

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.86

### К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКО-ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В РЕГИОНЕ В КОНТЕКСТЕ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ

*В. В. Мешечкин.*

*Исследования поддержаны грантом  
07-01-96022 «РФФИ-Кузбасс»*

В настоящее время много внимания уделяется проблеме устойчивого развития человеческого общества как задаче сбалансированного развития триады «природа - хозяйство - население» в интересах не только ныне живущего, но и будущих поколений. При этом сбалансированность в развитии должна проявляться не только на уровне мирового сообщества, но и в рамках отдельных стран и регионов. Этим объясняются требования к региональному аспекту устойчивого развития, предусматривающие «развитие региональных и локальных производственных систем, производственной и социальной инфраструктуры, решение на местах социальных и других проблем в условиях рыночных отношений» (проект государственной стратегии Российской Федерации по устойчивому развитию).

Особый интерес представляют исследования по формализации принципов устойчивого развития и путей их реализации, к которым относятся, например, работы [1,2], где предложен методологический подход к согласованному моделированию экономической, экологической и социальной сфер жизнедеятельности региона на основе концепции динами-

ческой устойчивости принципов оптимального поведения. В этих работах для каждой из сфер предлагается строить свою динамическую математическую модель, связь между которыми обеспечивается за счет наличия общих параметров, что приводит к формированию многокритериальной задачи оптимального управления для региона в целом. Но, перед тем как рассматривать общую модель региона, предварительно требуется изучить отдельные аспекты регионального взаимодействия.

В данной работе строится математическая модель производственной системы региона с учетом экологического аспекта. Для этого в модель вводятся параметры природосберегающих технологий, под которыми подразумевается применение очистных сооружений на предприятиях региона и наращивание их мощностей, а также финансирование научных исследований с целью уменьшения выбросов вредных веществ и более рационального использования ресурсов.

Эта модель описывает один из аспектов экономико-экологического взаимодействия в регионе и может рассматриваться как составная часть общей модели его устойчивого развития. Конечная цель работы заключается в построении динамической модели, описывающей изменения экономического

потенциала региона и степени загрязнения окружающей среды, а также позволяющей определить наиболее оптимальный путь развития для достаточно длительного промежутка времени.

Для того чтобы охарактеризовать основные элементы модели и описать взаимосвязи между ними, предварительно исследуем статический случай.

Рассмотрим экономический регион, производящий  $n$  видов продуктов и использующий для этого  $l$  видов ресурсов. Выпуск продукции сопровождается образованием загрязняющих веществ и их выбросом в окружающую среду.

Будем считать, что предприятия региона обладают собственными очистными сооружениями, на которых часть загрязнений уничтожается, а оставшаяся часть выбрасывается в окружающую среду, за что назначаются штрафы. При этом у региона есть возможность наращивать мощности очистных сооружений, а также вести научные разработки по внедрению новых технологий производства, позволяющих уменьшить количество вредных отходов.

Пусть  $y = (y_1, \dots, y_n)$  – вектор выпуска предприятий,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – вектор затрат ресурсов. Зависимость между выпуском и затратами описывается производственной функцией:  $y = f(x)$ . Функция  $f: R_+^l \rightarrow R_+^n$  должна быть непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей и вогнутой:  $f(0) = 0$  (определение и свойства основных производственных функций можно найти, например, в [3]). Обозначим через  $p = (p_1, \dots, p_n)$  вектор цен на выпускаемую продукцию, через  $w = (w_1, \dots, w_n)$  – вектор цен на ресурсы.

Запас ресурсов предполагается ограниченным, поэтому  $0 \leq x \leq X$ ,

где  $X \in R_+^l$  – заданный вектор запасов.

Зададим объем промышленных отходов как функцию от производственных затрат:  $g = g(x)$ . Функция  $g: R_+^l \rightarrow R_+^1$  должна быть непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей, вогнутой и  $g(0) = 0$ . При этом различные виды вредных веществ, образующиеся в процессе производства, сводятся к условному «монозагрязнителю» на основе степени ущерба, причиняемого ими окружающей среде [4, 5].

