УДК 517.9

О НЕЛОКАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В. А. Шалаумов

В статье метод последовательного выделения регулярных частей для построения асимптотических разложений в целом решений задачи Дирихле, сингулярно зависящей от малого параметра, предложенный в работах [1], и реализованный в [2] ,[3] в более простой ситуации, распространяется на тот случай, когда старшие члены линейного дифференциального оператора зависят от различных степеней малого параметра.

Пусть $y = y(x,\varepsilon)$, классическое решение краевой задачи:

$$\begin{cases} L^2[y] \equiv \varepsilon^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon^\alpha B(x)\dfrac{dy}{dx} + C(x)y = 0, \\ y(a,\varepsilon) = \delta \neq 0, y(b,\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Учитывая экспоненциально малый характер поведения $y = y(x,\varepsilon)$ при $a < x \le b$ и $\varepsilon \to 0$, согласно преобразованиям, предложенным в [1], пусть P'_0 , P'_1 – решения уравнений:

$$2\varepsilon^2 P_0'^2 - 2BP'_0\varepsilon^\alpha + 2C - \varepsilon^\alpha B' = 0, \quad (2)$$

$$P_1'^2 = \frac{B}{\varepsilon^{2(2-\alpha)}} + \frac{2B'}{\varepsilon^{2-\alpha}} - \frac{4C}{\varepsilon^2}. \quad (3)$$

$$B - 2P'_0\varepsilon^{2-\alpha} = P_1'\varepsilon^{2-\alpha}. \quad (4)$$

Решение (3), удовлетворяющее условию $P_1(x,\varepsilon) > 0, a < x < b; P_1(b,\varepsilon) = 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} P'_1 = \dfrac{B(x)}{\varepsilon^{2-\alpha}} - 2P'_0 = -\dfrac{\sqrt{B^2 - 2\varepsilon^{2(1-\alpha)}(2C - \varepsilon^\alpha B')}}{\varepsilon^{2-\alpha}}, \\ P_1(b,\varepsilon) = 0; \end{cases} \quad (5)$$

Также как в [1], [2], [3] полагаем:

$$P_0(a,\varepsilon) = 0, \quad P_2'(x,\varepsilon) = -P_1'(x,\varepsilon),$$
$$P_2(a,\varepsilon) = 0.$$

Отметим, что

$$P_i(x,\varepsilon) > 0, \quad x \in (a,b),$$
$$i = 0,2; \quad P_1(x,\varepsilon) + P_2(x,\varepsilon) = C(\varepsilon)$$

и не зависит от **x**.

Тогда, согласно [1], (также как [2], [3]) решение краевой задачи (1) представимо в виде:

$$y = y(x,\varepsilon) =$$
$$= e^{-P_0}[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(P_1+P_2)}(R_{2k} + R_{2k+1}e^{-P_1})], \quad (6)$$

функции $R_k = R_k(x,\varepsilon)$ удовлетворяют следующим уравнениям и одному граничному условию:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[R_0] \equiv \varepsilon^{2-\alpha} \dfrac{d^2 R_0}{dx^2} + (B - 2P'_0\varepsilon^{2-\alpha})\dfrac{dR_0}{dx} + \dfrac{1}{2}(B' - \varepsilon^{2-\alpha} 2P''_0)R_0 = 0, \\ R_0(a,\varepsilon) = \delta \neq 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} L_1^\varepsilon[R_{2k+1}] \equiv \varepsilon^{2-\alpha} \dfrac{d^2 R_{2k+1}}{dx^2} + (-B + 2P'_0\varepsilon^{2-\alpha})\dfrac{dR_{2k}}{dx} + \dfrac{1}{2}(-B' + \varepsilon^{2-\alpha} 2P''_0)R_{2k+1} = 0, \\ R_{2k+1}(b,\varepsilon) = -R_{2k}(b,\varepsilon), \qquad k = 0,1,2,\dots; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[R_{2k}] = 0, \\ R_{2k}(a,\varepsilon) = -R_{2k-1}(a,\varepsilon), \quad k = 1,2,\dots \end{cases} \quad (9)$$

