УДК 37.016:514

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

В. М. Финкельштейн

Даже в восприятии ученого-специалиста прочно и содержательно укладывается только то, над чем он активно работал.

А. Я. Хинчин

В учебнике геометрии учащимся предлагается готовое определение касательной. Оно сваливается на них (как и в других случаях), «как снег на голову». Не участвуя в составлении определения, они вынуждены заучивать его. Аналогично навязываются свойства касательной.

Чтобы учащиеся не только «слушали», но и поняли и усвоили новый материал, необходимо заинтересовать их и привлечь к его открытию. Ниже предлагается один из способов привлечь учащихся к составлению определения касательной к окружности, к участию в формулировке и доказательстве ее свойств. С этой целью учащимся предлагаются наводящие вопросы. Если правильный ответ сразу не получается, учитель предлагает более «прозрачный» наводящий вопрос. Рассмотрение неудачных ответов учащихся заняло бы здесь много места. Поэтому, для краткости, приведены лишь верные ответы учащихся.

Учитель: Прежде чем заняться сегодняшней темой, решим подготовительную задачу. Посмотрите на плакат (рис. 1) и скажите, *сколько общих точек имеют две прямые – пересекающиеся, параллельные и совпадающие?*

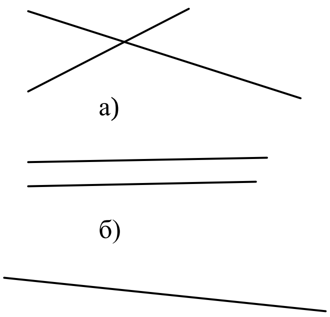

Рис. 1.

Комментарий. Эта задача предлагается, чтобы класс поработал с термином «общая точка».

– **Учащийся**: Если прямые пересекаются (рис. 1а), у них одна общая точка. Если параллельны (рис. 1б) – ни одной, если совпадают (рис. 1в) – бесконечное множество общих точек.

– А теперь решим задачу про окружность и прямую. Откройте тетради, постройте прямую и окружность. Что вы скажете об их взаимном расположении?

– Я построил две прямые, одна пересекает окружность, а другая не пересекает.

– Прямые могут быть расположены по-разному. Чтобы ничего не упустить, давайте примем во внимание расстояние прямой от центра окружности. Посмотрите на второй плакат (рис. 2). И что же мы видим? Прямая может быть удалена от центра окружности на расстояние больше радиуса, меньше радиуса и равное радиусу. Как вы думаете, с*колько общих точек с окружностью имеет прямая **а**, прямая **в** и пряма **р**?*

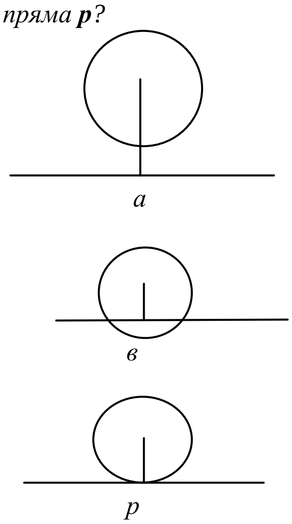

Рис. 2.

– Прямая *а* не имеет с окружностью общих точек, прямая *в* имеет две общие точки, а прямая *р* … Может быть, у них одна общая точка, а может быть, у них множество общих точек. Неясно**.**

Комментарий. Если учащийся сразу скажет, что третья прямая имеет с окружностью одну общую точку, учитель обязательно спросит, как это обосновать.

– Интересно все-таки узнать, *сколько общих точек имеет с окружностью прямая р*. Может быть, для прояснения вопроса стоит посмотреть, как получилась эта прямая. Построим еще одну окружность (рис. 3). Построили? Проведите радиус *ОА*. И еще проведите прямую через центр перпендикулярно радиусу *ОА*. Она пересечет окружность в двух точках: M_1 и M_2. А теперь немного поиграем – будем двигать прямую M_1M_2 ближе и ближе к точке *А*, но так, чтобы она оставалась перпендикулярной радиусу. Скажите, *что при этом происходит с точками пересечения*?

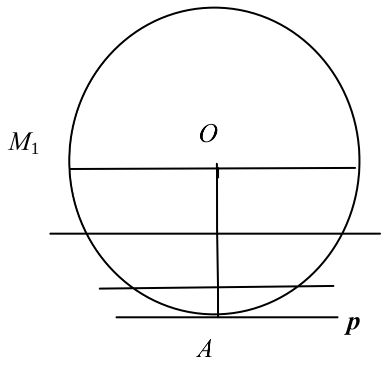

Рис. 3.