Так как очистные сооружения работают с ограниченной мощностью, то часть загрязнений неизбежно попадает в окружающую среду. Обозначим их  $z$ , тогда разность  $g(x) - z$  представляет объем безвредных отходов. С помощью этих параметров можно в дальнейшем описывать влияние экономического сектора на экологию региона, а также характеризовать ожидания населения по отношению к качеству окружающей среды. Объем выбросов в биосферу не должен превышать предельно допустимого значения, которое обозначим  $H$ :  $0 \leq z \leq H$ .

За выбросы в окружающую среду на предприятия региона накладываются штрафные санкции. Обозначим через  $q$  штраф за одну единицу загряз-

нения, через  $r$  – стоимость ликвидации одной единицы загрязнения. При этом очистные сооружения имеют ограниченную мощность  $V$ , т. е. позволяют уничтожить ограниченное количество вредных веществ:

$$0 \leq g(x) - z \leq V. \quad (1)$$

Уменьшить негативное влияние на окружающую среду можно путем наращивания мощности существующих очистных сооружений или посредством строительства новых, при этом возможность очистить одну дополнительную единицу загрязнений обойдется предприятиям в сумму, равную  $a$ . Предположим, что  $S$  – сумма, выделяемая для наращивания, тогда дополнительно можно очистить количество выбросов, равное  $S/a$ .

Еще один способ уменьшения антропогенного воздействия на природу – это уменьшить количество отходов, образующихся в процессе производства, путем разработки и внедрения новых производственных технологий, что потребует от предприятий дополнительных затрат.

Пусть величина  $0 \leq \beta \leq 1$  – коэффициент, характеризующий уменьшение количества вредных веществ при производстве продукции, а  $D$  – расходы на разработку и введение новых технологий. Будем считать, что объем выбросов зависит от величины вложений: чем больше израсходовано средств, тем меньше отходов образуется в результате производства. Например, зависимость  $\beta$  от  $D$  может быть такой:

$$\beta(D) = \frac{k}{D + k},$$

где  $k$  – некоторая константа.

Тогда ограничение (1) с учетом наращивания мощности очистных сооружений и уменьшения объема загрязняющих веществ из-за внедрения новых технологий переписывается следующим образом:

$$0 \leq \frac{k}{D + k} g(x) - z \leq V + \frac{S}{a}.$$

Еще один способ улучшения качества окружающей среды – это вторичная переработка промышленных отходов с последующим использованием их как производственных ресурсов. Например, строительство мусоросжигающих заводов позволяет получать тепловую энергию, а значит, снизить потребление топлива, используемого на котельных, кроме того, снижается выброс в окружающую среду твердых бытовых отходов. Обозначим расходы на вторичную переработку через  $K$ . Так как отходы можно использовать как производственное сырье, то издержки, связанные с изготовлением продукции, уменьшатся (можно закупать меньшее количество отдельных ресурсов). Допустим, что экономия на приобретении ресурсов составит  $\delta \cdot (w, x)$ ,

где  $\delta = \delta(K) = \frac{b}{K + b}$  – коэффициент, показывающий, насколько уменьшатся затраты,  $b$  – некоторая константа.

Пусть капиталовложения на внедрение новых технологий, наращивание мощности очистных сооружений и вторичную переработку выбросов ограничены денежным фондом  $P$ :

$$0 \leq D + S + K \leq P.$$

Общая экономико-математическая модель максимизации прибыли в краткосрочном периоде строится как задача максимизации функции чистой прибыли, складывающейся из разности дохода от реализации продукции  $(p, f(x))$  и издержек на ее производство  $\delta(K) \cdot (w, x)$ , а также расходов на очистку  $r \cdot (\beta(D)g(x) - z)$  и штрафа за выбросы загрязнителей в природную среду  $q \cdot z$ .

В результате получаем оптимизационную модель региона, в которой отражены некоторые природосберегающие технологии:

$$\Pi(x, z, D, S, K) = (p, f(x)) - \frac{b}{K+b} (w, x) - r \left( \frac{k}{D+k} g(x) - z \right) - qz \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$0 \leq \frac{k}{D+k} g(x) - z \leq V + \frac{S}{a}, \quad (3)$$

$$0 \leq x \leq X, \quad (4)$$

$$0 \leq z \leq H, \quad (5)$$

$$D + S + K \leq P, \quad (6)$$

$$D \geq 0, S \geq 0, K \geq 0. \quad (7)$$

Решением этой задачи являются оптимальные объемы производственных затрат и выбросов, а также размеры средств, выделяемых на разные природоохранные мероприятия. Существование оптимального решения задачи (2) – (7) вытекает из теоремы Вейерштрасса [6], а для его поиска можно использовать, например, метод множителей Лагранжа.