А так как

$$B(x) - 2P'_0\varepsilon^{2-\alpha} =$$
$$= -\sqrt{B^2 - 2\varepsilon^{2(1-\alpha)}(2C - \varepsilon^\alpha B')} < 0,$$

то коэффициенты переноса операторов L_0^ε и L_1^ε направлены на ненулевые граничные условия, следовательно, $R_k = R_k(x,\varepsilon)$ – асимптотические ряды по некоторой асимптотической последовательности.

Вид асимптотической последовательности, по которой можно разложить R_k в а.р., можно получить разлагая коэффициенты операторов L_0^ε и L_1^ε по некоторым степеням параметра $\varepsilon^{\gamma(\alpha)}$. Основная трудность при этом состоит в том , что вид этой асимптотической последовательности сильно зависит от конкретного значения величины α и, следовательно, от соотношений между $\alpha,\ 2(1-\alpha),\ 2-\alpha$ и их степеней.

Учитывая то, что $B(x) - 2\varepsilon^{2-\alpha}P_0' = \varepsilon^{2-\alpha}P_1'$, то в (7) – (9) асимптотика коэффициентов определяется асимптотикой P_1'. Асимптотику $P_1(x,\varepsilon)$ можно выписать, разлагая соотношение (5) по малому параметру, при этом получим следующую последовательность степеней ε:

$$\frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}},\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}.1,,\varepsilon^{2-3\alpha}\varepsilon^{2-2\alpha},\varepsilon^{2-\alpha},\varepsilon^{4-5\alpha}.\varepsilon^{4-4\alpha},\varepsilon^{4-3\alpha},\varepsilon^{4-2\alpha},\varepsilon^{6-7\alpha},\varepsilon^{6-6\alpha},\varepsilon^{6-5\alpha},\varepsilon^{6-4\alpha},\varepsilon^{6-3\alpha},$$
$$\varepsilon^{8-9\alpha},\varepsilon^{8=8\alpha},\varepsilon^{8=7\alpha},\varepsilon^{8=6\alpha}.\varepsilon^{8=5\alpha}.,\varepsilon^{8=4\alpha},.... \qquad (11)$$

Но эта последовательность не является асимптотической при $\varepsilon \to 0$. В связи с этим рассмотрим отдельно случаи 0<$\alpha<1$, $\alpha=1$и $\alpha>1$.

Пусть $0<\alpha<1$. Последовательность (11) и в этом случае не образует асимптотическую последовательность (следующий член не есть о-малое от предыдущего). Выписать общий вид асимптотической последовательности (а.п.) затруднительно, так как правильное расположение степеней ε зависит от величины α ,укажем лишь первые члены асимптотической последовательности до ε^0 в зависимости от α . Правильное расположение положительных степеней ε более сложным образом зависит от α .

Пусть 0<$\alpha \le \frac{2}{3}$.Тогда следующие члены последовательности (11) $\frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}},\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}},1,\varepsilon^{2-3\alpha}$ образуют а.п.(все следующие члены в (11) будут о($\varepsilon^{2-3\alpha}$). Если $\frac{2}{3}<\alpha\le\frac{4}{5}$, то а.п. имеет вид:

$\frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}},\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}.\frac{1}{\varepsilon^{3\alpha-2}},1,\varepsilon^{4-5\alpha}$. И вообще, если $\frac{2k}{2k+1}<\alpha\le\frac{2k+2}{2k+3}$, то а.п. имеет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}},\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}.\frac{1}{\varepsilon^{3\alpha-2}},\ldots$$
$$\ldots\frac{1}{\varepsilon^{(2k+1)\alpha-2k}},1,\varepsilon^{2k+2-(2k+3)\alpha}$$

(остальные члены в (11) есть о($\varepsilon^{2k+2-(2k+3)\alpha}$)).