– Они сближаются. Расстояние между ними становится всё меньше и меньше.

*– А чем закончится процесс сближения точек, когда прямая M_1M_2 будет удалена от центра на расстояние, **в точности равное радиусу**?*

– Наверное, эти точки совпадут, сольются в одну. Теперь понятно, зачем мы двигали прямую M_1M_2. По-видимому, прямая p имеет с окружностью только одну общую точку.

– Итак, у нас есть *предположение*. Запишем его, я на доске, вы – в тетради.

«Прямая, имеющая с окружностью общую точку и перпендикулярная ее радиусу, проведенному в эту точку, других общих точек с окружностью не имеет».

Предположение надо проверить, не правда ли? Для доказательства удобнее записать это предположение в виде «если…, то…».

«Если прямая имеет с окружностью общую точку и перпендикулярна ее радиусу, проведенному в эту точку, то эта точка является единственной общей точкой прямой и окружности».

Сделаем чертеж (рис. 4).

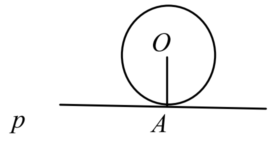

Рис. 4.

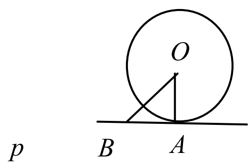

Рис. 5.

Построим окружность, проведем радиус OA, построим прямую p, перпендикулярно радиусу. *Что дано, что требуется доказать*?

– Дано: прямая p, окружность, их общая точка A и еще, что эта прямая перпендикулярна радиусу OA. Требуется доказать, что любая другая точка прямой p не лежит на окружности. А как это доказать?

– Посмотрим, что дано. По условию дана окружность. Вспомним: *каким свойством обладают точки окружности?*

– Все они одинаково удалены от центра.

– А нам нужно доказать, что любая другая точка прямой p не лежит на окружности.

– Значит, нужно взять на прямой p другую точку и убедиться, что ее расстояние до центра не равно радиусу.

– Верно. Возьмем на прямой p *произвольную* точку, не совпадающую с точкой A, например точку B (рис. 5). *Как найти ее расстояние до центра*?

– Надо соединить ее с центром. Построим отрезок OB. Теперь надо доказать, что отрезок OB не равен OA.

– OA – это перпендикуляр к прямой p. А OB – тоже перпендикуляр?

– Нет.

– Почему?

– Из точки O к прямой p можно провести только один перпендикуляр. Значит, OB – наклонная.

– Посмотрите, из точки O к данной прямой проведены перпендикуляр OA и наклонная OB.

– А наклонная всегда больше перпендикуляра. Значит, точка B удалена от центра дальше, чем точка A. Значит, она не лежит на окружности. Доказано, что точка A – единственная общая точка прямой и окружности.

– А иначе можно было доказать, что OB больше OA?

– Можно было воспользоваться тем, что гипотенуза больше катета.

– Отлично. Повторю главную мысль: мы взяли **произвольную** точку прямой p, не совпадающую с точкой A, и доказали, что она не лежит на окружности. Это значит, что **все** точки этой прямой, кроме точки A, не лежат на окружности. Следовательно, **прямая p и окружность имеют только одну общую точку**. Мы видим, что прямая p – особенная. Поэтому ей дали специальное название – **касательная**. Посмотрите, я чуть-чуть дотронулся пальцем до стола. Можно сказать – «*коснулся*» стола. Вы встречались со словом «коснулся»?

– Кто смотрит футбол, знает, если защитник вблизи ворот коснется рукой мяча, и мяч полетит в другом направлении, судья назначает пенальти.

– Это слово использовано в определении: «***Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности в этой точке, а эта общая точка – точкой касания».*** *Говорят еще, что «**прямая касается окружности в точке A**».* Мы с вами сейчас доказали, что касательная к окружности действительно существует. В отличие от касательной, ***прямую, пересекающую окружность в двух точках, называют секущей***.

Посмотрите, на рисунке 3 есть прямая p и прямая M_1M_2. Какая из них является секущей, какая касательной?

– Прямая M_1M_2 – секущая, а p – касательная.

– Теперь стало ясно, что наше решение учесть расстояние прямой от центра окружности было полезным.