Теперь статическую модель (2) – (7) обобщим до динамической. Именно динамическая постановка позволяет ставить и решать в долгосрочном аспекте задачу устойчивого развития как отдельных подсистем, так и региона в целом.

Пусть регион функционирует на отрезке времени  $[0, T]$ , разбитом дискретными точками  $t = 0, 1, \dots, T$ . Обозначения основных параметров задачи оставим прежними, снабдив их индексом времени  $t$ .

Дополнительно для формулировки динамической модели потребуется учесть износ очистных сооружений. Опишем его функцией

$$I_t = I \left( \frac{k}{D_t + k} g(x_t) - z_t \right), \text{ где } \frac{k}{D_t + k} g(x_t) - z_t -$$

количество очищенных за  $t$ -й период загрязнений. Это означает, что мощность очистных сооружений  $V_t$  к концу периода  $t$  за счет износа уменьшится на величину  $I_t$ .

Эффект от вложения предприятий региона в очистные сооружения будет описываться величиной

$S_t/a$ , которая показывает, насколько увеличится мощность очистных сооружений при инвестировании в них  $S_t$  рублей.

Очевидно, что если  $(S_t/a) > I_t$ , то речь идет о наращивании мощности очистных сооружений, если  $(S_t/a) = I_t$ , то происходит восстановление очистных сооружений до прежнего уровня мощности, если же  $(S_t/a) < I_t$ , то имеет место неполное восстановление.

Для описания критерия эффективности обозначим через  $\Pi_t$  суммарную прибыль предприятий региона за период времени  $[0, t]$ .

Тогда формулируемая модель запишется в виде:

$$\Pi_t = \Pi_{t-1} + (p, f(x_t)) - \frac{b}{K_t + b} (w, x_t) - r \left( \frac{k}{D_t + k} g(x_t) - z_t \right) - qz_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (8)$$

$$V_t = V_{t-1} - I \left( \frac{k}{D_t + k} g(x_t) - z_t \right) + \frac{S_t}{a}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (9)$$

$$\Pi_0 = \Pi^0, \quad V_0 = V^0, \quad (10)$$

$$0 \leq \frac{k}{D_t + k} g(x_t) - z_t \leq V_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (11)$$

$$0 \leq x_t \leq X_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (12)$$

$$0 \leq z_t \leq H, \quad t = 1, \dots, T, \quad (13)$$

$$D_t + S_t + K_t \leq P_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (14)$$

$$D_t \geq 0, S_t \geq 0, K_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (15)$$

$$J = \Pi_T \rightarrow \max. \quad (16)$$

В результате получается задача оптимального управления с дискретным временем, переменными состояниями в которой являются величины  $\Pi_t$  и  $V_t$  – прибыль и мощность очистных сооружений, а переменные  $x_t$ ,  $z_t$ ,  $D_t$ ,  $S_t$ ,  $K_t$  – управления на  $t$ -м шаге. Условие (10) – начальное состояние системы. Выражения (8) и (9) в совокупности представляют уравнения движения. Ограничения на управляющие переменные задачи записаны в (11) – (15). Неравенство (11) показывает, что очистные сооружения работают с ограниченной мощностью, (12) означает ограниченность ресурсов, а неравенство (13) гарантирует, что уровень выбросов в окружающую среду не будет превышать предельно допустимого значения. (14) показывает, что средства, выделяемые на наращивание очистных сооружений, введение новых технологий и переработку, в каждый момент времени ограничены некоторым общим денежным фондом. Также неравенство (11) является ограничением на переменную состояния системы  $V_t$ . Выражение (16) представляет собой крите-

рий качества модели. Исходя из его вида, можно говорить о задаче оптимизации конечного состояния (задаче оптимального управления в форме Майера).

Любое управление  $(x_i, z_i, D_i, S_i, K_i)$ ,  $i = 1, \dots, T$ , определенное на всем отрезке времени  $[1, T]$  и в каждый момент  $t \in [1, T]$  принимающее значение из заданного условиями (11) – (15) множества, называется допустимым управлением, если при этом траектория движения, соответствующая этому управлению, удовлетворяет фазовым ограничениям.

