$\ln\left(1-\frac{\overline{\tau}}{\overline{t}}\right)\ln\left(1-\frac{\overline{\tau}}{\overline{t_0}}\right)+\textit{фукнции класса } H_{2k}.$$

Но, согласно [5], интеграл в правой части последнего равенства принадлежит классу $H_{2k}(\Gamma\times\Gamma)$.

Таким образом, $\overset{0}{K}{}^{(3)}(t_0,t)\in H_{2k}(\Gamma\times\Gamma)$.

Из формул (2.2) тогда легко заметить, что $\overset{0}{K}{}^{(4)}\in H_{2k}$ и т. д. Поэтому, используя формулы (2.3), (2.6), (2.14), интегральное уравнение (1.16) можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &Kv=\operatorname{Re}\left[G'(t_0)\left(v(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{v(t)}{t-t_0}\right)\right]+\\ &+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma G(t_0)\overline{Q^{(k)}(t_0,t)}\frac{X(t)}{t'(s)}\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)v(t)dt+\\ &+\int_\Gamma K(t_0,t)v(t)ds_t=f(t_0)-H(t_0)q,\end{aligned}\right\}\quad(2.16)$$

где $Q^{(k)}(t_0,t)$ – матрица с элементами $Q^{(k)}_{im}(t_0,t)$, $i,m=1,\dots,n$, определенными по формулам (2.12), $K(t_0,t)\in H_k(\Gamma\times\Gamma)$.

Лемма 1

Каждому решению $w(z)$ задачи (1) – (2) соответствует некоторое решение (v,q) уравнения (2.16), причем $(n+N-\rho)$-мерный действительный вектор q определяется по w однозначно, а вектор $v(t)\in H(\Gamma)$ – с точностью до линейной комбинации $N-\rho$ действительных векторов с действительными коэффициентами. Обратно, всякому решению (v,q) уравнения (2.16) по формулам (1.13), (1.14) соответствует единственное решение $w(z)$ задачи (1) – (2).

Введем в рассмотрение матрицы:

$$S_0(t_0)=\overline{G(t_0)},\quad S_{-p}(t_0)=$$
$$=G(t_0)(-1)^p\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}\left[\overline{Q^{(k)}(t_0,t)}\frac{X(t)}{t'(s)}\right]_{t=t_0},\quad p=1,\dots,k$$

и сформулируем для них так называемое «условие k», $k\geq 1$ (см. [5], [6]).

Во-первых, предполагается, что матрица $S_0(t)=\overline{G(t)}$ имеет постоянный ранг на Γ:

$$rang\,G(t)=r_1\leq n,\quad t\in\Gamma.\qquad(2.17)$$

Пусть $\sigma_2(t)$ – матрица размерности $n\times(n-r_1)$, столбцами которой являются линейно независимые решения алгебраической системы:

$$G(t)\sigma_2^{(i)}(t)=0,\quad t\in\Gamma,\quad i=1,\dots,n-r_1\qquad(2.18)$$

и, аналогично, $\sigma_1(t)$ – $(n\times r_1)$ – матрицы, столбцы которых есть линейно независимые решения системы:

$$\sigma_2^*(t)\sigma_1^{(j)}(t),\quad j=1,\dots,r_1,\qquad(2.19)$$

где $\sigma_2^*(t)$ – матрица, транспонированная и комплексно сопряженная к матрице $\sigma_2(t)$. При выполнении условия (2.17) матрицы $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ всегда существуют, причем той же гладкости, что и матрица $G(t)$. Составим теперь матрицу $\sigma_0(t)=\{\sigma_1(x),\sigma_2(x)\}$ размерности n, присоединяя к столбцам матрицы $\sigma_1(t)$ столбцы матрицы $\sigma_2(t)$. Очевидно, что $\det\sigma(t)\neq 0$. Исходя из матриц $\sigma_0,S_0,S_{-1},\dots,S_{-k}$ строятся матрицы $S_0^1,\dots,S_{-k+1}^1$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned}&S_{-n}^1(t)=\sum_{m=0}^{n+1}\sum_{k+j=n-m+1}C_{-k}^mS_{-k}(t)\frac{d^m}{dt^m}C_{1-j}(t),\\ &n=0,\dots,k-1,\\ &C_{-k}^m=\frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-m+1)}{m!},\quad C_{-k}^m=1,\quad C_0^m=0\end{aligned}\right.\qquad(2.20)$$

при $m>0$.

$$\left.\begin{aligned}&C_1(t)=\sigma_0(t)\begin{pmatrix}0&0\\0&-tE_{n-r_1}\end{pmatrix},\\ &C_0(t)=\sigma_0(t)\begin{pmatrix}E_{r_1}&0\\0&E_{n-r_1}\end{pmatrix}\sigma_0^{-1}(t)+\\ &+\sigma_0(t)\begin{pmatrix}0&0\\0&-tE_{n-r_1}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\sigma_0^{-1}(t),\end{aligned}\right\}\quad(2.21)$$

$C_j(t)=0$ при $j\leq -1$,

E_k – единичная матрица размерности k.

