УДК 519.6

О МНОГОМЕРНЫХ ВЕЙВЛЕТАХ С МАТРИЧНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ МАСШТАБИРОВАНИЯ

Н. К. Смоленцев

В данной работе установлены основные формулы теории вейвлетов с матричным коэффициентом масштабирования: условия ортогональности, формулы быстрого вейвлет-преобразования, условия на передаточные функции вейвлетов для разложения и точного восстановления сигнала.

1. Введение. Для анализа многомерных сигналов обычно используются вейвлеты, построенные на основе одномерных вейвлетов. Для общего случая вейвлетов с матричным коэффициентом масштабирования известны пока только самые общие факты о существовании таких вейвлетов [2 – 4]. При их построении возникают дополнительные трудности даже в простейшем случае построения аналогов вейвлетов Хаара. Носитель вейвлета может быть фрактальным множеством [1]. Вследствие этого данное направление теории вейвлетов развито пока в недостаточной степени. Нет систематического изложения данной темы. Поэтому имеет смысл установить основные формулы о многомерных вейвлетах с матричным коэффициентом масштабирования, хотя, возможно, что некоторые из них являются известными.

Многомерным сигналом будем называть массив действительных чисел $\{a_n\}$, где индекс n меняется во множестве $\mathbf{Z}^p$ всех наборов целых чисел, $n = (n_1,\dots, n_p)$, $p>1$. Если $n \in \mathbf{Z}^p$ и $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{C}^p$, то символом z^n будем обозначать моном вида $z^n = z_1^{n_1} \cdots z_p^{n_p}$. С каждым многомерным сигналом $\{a_n\}$ ассоциируется степенной ряд вида: $X(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} a_{n_1,\dots,n_p} z_1^{n_1} \cdots z_p^{n_p}$.

Нам потребуются также некоторые свойства многомерного преобразования Фурье. Пусть $f(x)\in L^1(\mathbf{R}^p)\cap L^2(\mathbf{R}^p)$. *Преобразование Фурье* функции $f(x)$ определяется формулой:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}^p} f(x) e^{-i(x,\omega)} d^p x,$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $(x,\omega) = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_p\omega_p$ и $d^n x = dx_1 dx_2 \dots dx_p$.

Преобразование Фурье в $\mathbf{R}^p$ обладает аналогичными свойствами, что и в одномерном случае. Отметим некоторые из них. Сдвиг пространственной переменной:

$$F[f(x-b)](\omega) = e^{-i(b,\omega)} \hat{f}(\omega). \tag{1}$$

Действие линейного оператора на x. Пусть $y = Ax$ – линейный невырожденный оператор в пространстве $\mathbf{R}^p$. Тогда

$$F[f(Ax)](\omega) = \frac{1}{|\det(A)|} \hat{f}((A^t)^{-1}\omega), \tag{2}$$

где $(A^t)^{-1}$ – обратная транспонированная матрица.

2. Масштабирующие функции. Масштабирующее соотношение для случая многомерного пространства $\mathbf{R}^p$ определяется совершенно аналогично одномерному случаю. Нужно считать, что $x = (x^1,\dots,x^p) \in \mathbf{R}^p$, $n = (n^1,\dots, n^p) \in \mathbf{Z}^p$. Вместо коэффициента масштабирования берется невырожденная целочисленная $p \times p$ матрица A, модули собственных чисел которой больше единицы. Рассмотрим тор $\mathbf{T}^p = \mathbf{R}^p/2\pi\mathbf{Z}^p$. Он является прямым произведением $\mathbf{T}^p = S^1\times\dots\times S^1$ единичных окружностей $S^1\subset \mathbf{C}$.

Определение 1. *Функция* $\varphi(x)\in L^2(\mathbf{R}^p)$ *называется A-масштабирующей, если она может быть представлена в виде следующего ряда:*

$$\varphi(x) = \sqrt{|\det A|} \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} h_n \varphi(Ax-n), \tag{3}$$

где числа $\{h_n\}$, $n\in \mathbf{Z}^p$, *удовлетворяют условию* $\sum_{n\in\mathbf{Z}^p} |h_n|^2 < \infty$. *Набор коэффициентов* $\{h_n\}$ *называется масштабирующим фильтром.*

Пусть $\varphi(x)$ – масштабирующая функция. Образуем следующие функции:

$$\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{|\det A|^j}\, \varphi(A^j x - n), \quad j\in \mathbf{Z}, n\in\mathbf{Z}^p. \tag{4}$$

Теорема 1. *Для любых* $j\in \mathbf{Z}$, $k\in \mathbf{Z}^p$ *имеет место следующее разложение:*

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} h_{n-Ak}\, \varphi_{j,n}(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} h_n\, \varphi_{j,n+Ak}(x). \tag{5}$$

Доказательство аналогично одномерному случаю, см. [6].