Реализуем построение асимптотического разложения решения при 0<$\alpha\le\frac{2}{3}$.

С точностью до ε^0 из (4) – (6), имеем:

$$P'_0=\frac{B+\sqrt{B^2-4\varepsilon^{2(1-\alpha)}C+2\varepsilon^{2-\alpha}B'}}{2\varepsilon^{2-\alpha}}=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}},\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}},1,\varepsilon^{2-3\alpha}.$$
$$P'_1=-\frac{\sqrt{B^2 C-4\varepsilon^{2(1-\alpha)}B\ +2\varepsilon^{2-\alpha}\ '}}{2\varepsilon^{2-\alpha}}=$$
$$=\left(-\frac{B}{\varepsilon^{2-\alpha}}+\frac{2C}{B\varepsilon^{\alpha}}-\frac{B'}{B}\right)(1+o(1)); \qquad (12)$$
$$B-2\varepsilon^{2-\alpha}P'_0=-\sqrt{B^2-4\varepsilon^{2(1-\alpha)}C+2\varepsilon^{\alpha}B'}=$$
$$=-B+\frac{2C}{B}\varepsilon^{2-2\alpha}+\frac{B'}{B}\varepsilon^{2-\alpha}+O(\varepsilon^{4-4\alpha}).$$

Полагая

$R_k=R_k(x,\varepsilon)=\varphi_0^k(x)+\varepsilon^{2(1-\alpha)}\varphi_1^k(x)+$ $+\varepsilon^{2-\alpha}\varphi_2^k(x)+\ldots$, подставляя его последовательно в (7),(8), (9) получим для (6) представление:

$$y=y(x,\varepsilon)=e^{-P_0}\{\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_0^{2k}+\varphi_0^{2k+1}e^{-P_1})e^{-k(P_1+P_2)}+$$
$$+\varepsilon^{2(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_1^{2k}+\varphi_1^{2k+1}e^{-P_1})e^{-k(P_1+P_2)}\}(1+0(\varepsilon^{2(1-\alpha)}))=$$
$$=e^{-P_0}\{(\varphi_0^0+\varphi_0^1e^{-P_1})+$$
$$+\varepsilon^{2(1-\alpha)}(\varphi_1^0+\varphi_1^1e^{-P_1})\}(1+0(e^{-\frac{1}{\varepsilon}})), \qquad (13)$$

а для φ_i^k, $i=0,1$ следующие краевые задачи, однозначно их определяющие:

$$\begin{cases}L_0[\varphi_0^0]\equiv -B\dfrac{d\varphi_0^0}{dx}-\dfrac{B'}{2}\varphi_0^0=0,\\ \varphi_0^0(a)=\delta;\end{cases}$$
$$\begin{cases}L_0[\varphi_1^0]=-\dfrac{2C}{B}(\varphi_0^0)''-(\dfrac{C}{B})'\equiv -G_0,\\ \varphi_1^0(a)=0;\end{cases}$$
$$\begin{cases}L_1[\varphi_0^1]\equiv B\dfrac{d\varphi_0^1}{dx}+\dfrac{B'}{2}\varphi_0^1=0,\\ \varphi_0^1(b)=-\varphi_0^0(b);\end{cases}$$
$$\begin{cases}L_1[\varphi_1^1]=G_0,\\ \varphi_1^1(b)=-\varphi_1^0(b);\end{cases}$$
$$\begin{cases}L_0[\varphi_0^{2k}]=0,\\ \varphi_0^{2k}(a)=-\varphi_0^{2k-1}(a);\end{cases}$$
$$\begin{cases}L_0[\varphi_1^{2k}]=-G_0,\\ \varphi_1^{2k}(a)=-\varphi_1^{2k-1}(a);\end{cases}$$
$$\begin{cases}L_1[\varphi_0^{2k+1}]\equiv 0,\\ \varphi_0^{2k+1}(b)=-\varphi_0^{2k}(b);\end{cases}$$
$$\begin{cases}L_1[\varphi_1^{2k+1}]=G_0,\\ \varphi_1^{2k+1}(b)=-\varphi_1^{2k}(b);\quad k=1,2,3,\ldots\end{cases} \qquad (14)$$