Допустимое управление задачи, максимизирующее функционал (16), называется оптимальным управлением, соответствующая ему траектория – оптимальной траекторией.

Условия существования оптимального решения для задачи (8) – (16) сформулированы в следующей теореме.

**Теорема.** Пусть в задаче (8) – (16) функции  $f: R_+^1 \rightarrow R_+^n$ ,  $g: R_+^1 \rightarrow R_+^1$ ,  $I: R_+^1 \rightarrow R_+^1$  непрерывны,  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ ,  $I(0) = 0$  и  $V^0 \geq 0$ , тогда для этой задачи существует оптимальное управление.

Доказательство этой теоремы опирается на утверждение об условиях существования оптимального решения в дискретных задачах оптимального управления с ограничениями на управляющие и фазовые переменные: если множество значений управляющих переменных ограничено и замкнуто, а функции, формирующие критерий качества и уравнения движения, непрерывны, и существует хотя бы одно допустимое управление для данного начального состояния, то существует и оптимальное [7].

Ограниченность и замкнутость множества значений управляющих переменных рассматриваемой задачи обуславливается системой неравенств (11) – (15). Непрерывность функций в уравнениях движения вытекает из (8) и (9). Поэтому основную сложность составляет доказательство того, что для заданного начального состояния существует хотя бы одно допустимое управление. Покажем это.

Пусть множество  $U$  задается системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{k}{D_i + k} g(x_i) - z_i \leq V_i, \\ 0 \leq x_i \leq X_i, \\ 0 \leq z_i \leq H, \\ D_i + S_i + K_i \leq P_i, \\ D_i \geq 0, S_i \geq 0, K_i \geq 0, \\ i = 1, \dots, T. \end{cases} \quad (17)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  система находится в начальном состоянии  $(\Pi^0, V^0)$ . Возьмем управление следующего вида:  $x_i = 0$ ,  $z_i = 0$ ,  $D_i = 0$ ,  $S_i = 0$ ,  $K_i = 0$  ( $i = 1, \dots, T$ ). Это управление удовлетворяет условиям (17), а фазовые ограничения для произвольного момента времени  $t$  запишутся в этом

случае в форме:  $V_i \geq 0$ . Согласно уравнениям движения (8) и (9), определим состояние системы в момент времени  $t = 1$  (учитывая, что при этом  $f(x_i) = 0$  и  $g(x_i) = 0$ ):

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi^0 + (p, f(x_1)) - \\ &- \frac{b}{K_1 + b} (w, x_1) - r \left( \frac{k}{D_1 + k} g(x_1) - z_1 \right) - qz_1 = \Pi^0, \end{aligned}$$

$$V_1 = V^0 - I \left( \frac{k}{D_1 + k} g(x_1) - z_1 \right) + \frac{S_1}{a} = V^0.$$

Дальнейший выбор допустимого управления для момента  $t = 2$  в виде  $x_2 = 0$ ,  $z_2 = 0$ ,  $D_2 = 0$ ,  $S_2 = 0$ ,  $K_2 = 0$  приведет систему в состояние  $(\Pi_2, V_2)$ , определяемое условиями:

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \Pi^0 + (p, f(x_2)) - \\ &- \frac{b}{K_2 + b} (w, x_2) - r \left( \frac{k}{D_2 + k} g(x_2) - z_2 \right) - qz_2 = \Pi^0, \end{aligned}$$

$$V_2 = V^0 - I \left( \frac{k}{D_2 + k} g(x_2) - z_2 \right) + \frac{S_2}{a} = V^0$$

и т. д. Окончательно, последовательность выбранных управлений  $\{(x_1, z_1, D_1, S_1, K_1), \dots, (x_T, z_T, D_T, S_T, K_T)\}$  определит соответствующую «стационарную» траекторию системы  $\{(\Pi_0, V_0), (\Pi_1, V_1), \dots, (\Pi_T, V_T)\} = \{(\Pi^0, V^0), (\Pi^0, V^0), \dots, (\Pi^0, V^0)\}$ .