Сделаем преобразование Фурье масштабирующего соотношения (3):

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{|\det A|} \sum_{n\in\mathbf{Z}^d} h_n F[\varphi(Ax-n)] =$$

$$= \sqrt{|\det A|} \sum_{n\in\mathbf{Z}^d} h_n F[\varphi(A(x - A^{-1}n))] =$$

$$= \sqrt{|\det A|} \frac{1}{|\det(A)|} \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} h_n e^{-i(n,(A^t)^{-1}\omega)} \hat{\varphi}((A^t)^{-1}\omega) =$$

$$= H_0((A^t)^{-1}\omega)\hat{\varphi}((A^t)^{-1}\omega).$$

Окончательно получаем:

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_0((A^t)^{-1}\omega)\hat{\varphi}((A^t)^{-1}\omega), \tag{6}$$

где

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} h_n e^{-i(n,\omega)} \tag{7}$$

– частотная функция масштабирующей функции $\varphi(x)$. Отметим, что она определена на торе $\mathbf{T}^p = \mathbf{R}^p/2\pi\mathbf{Z}^p$.

3. *A*-кратномасштабное разложение. Определение ортогонального *кратномасштабного* разложения $\dots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots$ пространства $L^2(\mathbf{R}^p)$ с матричным коэффициентом масштабирования A точно такое же, что и в одномерном случае (см. [3] и [6]). Ортонормированный базис пространства V_0 образуют функции:

$$\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x-n), \quad n\in\mathbf{Z}^p.$$

Поскольку пространства V_j являются масштабированными версиями пространства V_0, то функции $\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{|\det A|^j}\varphi(A^j x - n), \quad n \in \mathbf{Z}^p$ образуют ортонормированный базис пространства V_j для любого j. Установим аналоги условия ортогональности.

Легко видеть, что функции $\varphi_n(x) = \varphi(x\text{-}n)$ образуют ортонормированный базис подпространства $V_0 \subset L^2(\mathbf{R}^p)$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^p} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1 \text{ п. в.} \tag{8}$$

Теорема 2. *Если сдвиги $\varphi_n(x) = \varphi(x\text{-}n)$ масштабирующей функции $\varphi(x)$ образуют ортонормированный базис подпространства V_0, то частотная функция $H_0(\omega)$ обладает следующим свойством*:

$$\sum_{j=0}^{N-1} |H_0(\omega + 2\pi (A^t)^{-1}(d_j))|^2 = 1 \quad \text{п. в.,} \tag{9}$$

где $d_j \in \mathbf{Z}^p/A^t\mathbf{Z}^p$ пробегает все элементы фактор-группы $\mathbf{Z}^p/A^t\mathbf{Z}^p$.

Доказательство. Подставим в (8) выражение (6):

$$1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}^p} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}^p} |H_0((A^t)^{-1}(\omega + 2\pi k))\hat{\varphi}((A^t)^{-1}(\omega + 2\pi k))|^2 =$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{Z}^p} |H_0((A^t)^{-1}\omega + 2\pi (A^t)^{-1}k)\hat{\varphi}((A^t)^{-1}\omega + 2\pi (A^t)^{-1}k)|^2 = [(A^t)^{-1}\omega = \varsigma] =$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{Z}^p} |H_0(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}k)\hat{\varphi}(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}k)|^2 .$$