Учитывая то, что определяющие операторы связаны соотношением $L_0=-L_1$ так же, как и в [1], [2], получим, что:

$$\varphi_0^{2k}(x)=\varphi_0^0(x)=\delta\sqrt{\frac{B(a)}{B(x)}},$$
$$\varphi_0^{2k+1}(x)=-\varphi_0^0(x),\quad k=1,2,\ldots;.$$

$$\varphi_1^{2k} = \frac{2k+1}{\sqrt{B(x)}}\int_a^b \frac{G_0(u)}{\sqrt{B(u)}}\,du + \qquad \varphi_1^{2k+1} = -\frac{2k+1}{\sqrt{B(x)}}\int_a^b \frac{G_0(u)}{\sqrt{B(u)}}\,du +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_b^x \frac{G_0(u)}{\sqrt{B(u)}}\,du, \qquad +\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_b^x \frac{G_0(u)}{\sqrt{B(u)}}\,du, k = 0,1,2,\ldots$$

Подставляя в (11), получим первое и второе приближения, удовлетворяющее граничным условиям исходной задачи:

$$y = y(x,\varepsilon) = e^{-P_0}\{\frac{(\varphi_0^0(x)(1-e^{-P_1})}{1-e^{-(P_1+P_2)}} + \varepsilon^{2(1-\alpha)}[\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_a^b \frac{G_0(u)}{2\sqrt{B(u)}}\,du\,\frac{(1-e^{-P_1})(1+e^{-(P_1+P_2)})}{(1-e^{-(P_1+P_2)})^2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_b^x \frac{G_0(u)}{\sqrt{B(u)}}\,du\,\frac{(1+e^{-P_1})}{(1-e^{-(P_1+P_2)})}](1+o(\varepsilon^{2(1-\alpha)}))\}. \tag{15}$$

Используя асимптотические разложения для P_0, P_1 имеем:

$$y = y(x,\varepsilon) = \exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\int_a^x B(u)\,du + \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int_a^x \frac{C}{B}\,du\}\sqrt{\frac{B(a)}{B(x)}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_b^x \frac{G(u)}{\sqrt{B(u)}}\,du \times\left\{\delta\sqrt{\frac{B(a)}{B(x)}}\left(1-\exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\int_x^b B(u)\,du + \tfrac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int_x^b \frac{C}{B}\,du\}\frac{B(x)}{B(b)}\right)+\right.$$

$$+\varepsilon^{2(1-\alpha)}\left[\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_a^b \frac{G(u)}{\sqrt{B(u)}}\,du\,\left(1-\exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\int_x^b B(u)\,du + \tfrac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int_x^b \frac{C}{B}\,du\}\frac{B(x)}{B(b)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_b^x \frac{G(u)}{\sqrt{B(u)}}\,du\,\left(1+\exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\int_x^b B(u)\,du + \tfrac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int_x^b \frac{C}{B}\,du\}\frac{B(x)}{B(b)}\right)\}\}(1+O(\varepsilon^{2(1-\alpha)}))\,. \tag{16}$$

Так же, как в [1], [2], теперь можно выписать асимптотику для производной и логарифмической производной.