Если  $V^0 \geq 0$ , то ограничения на переменные состояния выполнены, т. е. для заданного начального состояния  $(\Pi^0, V^0)$  получена допустимая траектория. Тогда для начального состояния системы  $(\Pi^0, V^0)$  в задаче (8) – (16) существует оптимальное управление.

Для решения задачи (8) – (16) можно использовать метод динамического программирования. Этот метод опирается на принцип оптимальности Беллмана, который можно сформулировать следующим образом: «Каково бы ни было начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага» [8].

Использование этого принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, является не локально лучшим, а лучшим с точки зрения процесса в целом. В результате выбор оптимального управления определяется лишь состоянием системы в текущий момент времени. При этом, в отличие от непрерывных задач оптимального управления, применение метода динамического программирования в дискретном случае не требует жестких условий на функцию Беллмана и поэтому является вполне реальным [9].

Применим метод динамического программирования к задаче (8) – (16).

Обозначим  $\tilde{V}(t, P_t, V_t)$  функцию Беллмана для задачи (8) – (16). Тогда уравнение Беллмана запишется в виде:

$$\tilde{V}(t-1, P_{t-1}, V_{t-1}) = \max_{(x_t, z_t, D_t, S_t, K_t) \in U} \tilde{V}(t, P_t, V_t), \quad t = 1, \dots, T \quad (18)$$

с краевым условием  $\tilde{V}(T, P_T, V_T) = P_T$ . (19)

Двигаясь по  $t$  в обратном порядке от  $T$  до 1, из уравнений (19) и (18) находим условно-оптимальные управления задачи (8) – (16). Затем, используя соотношения (8), (9) и двигаясь от начала к концу (от  $t=1$  до  $t=T$ ), определяем оптимальное управление и оптимальную траекторию развития региона, а также максимальное значение прибыли.

Найденное при этом решение обладает важным свойством – динамической устойчивостью, обобщающей понятие оптимальности по Беллману: в каком бы состоянии ни оказалась система в данный момент в результате ее функционирования на предшествующем этапе, если изначально она двигалась вдоль оптимальной траектории, то дальнейшее ее развитие из сложившегося состояния должно также протекать по оптимальной на оставшемся отрезке траектории [10]. Данное свойство обеспечивает содержательность во времени выбранного пути развития, когда общество постоянно ориентируется на одни и те же ценности и не имеет основания для отклонения от первоначально принятых планов действия, что гарантирует преемственность принимаемых решений и их оптимальность для всего рассматриваемого промежутка времени, а следовательно, способствует реализации устойчивого развития региона.

## Литература

1. Данилов, Н. Н. Устойчивое развитие: методология математических исследований / Н. Н. Данилов // Вестник КемГУ. Математика. – 2000. – № 4. – С. 5 – 15.
2. Данилов, Н. Н. Систематизация изучения проблем устойчивого развития региона на основе применения математических моделей / Н. Н. Данилов // Природные и интеллектуальные ресурсы Сибири (СИБРЕСУРС-13-2007): доклады (материалы) XIII-й Международной научно-практической конференции. – Томск: САН ВШ: В-Спектр, 2007. – С. 275 – 278.
3. Данилов, Н. Н. Курс математической экономики / Н. Н. Данилов. – М.: Высшая школа, 2006. – 407 с.
4. Голуб, А. А. Экономика природопользования / А. А. Голуб, Е. Б. Струкова. – М.: Аспект-Пресс, 1995. – 188 с.
5. Голуб, А. А. Экономика природных ресурсов / А. А. Голуб, Е. Б. Струкова. – М.: Аспект-Пресс, 2001. – 319 с.
6. Ногин, В. Д. Основы теории оптимизации / В. Д. Ногин, И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев. – М.: Высшая школа, 1986. – 384 с.
7. Пропой, А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. – М.: Наука, 1973. – 256 с.
8. Калихман, И. Л. Динамическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Калихман, М. А. Войтенко. – М.: Высшая школа, 1979. – 125 с.
9. Данилов, Н. Н. Основы математической теории оптимальных процессов / Н. Н. Данилов, В. В. Мещечкин. – Кемерово: Кузбассвуиздат, 2004. – 219 с.
10. Петросян, Л. А. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения / Л. А. Петросян, Н. Н. Данилов. – Томск: Изд-во ТГУ, 1985. – 276 с.