Выберем по одному представителю из каждого класса конечной группы $\mathbf{Z}^p/A^t\mathbf{Z}^p$. Пусть это будут элементы $d_0 = 0, d_1, \dots, d_{N-1}$. Тогда целочисленная решетка $\mathbf{Z}^p$ является объединением следующих классов: $A^t\mathbf{Z}^p$, $d_1 + A^t\mathbf{Z}^p, \dots, d_{N-1} + A^t\mathbf{Z}^p$. Поэтому последняя сумма может быть разбита на N сумм следующим образом:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^p} |H_0(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}k)\hat{\varphi}(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}k)|^2 =$$

$$= \sum_{m \in \mathbf{Z}^p} \sum_{j=0}^{N-1} |H_0(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}(d_j + A^t m))\hat{\varphi}(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}(d_j + A^t m))|^2 =$$

$$= \sum_{m \in \mathbf{Z}^p} \sum_{j=0}^{N-1} |H_0(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}(d_j) + 2\pi m)\hat{\varphi}(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}(d_j) + 2\pi m)|^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m \in \mathbf{Z}^p} |H_0(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}(d_j) + 2\pi m)|^2 |\hat{\varphi}(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}(d_j) + 2\pi m)|^2 =$$

$$= |H_0(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}(d_0))|^2 + \dots + |H_0(\varsigma + 2\pi (A^t)^{-1}(d_{N-1}))|^2 = 1.$$

В последнем равенстве мы использовали 2π – периодичность функции $H_0(\omega)$ и равенство (8).

Таким образом, мы имеем следующие два *условия ортогональности*:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^p} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1 \text{ п. в.}$$

и

$$\sum_{j=0}^{N-1} |H_0(\omega + 2\pi (A^t)^{-1}(d_j))|^2 = 1 \quad \text{п. в.} \tag{10}$$

4. Вейвлеты с матрицей масштабирования *A*. Пусть A – некоторая невырожденная целочисленная $p \times p$ матрица и $N = |\det A|$. Предположим, что задано ортогональное N-кратномасштабное разложение пространства $L^2(\mathbf{R}^p)$ с масштабирующей функцией $\varphi(x) \in V_0$.

Определение 3. *Функции $\psi^1(x), \dots, \psi^{N-1}(x) \in L^2(\mathbf{R}^p)$ называются вейвлетами для A-масштабирующей функции $\varphi(x)$, если их целочисленные сдвиги образуют ортонормированные базисы подпространств $W_0^1, W_0^2, \dots, W_0^{N-1}$ в $L^2(\mathbf{R}^p)$, которые вместе с V_0 образуют ортогональное разложение пространства V_1*:

$$V_1 = V_0 \oplus W_0^1 \oplus \dots \oplus W_0^{N-1}. \tag{11}$$

Для любого j получаем следующее ортогональное разложение: $V_{j+1} = V_j \oplus W_j^1 \oplus \dots \oplus W_j^{N-1}$. Функции

$$\psi_{j,n}^l(x) = \sqrt{N^j}\psi^l(A^j x - n), \quad n \in \mathbf{Z}^p, \tag{12}$$

образуют ортонормированные базисы пространств $W_j^l,\ l = 1, 2, \dots, N-1$.

Поскольку $\psi^l(x) \in W_0^l \subset V_1$, то каждый вейвлет $\psi^l(\omega)$ раскладывается по базису функций пространства V_1:

$$\psi^l(x) = \sqrt{|\det A|}\sum_{n \in \mathbf{Z}^p} g_n^l \varphi(Ax - n), \ l = 1, \dots, N-1. \tag{13}$$

Числа $\{g_n^l\}$ называются фильтрами вейвлетов $\psi^l(x)$. Определим частотные функции вейвлетов $\psi^l(x)$:

$$H_l(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} g_n^l\, e^{-i(n,\omega)},\ l = 1,2,\ldots,N\text{-}1. \qquad (14)$$

5. Вейвлет-преобразование. Получим формулы быстрого вейвлет-преобразования. Предположим, что мы знаем приближение $P_j(f)$ функции $f(x)$ в пространстве V_j: $P_j(f) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^d} a_n \varphi_{j,n}(x)$,

где $a_n = (f, \varphi_{j,n})$.

Тогда, в соответствии с разложением $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}^1 \oplus \cdots \oplus W_{j-1}^{N-1}$, имеем:

$$P_j(f) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} a_{1,k}\varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{l=1}^{N-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}^p} d_{1,k}^l \psi_{j-1,k}^l(x),$$

где $a_{1,k} = (f, \varphi_{j-1,k})$ и

$d_{1,k}^l = (f, \psi_{j-1,k}^l),\ l = 1,2,\ldots,N-1$.