Матрица $S_0^1(t)$ может быть представлена также в виде:

$$S_0^1(t)=(G(t)\sigma_1(t),-tS_{-1}(t)\sigma_2(t))\sigma_0^{-1}(t),\qquad(2.22)$$

где матрица в скобках составлена из двух матриц, имеющих n строк и r_1 и $n-r_1$ столбцов соответственно.

Далее предполагается, что $rang\,S_0^1(t)=r_2=const$, $t\in\Gamma$ снова решаются алгебраические системы уравнений, аналогичные (2.18), (2.19) (с матрицей S_0^1 вместо $\overline{G}$) и, исходя уже из матриц $\sigma_0^1,S_0^1,\dots,S_{-k+1}^1$, по формулам, аналогичным (2.20) – (2.21) строятся матрицы $S_0^2,\dots,S_{-k+2}^2$. Наконец, в предположении, что матрицы $S_0,S_0^1,\dots,S_0^{k-1}$ имеют на Γ постоянный ранг, строится матрица S_0^k, относительно которой предполагается, что $\det S_0^k(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$. (2.23)

Обозначим через $K^1\omega$ – оператор, союзный к оператору Kv. В предположениях (2.17), (2.23) для системы (2.16) в работах [4], [5] доказаны следующие аналоги теорем Нетера:

(а) однородные уравнения $Kv=0$ и $K^1\omega=0$ имеют конечное число k_3 и k_3^1 линейно независимых решений. Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (2.16) заключаются в том, чтобы:

$$\int_\Gamma\left(f-H_q,\omega^{(j)}\right)dt=0,\quad j=1,\dots,k_3^1,\qquad(2.24)$$

где $\omega^{(1)},\dots,\omega^{(k_1^3)}$ – полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $K^1\omega = 0$;

(б) имеет место равенство:

$$k_3 - k_3^1 = -\frac{1}{\pi}\left[\arg\ \det\ S_0^k(t)\right]_\Gamma, \qquad (2.25)$$

где символ [ ] обозначает приращение выражения, заключенного в скобки, при обходе контура Γ один раз в положительном направлении. На основании этих утверждений докажем следующую теорему.

Теорема

Пусть матрица $G(t)$ граничного условия удовлетворяет условию (2.17) и для $S_0(t),\dots,S_{-k}(t)$ выполнено условие k, $k \geq 1$. Тогда задача Р Нетерова и ее индекс $\aleph$ вычисляется по формуле:

$$\aleph = n - \frac{1}{\pi}\left[\arg\ \det\ S_0^k(t)\right]_\Gamma. \qquad (*)$$

В случае $k = 1$ в формулировке «условия k» участвуют только матрицы $G(t_0)$ и $S_{-1}(t_0)$, где:

$$S_{-1}(t_0) = -G(t_0)M(t_0), \quad M = \{M_{ij}\}_{i,j=1}^n,$$

$$M_{ij}(t_0) = \overline{A_{ij}(t_0)}\left(\overline{q_i(t_0)}q_j(t_0) - 1\right)^{-1}\left(1 + q_j(t_0)\frac{\overline{t'(s_0)}}{t'(s_0)}\right).$$

Литература

1. Боярский, Б. В. Теория обобщенного аналитического вектора / Б. В. Боярский // Annales polonici mathematici. – 1966. – XVII.
2. Боярский, Б. В. Общее представление решений эллиптической системы *2 n* уравнений на плоскости / Б. В. Боярский // ДАН СССР. – 1958. – 122 (4).
3. Боярский, Б. В. Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа на плоскости / Б. В. Боярский // ДАН СССР – 1959. – 124 (1).
4. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М.: Физматгиз, 1959.
5. Сакс, Р. С. Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений / Р. С. Сакс // Дифференциальные уравнения. – Т. V. – Вып. 1. – 1969.
6. Сакс, Р. С. О задаче Дирихле для одного класса эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка / Р. С. Сакс // Дифференциальные уравнения. – Т. VI. – Вып. 1. – 1970.
7. Товмасян, Н. Е. К теории общих линейных краевых задач для эллиптических систем / Н. Е. Товмасян // Сиб. мат. журнал. – 1967. – Т. VIII. – Вып. 5.
8. Петровский, И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: Наука, 1965.
9. Товмасян, Н. Е. К теории сингулярных интегральных уравнений / Н. Е. Товмасян // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. III. – Вып. 1.