– Иначе мы могли бы не обнаружить касательную к окружности.

– Используя определение касательной, мы можем доказанную теорему сформулировать короче: *«Если прямая имеет с окружностью общую точку и перпендикулярна ее радиусу, проведенному в эту точку, то эта прямая касается окружности».*

Хочу особо обратить ваше внимание на слово «**только**» в определении. Когда я скажу: «В моей комнате одно окно», никто не подумает, что два. Но вот другой пример. Представьте себе, что нам сообщили: «Один ученик принес в класс три яблока». *Что тут сообщается о другом ученике?*

– Ничего.

– Может быть, другой тоже принес три яблока? Если бы нам сказали иначе: «**Только** у одного ученика три яблока», это означало бы, что у других учеников нет трех яблок. Слово **только** отсекает (запрещает) другие возможности**.** Как командир, отдающий приказ. Итак, когда сказано «одна точка», это еще не значит «только одна».

Сегодня мы уже использовали слово «только», когда применяли теорему: «Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и только один». Что означает в этой теореме слова «только один»?

– Что всякий другой отрезок, соединяющий эту точку с прямой, не будет к ней перпендикулярен.

– Вернемся к нашему определению касательной. Вы знаете, что в определении важно каждое слово. Но вот кто-то, например Коля Сидоров, **дал определение касательной без слова «только»**. Забыл о нем. Как поступить в этой ситуации? Можно напомнить Коле это слово. Но где гарантия, что он снова не забудет? А главное, как убедить его, что слово «только» здесь необходимо? Я запишу **Колино определение** на доске:

«Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется касательной к окружности в этой точке». Обратите внимание, все есть, лишь опущено слово «только».

Посмотрим на прямую M_1M_2. Есть у нее общая точка с окружностью?

– Есть.

– Например, точка M_1. Итак, прямая M_1M_2 имеет с окружностью общую точку. Значит, эта прямая отвечает Колиному определению. Следовательно, **если принять Колино определение,** прямая M_1M_2 является касательной к окружности.

– Но у нее же две общих точки с окружностью!

– Верно, но *разве сказано в определении Коли, что касательная* ***не может, не может иметь две общие точки*** *с окружностью*?

– Нет, не сказано. А в нашем определении есть запрет. Приказано – **только одну!** Только одну, значит, уже две нельзя.

– Таким образом, если принять определение Коли, тогда и «наши» касательные, (как прямая ***p***), и секущие (как прямая M_1M_2) тоже будут «касательными». Вот что получится, если опустить в определении касательной слово «только»! Надеюсь, теперь все видят, какую роль в определении касательной играет слово «только».

В дальнейшем мы узнаем о других свойствах касательной, встретимся с интересными задачами про касательную к окружности, касательную к другим линиям. Близость касательной к линии широко используется в приближенных вычислениях. Решение задачи нахождения касательной к произвольной линии привело выдающегося немецкого математика Лейбница к созданию дифференциального исчисления, важного раздела высшей математики. Посмотрите, я положил шар на стол. В старших классах мы узнаем, что если плоскость касается поверхности шара, то его радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой плоскости.

А сейчас давайте решим задачу. Постройте в тетради окружность, отметьте какую-нибудь ее точку. Пусть это точка *А*. Итак, задача: *проведите касательную к окружности в точке А.* Расскажите, как вы строили.

– Проводим радиус в точку *А* и через нее проводим прямую, перпендикулярную этому радиусу. Согласно доказанной теореме, эта прямая – касательная.

– Правильно. Заметьте: для построения касательной мы воспользовались не определением, а **признаком** касательной. *Если прямая имеет с окружностью общую точку и перпендикулярна ее радиусу, проведенному в эту точку, этого достаточно, чтобы утверждать, что прямая касается окружности».* Доказанная нами теорема – это признак касательной.

Ну вот, теорема доказана, задачу мы решили и можем идти дальше.

Для решения многих задач важно выяснить, справедливо ли утверждение обратное доказанной теореме. *Сформулируем его.*

– *«Если прямая касается окружности…*

– в точке А,

– то она перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в эту точку».

– Как вы думаете, это утверждение справедливо?

– Похоже, что да. Но надо доказать его. Итак, дано: прямая p – касается окружности в точке A; требуется доказать, что $OA \perp p$.