Выразим базисные функции $\varphi_{j-1,k}(x)$ и $\psi_{j-1,k}^l(x)$ в этих формулах через базисные функции $\varphi_{j,n}(x)$ пространства V_j по формулам (5):

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} h_n\ \varphi_{j,n+Ak}(x),$$

$$\psi_{j-1,k}^l(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} g_n^l\ \varphi_{j,n+Ak}(x), \quad l = 1,2,\ldots,N-1.$$

Тогда получаем:

$$a_{1,k} = \left(f, \varphi_{j-1,k}\right) = $$
$$= \left(f, \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} h_n \varphi_{j,n+Ak}\right) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} \overline{h_n}\, a_{n+Ak},$$

$$d_{1,k}^l = \left(f, \psi_{j-1,k}^l\right) = \left(f, \sum_{n\in\mathbf{Z}^d} g_n^l \varphi_{j,n+Ak}\right) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} \overline{g_n^l}\, a_{n+Ak},\ l = 1,2,\ldots,N-1.$$

Таким образом, для сигнала, заданного массивом $A = \{a_n\}$, вейвлет-разложение производится по формулам:

$$a_{1,k} = \sum_{n\in\mathbf{Z}^d} \overline{h_n}\, a_{n+Ak},$$

$$d_{1,k}^l = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} \overline{g_n^l}\, a_{n+Ak},\ l = 1,2,\ldots,N-1. \qquad (15)$$

Индекс Ak в сумме справа говорит о проведенной A-децимации, т. е. выборке элементов с номерами из решетки $A\mathbf{Z}^p$. Последние формулы можно записать в виде свертки. Для этого введем следующие коэффициенты: $h_n^* = \overline{h_{-n}}$, $g_n^{*l} = \overline{g_{-n}^l}$. Тогда:

$$a_{1,k} = \sum_{n\in\mathbf{Z}^d} h_n^*\, a_{Ak-n},$$

$$d_{1,k}^l = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} g_n^{*l}\, a_{Ak-n},\ l = 1,2,\ldots,N-1. \qquad (16)$$

Из данных формул следует, что вейвлет-разложение производится сопряженными фильтрами $\{h_n^*\}$, $\{g_n^{*l}\}$ с последующей A-адической децимацией (выбором только элементов с номерами из решетки $A\mathbf{Z}^p$).

Легко видеть [5], что восстановление массива $A = \{a_n\}$ по коэффициентам вейвлет-разложения $cA_1 = \{a_{1,k}\}$ и $cD_1 = \{d_k^1,\ldots,d_k^{N-1}\}$ производится следующим образом:

$$a_n = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} h_{n-Ak} a_{1,k} + \sum_{l=1}^{N-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}^p} g_{n-Ak}^l d_{1,k}^l. \qquad (17)$$

Последнюю формулу можно также записать в виде свертки, сделав обратную децимацию массивов $cA_1 = \{a_{1,k}\}$ и $cD_1 = \{d_k^1,\ldots,d_k^{N-1}\}$,

$$\tilde{a}_{1,m} = \begin{cases} a_{1,k}, \text{если } m = Ak, \\ 0, \text{если } m \notin A\mathbf{Z}^p \end{cases}$$

$$\tilde{d}_{1,m}^l = \begin{cases} d_{1,k}^l, \text{если } m = Ak, \\ 0, \text{если } m \notin A\mathbf{Z}^p \end{cases}$$

Тогда формула (17) принимает вид:

$$a_n = \sum_{m\in\mathbf{Z}^p} h_{n-m}\tilde{a}_{1,m} + \sum_{l=1}^{N-1}\sum_{m\in\mathbf{Z}^p} g_{n-m}^l \tilde{d}_{1,m}^l. \qquad (18)$$

6. Разложение и восстановление. Формулы вейвлет-разложения и восстановления (16) – (17) установлены только для ортогонального случая. Предположим, что разложение сигнала $\{a_k\}$ производится некоторыми (неортогональными) фильтрами $\{h_n^*\}$ и $\{g_n^{*l}\}$, $l = 1,2,\ldots, N\text{-}1$ по формулам (16) и найдем другие фильтры $\{\tilde{h}_n\}, \tilde{g}_n^l,\ l = 1,2,\ldots,N-1$, которые обеспечивают точное восстановление сигнала по формулам типа (18). Задачу удобно решить на уровне формальных степенных рядов. Определим передаточные функции заданных фильтров:

$$H_0(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} h_n^* z^n, \quad H_l(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} g_n^{*l} z^n, \quad l = 1,2,\ldots,N-1.$$