Если рассматривать задачу

$$\begin{cases} L^2[y] \equiv \varepsilon^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \varepsilon^{\alpha}B(x)\dfrac{dy}{dx} + C(x)y = 0, \\ y(a,\varepsilon) = 0,\ y(b,\varepsilon) = \delta \neq 0, \end{cases} \tag{17}$$

то теперь явление пограничного слоя необходимо рассматривать в точке x = b.В связи с этим рассмотрим второе решение уравнения (2) . Тогда имеем:

$$\begin{cases} P_0' = \dfrac{B-\sqrt{B^2-4\varepsilon^{2(1-\alpha)}C+2\varepsilon^{2-\alpha}B'}}{2\varepsilon^{2-\alpha}} < 0, \\ P_0(b,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} P_1'(x,\varepsilon) = \dfrac{\sqrt{B^2-4\varepsilon^{2(1-\alpha)}C+2\varepsilon^{2-\alpha}B'}}{\varepsilon^{2-\alpha}}, \\ P_1(a,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

$$B-2P_0\varepsilon^{2-\alpha} = -\sqrt{B^2-4\varepsilon^{2(1-\alpha)}C+2\varepsilon^{2-\alpha}B'} < 0. \tag{20}$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} L_0^{\varepsilon}[R_0] \equiv \varepsilon^{2-\alpha}\dfrac{d^2R_0}{dx^2} + (-B+2P'_0\varepsilon^{2-\alpha})\dfrac{dR_0}{dx} + \dfrac{1}{2}(B' - \varepsilon^{2-\alpha}2P''_0)R_0 = 0, \\ R_0(b,\varepsilon) = \delta \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1^{\varepsilon}[R_{2k+1}] \equiv \varepsilon^{2-\alpha}\dfrac{d^2R_{2k+1}}{dx^2} + (B-2P'_0\varepsilon^{2-\alpha})\dfrac{dR_{2k}}{dx} + \dfrac{1}{2}(-B' + \varepsilon^{2-\alpha}2P''_0)R_{2k+1} = 0, \\ R_{2k+1}(a,\varepsilon) = -R_{2k}(a,\varepsilon), k = 0,1,2,\ldots; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_0^{\varepsilon}[R_{2k}] = 0, \\ R_{2k}(b,\varepsilon) = -R_{2k-1}(b,\varepsilon) \quad k = 1,2,\ldots\ . \end{cases}$$

Асимптотика P_0', P_1' – коэффициенты при младших членах операторов L_0^ε и L_1^ε имеет следующий вид:

$$P_0' = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4\varepsilon^{2(1-\alpha)}C + 2\varepsilon^{2-\alpha}B'}}{2\varepsilon^{2-\alpha}} =$$

$$= \frac{C}{B\varepsilon^\alpha} - \frac{B'}{2B} + o(1),$$

$$P_1' = \frac{B}{\varepsilon^{2-\alpha}} - \frac{2C}{B\varepsilon^\alpha} + \frac{B'}{B} + o(1).$$

Определяющие операторы, для функций входящих в (11), равны по модулю и имеют разные знаки. Уравнения, определяющие члены двух первых приближений:

$$\begin{cases} L_0[\varphi_0^0] \equiv B\dfrac{d\varphi_0^0}{dx} + \dfrac{B'}{2}\varphi_0^0 = 0, \\ \varphi_0^0(b) = \delta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_0[\varphi_1^0] = \dfrac{2C}{B}(\varphi_0^0)' + (\dfrac{C}{B})'\varphi_0^0 \equiv G_0, \\ \varphi_1^0(b) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_0[\varphi_0^1] \equiv B\dfrac{d\varphi_0^1}{dx} + \dfrac{B'}{2}\varphi_0^1 = 0, \\ \varphi_0^1(a) = -\varphi_0^0(a); \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_0[\varphi_1^1] = G_0, \\ \varphi_1^1(a) = -\varphi_1^0(a). \end{cases}$$