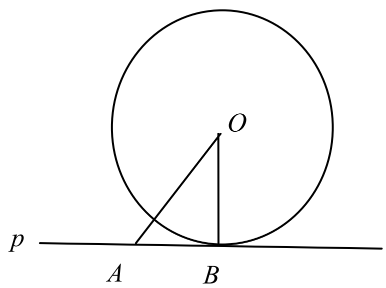

Рис. 6.

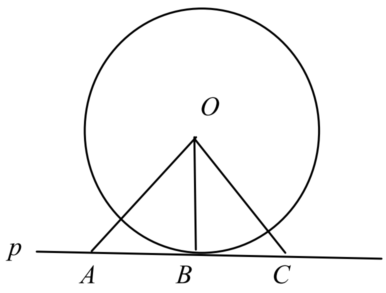

Рис. 7.

– Какие будут предложения? Никаких? *Какие методы доказательства мы знаем?*

– От противного. Допустим, прямая *OA* не перпендикулярна прямой *p*.

– Скажите, из точки всегда можно провести перпендикуляр к прямой?

– Да.

– Если радиус *OA* не перпендикулярен прямой *p*, значит, есть другой радиус окружности, который перпендикулярен прямой *p*. Проведем его. Пусть этот радиус пересекает прямую *p* в точке *B* (рис. 6). Так как мы стали доказывать теорему методом от противного, то нам, как вы знаете, нужно прийти к противоречию. При этом нередко получается противоречие с условием теоремы. *Вспомним, что у нас дано*?

– Нам дано, что точка *A* – единственная общая точка окружности и прямой.

– Я повторю, по условию теоремы точка *A* – единственная общая точка окружности и прямой. Если потом окажется, что она не единственная, значит, наше допущение (радиус *OA* не перпендикулярен прямой *p*) было неверным, и тогда …

– Тогда теорема будет доказана.

– Верно. Нам понадобится несложное *вспомогательное построение.* Отложим на прямой *p* от точки *B* отрезок *BC* = *AB* (рис. 7) и соединим точки *O* и *C.* Сравните треугольники *ABO* и *BCO.*

– Треугольники равны по двум катетам.

– А теперь сравните отрезки *OC* и *OA.*

– Они равны. Следовательно, точка *C* прямой *p* тоже лежит на окружности. Значит, точка *A* – не единственная общая точка прямой и окружности. Мы пришли к противоречию с условием. Теорема доказана.

– А для чего мы строили отрезок BC?

– Чтобы обнаружить вторую общую точку прямой и окружности. Мы же допустили, что прямая *OA* не перпендикулярна прямой *p*. Это допущение и привело к тому, что у прямой *p* появилась вторая общая точка с окружностью.

Комментарий. Примеры, наводящие вопросы, предложенные учителем, помогли учащимся высказать предположение о существовании единственной общей точки прямой *p* и окружности. Второе. **Определение касательной появилось лишь после того, как было доказано, что касательная действительно существует.** Когда было установлено, что касательная – это не выдумка учителя. Третье. Рассмотрение контрпримера **убеждает** учащихся в необходимости требования «только одна». Четвертое. Учитель не излагает доказательство, но с помощью наводящих вопросов привлекает учащихся к формулировке теоремы и к совместному поиску доказательства.

Когда же учащимся сообщают готовое определение касательной, оно усваивается не полностью, роль слова «только» в определении остается неизвестной. Это важное условие забывается, и тогда теряется смысл доказательства теорем о касательной. В самом деле, рассмотрим признак касательной: прямая, имеющая с окружностью общую точку и перпендикулярная ее радиусу, проведенному в эту точку, является касательной. Если требование «только одну» забыто, теряется цель доказательства – ведь уже дано, что прямая и окружность имеют общую точку! Что же тут доказывать?

Слово «только» неприметное, легко ускользает из внимания учащихся. Может быть, стоит отойти от традиции, и заменить в определении слова «только одну» словами «одну единственную»?

Выдающийся математик и педагог Александр Яковлевич Хинчин писал, что усилия учителя должны быть направлены на то, чтобы побудить «школьника усваивать материал в порядке активной работы над ним, всеми средствами насыщая эту работу элементами самостоятельности и хотя бы самого скромного творчества» [4, с. 124].

Литература

1. Александров, А. Д. Геометрия для 8 – 9 классов / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М., 1991.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. В. Кадомцев и др. – М., 1995.
3. Киселев, А. П. Геометрия / А. П. Геометрия. – М., 1955.
4. Хинчин, А. Я. Педагогические статьи / А. Я. Хинчин. – М., 1963.