Как известно [5], действие фильтров $\{h_n^*\}$ и $\{g_n^{*l}\}$ на сигнал $\{a_k\}$ заключается в умножении соответствующего сигналу ряда $X(z)$ на $H_0(z)$ и $H_l(z)$:

$$X_0(z) = H_0(z)X(z), \quad X_l(z) = H_l(z)X(z),$$
$$l = 1,2,\ldots,N-1.$$

При вейвлет-разложении (16) необходимо еще провести A-децимацию, т. е. выборку элементов с номерами из решетки $A\mathbf{Z}^p$. На уровне формальных степенных рядов для этого достаточно удалить все слагаемые со степенями, отличными от z^{Ak}: $X(z) \to X_A(z^A) = X_A(w)$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_p$ – стандартный базис пространства $\mathbf{R}^p$. Если A – матрица с целыми элементами и $Ae_s = A_s^1 e_1 + \cdots + A_s^p e_p$ – образы базисных векторов, то определим следующие мономы:

$$w_1 = z^{Ae_1} = z_1^{A_1^1} z_2^{A_1^2} \cdots z_p^{A_1^p}, \ldots,$$

$$w_p = z^{Ae_p} = z_1^{A_p^1} z_2^{A_p^2} \cdots z_p^{A_p^p}.$$

Такой набор переменных $w = (w_1, \ldots, w_p)$ будем обозначать символом $w = z^A$. Отметим, что для любого целочисленного набора k имеет место равенство $z^{Ak} = w^k$. После A-децимации должен остаться многочлен $X_A(w)$ только от этих переменных w. Коэффициенты полученного ряда $X_A(w)$ дают требуемую A-децимацию.

Для транспонированной матрицы A^t рассмотрим решетку $A^t\mathbf{Z}^p$, порожденную векторами A^te_s, s = = 1,2, …, p, и конечную коммутативную группу $\mathbf{Z}^p/A^t\mathbf{Z}^p$ порядка $N = |\det A|$. Пусть $d_s \in \mathbf{Z}^p$, s = 0,1,…,N-1 – все элементы, представляющие классы группы $\mathbf{Z}^p/A^t\mathbf{Z}^p$, считаем, что $d_0 = 0$. Тогда целочисленная решетка $\mathbf{Z}^p$ является объединением следующих классов: $A^t\mathbf{Z}^p$, $d_1 + A^t\mathbf{Z}^p$, …, $d_{N-1} + A^t\mathbf{Z}^p$.

Для каждого для s = 0,1,…,N-1 рассмотрим вектор-столбцы координат векторов:

$$(A^t)^{-1}d_s \in \mathbf{R}^p:$$

$$(A^t)^{-1}d_s = (ad_{1s}, \dots, ad_{ps}).$$

Определим числа $\rho_{rs} = e^{-i2\pi\, ad_{rs}}$ и для s = 0,1,…,N-1 зададим вектор:

$$\rho_s = e^{-i2\pi (A^t)^{-1}d_s} = (e^{-i2\pi\, ad_{1s}}, \dots, e^{-i2\pi\, ad_{ps}}). \tag{19}$$

Определим умножение векторов ρ_s и $z = (z_1, \dots, z_p)$ покоординатно:

$$\rho_s z = e^{-i2\pi (A^t)^{-1}d_s} z = $$
$$= (e^{-i2\pi\, ad_{1s}} z_1, \dots, e^{-i2\pi\, ad_{ps}} z_p).$$

Тогда, если $c = (c_1, \dots, c_p) \in \mathbf{Z}^p$, то для монома z^c имеем следующую формулу умножения:

$$(\rho_s z)^c = e^{-i2\pi(d_s, A^{-1}c)} z^c.$$

Действительно,

$$(\rho_s z)^c = (e^{-i2\pi\, ad_{1s}} z_1)^{c_1} \cdots (e^{-i2\pi\, ad_{ps}} z_p)^{c_p} =$$
$$= e^{-i2\pi(ad_{1s}c_1 + \dots + ad_{ps}c_p)} (z_1^{c_1} \cdots z_p^{c_p}) =$$
$$= e^{-i2\pi(((A^t)^{-1}d_s, c))} z^c = e^{-i2\pi(d_s, A^{-1}c)} z^c.$$

Отсюда, в частности, следует, что для $Ac \in A\mathbf{Z}^p$ выполняется $(\rho_s z)^{Ac} = z^{Ac}$.