Асимптотика тогда имеет вид:

$$y = y(x,\varepsilon) = \exp\{\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\int_a^x \frac{C}{B}du\}\sqrt{\frac{B(a)}{B(x)}}\times$$

$$\times\left\{\alpha\sqrt{\frac{B(b)}{B(x)}}\left(1 - \exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\int_a^x B(u)\,du\}\exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^\alpha}\int_a^x \frac{2C}{B}du\}\frac{B(a)}{B(x)}\right) + \right.$$

$$+\varepsilon^{2(1-\alpha)}\left[\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_b^a \frac{G(u)}{\sqrt{B(u)}}du\left(1 - \exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\int_a^x B(u)\,du\}\exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^\alpha}\int_a^x \frac{2C}{B}du\}\frac{B(a)}{B(x)}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{B(x)}}\int_a^x \frac{G(u)}{\sqrt{B(u)}}du\left\{\left(1 + \exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\int_a^x B(u)\,du\}\exp\{-\tfrac{1}{\varepsilon^\alpha}\int_a^x \frac{2C}{B}du\}\frac{B(a)}{B(x)}\right)\right]\right\}(1 + o(\varepsilon^{2(1-\alpha)})).$$

Пусть $\alpha = 1$.

В этом случае уравнения (2),(3) позволяют выписать полное асимптотическое разложение для P'_0 и P'_1. Полагая $P'_0 = \sum_{k=0}^{+\infty}\hat{A}_{\hat{e}}\varepsilon^{\hat{e}-1}$ и подставляя в (2), получим следующую рекуррентную систему уравнений для коэффициентов B_k:

$$\begin{aligned} &B_0^2 - BB_0 + C = 0, \quad 2B_0B_1 - BB_1 + \frac{B'}{2} = 0, \\ &2B_0B_2 - BB_2 + B'^2 = 0, \\ &2B_0B_3 - BB_3 + 2B_1B_2 = 0, \ldots \\ &2B_0B_{2k} - BB_{2k} + 2B_1B_{2k-1} + \cdots \\ &+2B_{2k-1}B_k + B_k'^2 = 0, \\ &2B_0B_{2k+1} - BB_{2k+1} + 2B_1B_{2k} + \cdots \\ &+2B_kB_{k+1} = 0, \qquad k = 2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{20}$$

Решение первого уравнения системы, задающего рекуррентную последовательность, выбирается в зависимости от рассматриваемой задачи. Для задачи (1) следует считать:

$$B_0 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} > 0,$$ для задачи (16):

$$B_0 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2} < 0.$$

Для P'_1 соответственно имеем:

$$P'_1 = \mp\frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-2B_k)\varepsilon^{k-1} \equiv \sum_{k=0}^{+\infty}D_k\varepsilon^{k-1}.$$

Тогда в представлении (7) для решения задачи (1) функции $R_k = R_k(x,\varepsilon)$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[R_0] \equiv \varepsilon\dfrac{d^2R_0}{dx^2} + \varepsilon P_1'\dfrac{dR_0}{dx} + \dfrac{1}{2}\varepsilon P_1''R_0 = 0, \\ R_0(a,\varepsilon) = \delta \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1^{\varepsilon}[R_{2k+1}] \equiv \varepsilon \dfrac{d^2 R_{2k+1}}{dx^2} - \\ -\varepsilon P_1' \dfrac{dR_{2k+1}}{dx} - \dfrac{1}{2}\varepsilon P_1'' R_{2k+1} = 0, \\ R_{2k+1}(b,\varepsilon) = -R_{2k}(b,\varepsilon), \\ k = 0,1,2,\ldots \quad . \end{cases} \qquad (21)$$

$$\begin{cases} L_0^{\varepsilon}[R_{2k}] = 0, \\ R_{2k}(a,\varepsilon) = -R_{2k-1}(a,\varepsilon), \qquad k = 1,2,\ldots \quad , \end{cases}$$

представимы в виде $R_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^i \varphi_i^k(x)$. Система рекуррентных краевых задач, однозначно определяющих функции $\varphi_i^k(x)$, абсолютно аналогична соответствующим системам из § 2 и § 3 с определяющим операторами

$L_0 = -\sqrt{B^2-4C}\dfrac{d}{dx} - \dfrac{1}{2}(\sqrt{B^2-4C})' = -L_1$. Таким образом, решение краевой задачи (1) представимо в виде:

$$y = y(x,\varepsilon) = \exp\{-P_0\}\sum_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i[\sum_{k=0}^{+\infty}(\varphi_i^{2k} + \varphi_i^{2k+1} \cdot$$
$$\cdot \exp\{-P_1\})\exp\{-k(P_1+P_2)\}].$$

Случай $\alpha > 1$. Рассмотрим для задачи (1) (для задачи (16) построение асимптотики аналогично). Имеем:

$$P_0' = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4\varepsilon^{2(1-\alpha)}C + 2\varepsilon^{2-\alpha}B'}}{2\varepsilon^{2-\alpha}} =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon^{2-\alpha}}[B + \sqrt{B^2 - \frac{4C}{\varepsilon^{2\alpha-2}} + 2\varepsilon 2 - \alpha B'}] =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon^{2-\alpha}}[B + \frac{\sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)}B^2 - 4C + 2\varepsilon^{\alpha}B'}}{\varepsilon^{\alpha-1}}] =$$
$$= \frac{B}{2\varepsilon^{2-\alpha}} + \frac{2\sqrt{|C|}}{\varepsilon} + O(\varepsilon^{\min(1,\alpha-1)}).$$

Для $P_1(x,\varepsilon)$ имеем, в соответствии с (3),

$$P_1' = -\frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\sqrt{B^2 - \frac{4C}{\varepsilon^{2\alpha-2}} + \varepsilon^{2-\alpha}B'} =$$
$$= -\frac{2\sqrt{|C|}}{\varepsilon} + \varepsilon^{2\alpha-3}\frac{B^2}{2\sqrt{|C|}} + o(1).$$

Для того, чтобы выписывать приближения, необходимо найти вид определяющего оператора. Имеем:

$$L_0^{\varepsilon}[R_0] \equiv \varepsilon\frac{d^2R_0}{dx^2} - (2\sqrt{|C|} + \varepsilon^{\alpha}\frac{B'}{2\sqrt{|C|}} +$$
$$+O(\varepsilon^{2(\alpha-1)}))\frac{dR_0}{dx} - \frac{1}{2}(2\sqrt{|C|} +$$
$$+\varepsilon^{\alpha}\frac{B'}{2\sqrt{|C|}} + O(\varepsilon^{2(\alpha-1)}))'R_0 = 0.$$

Таким образом, определяющими операторами для членов регулярной части для задачи служит пара операторов:

$$L_0[\cdot] \equiv -2\sqrt{|C|}\frac{d}{dx} - (\sqrt{|C|})', = -L_1[\cdot].$$

Так как $\alpha > 1$, то с точностью до экспоненциально малых:

$$y = \exp\{-P_0\}\{\varphi_0^0(x)(1-\exp\{-P_1\}) +$$
$$+\varepsilon[(1-\exp\{-P_1\})\frac{1}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_a^b\frac{(\varphi_0^0)''}{\sqrt{\gamma(u)}}du +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\gamma(x)}}\int_b^x\frac{(\varphi_0^0)''}{\sqrt{\gamma(u)}}du]\}(1+0(\exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\}).$$

Далее нетрудно выписать первые приближения для производной и логарифмической производной.

Литература

1. Шалаумов, В. А. Об одном преобразовании линейного дифференциального оператора второго порядка / В. А. Шалаумов // Вестник КемГУ. – 2005. – Вып. 4. – С. 169 – 174.
2. Шалаумов, В. А Об асимптотике в целом решений задачи Дирихле с переносом сингулярно зависящей от малого параметра / В. А. Шалаумов // Наука и образование: материалы VII Международной конференции (28 – 29 февраля 2008 г.) – Вып. 5. – Ч. 1. – С. 685 – 688.
3. Шалаумов, В. А Об одном классе экспоненциально малых асимптотик / В. А. Шалаумов // Наука и образование: материалы VI Международной конференции (2 – 3 марта 2006 г.) – Вып. 4. – Ч. 1. – С. 585 – 588.