Проведем удаление степеней. Для этого рассмотрим следующие степенные ряды:

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} \begin{pmatrix} a_{An} z^{An} + a_{d_1+An} z^{d_1+An} + \cdots \\ \dots + a_{d_{N-1}+An} z^{d_{N-1}+An} \end{pmatrix},$$

$$X(\rho_1 z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} \begin{pmatrix} a_{An} z^{An} + a_{d_1+An} e^{-i2\pi(d_1, A^{-1}d_1)} z^{d_1+An} + \cdots \\ \dots + a_{d_{N-1}+An} e^{-i2\pi(d_1, A^{-1}d_{N-1})} z^{d_{N-1}+An} \end{pmatrix},$$

$$X(\rho_2 z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} \begin{pmatrix} a_{An} z^{An} + a_{d_1+An} e^{-i2\pi(d_2, A^{-1}d_1)} z^{d_1+An} + \cdots \\ \dots + a_{b_{N-1}+An} e^{-i2\pi(d_2, A^{-1}d_{N-1})} z^{d_{N-1}+An} \end{pmatrix},$$

$$\dots$$

$$X(\rho_{N-1} z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} \begin{pmatrix} a_{An} z^{An} + a_{d_1+An} e^{-i2\pi(d_{N-1}, A^{-1}d_1)} z^{d_1+An} + \cdots \\ \dots + a_{d_{N-1}+An} e^{-i2\pi(d_{N-1}, A^{-1}d_{N-1})} z^{d_{N-1}+An} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим числа на единичной окружности:

$$1,\ e^{-i2\pi(d_1, A^{-1}d_1)},\ e^{-i2\pi(d_2, A^{-1}d_1)},\ \dots,\ e^{-i2\pi(d_{N-1}, A^{-1}d_1)}.$$

Легко видеть, что они образуют группу порядка N. Это следует из того, что классы $A^t\mathbf{Z}^p$, $d_1 + A^t\mathbf{Z}^p$, …, $d_{N-1} + A^t\mathbf{Z}^p$ образуют группу $\mathbf{Z}^p/A^t\mathbf{Z}^p$. Действительно, например:

$$e^{-i2\pi(d_1, A^{-1}d_1)} e^{-i2\pi(d_2, A^{-1}d_1)} =$$
$$= e^{-i2\pi(d_1+d_2, A^{-1}d_1)} =$$
$$= e^{-i2\pi(d_1+d_2+A^t k, A^{-1}d_1)},\ k \in \mathbf{Z}^p.$$

Получается гомоморфизм группы $\mathbf{Z}^p/A^t\mathbf{Z}^p$ в группу S^1 чисел единичной окружности. Поэтому:

$$1 + e^{-i2\pi(d_1, A^{-1}d_1)} + e^{-i2\pi(d_2, A^{-1}d_1)} + \dots$$
$$+ e^{-i2\pi(d_{N-1}, A^{-1}d_1)} = 0.$$

Это верно для любой нетривиальной конечной группы в S^1. Совершенно аналогично, для любого s = 1,2, …,N-1 выполняется равенство:

$$1 + e^{-i2\pi(d_1, A^{-1}d_s)} + e^{-i2\pi(d_2, A^{-1}d_s)} + \dots$$
$$+ e^{-i2\pi(d_{N-1}, A^{-1}d_s)} = 0. \tag{20}$$

Произведем усреднение рядов, учитывая полученные равенства (20):

$$\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} X(\rho_s z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} a_{An} z^{An} +$$
$$+ \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbf{Z}^p} a_{b_1+An} z^{b_1+An} (1 + e^{-i2\pi(d_1, A^{-1}d_1)} + e^{-i2\pi(d_2, A^{-1}d_1)} + \dots + e^{-i2\pi(d_{N-1}, A^{-1}d_1)}) +$$
$$\dots$$
$$+ \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbf{Z}^p} a_{b_{N-1}+An} z^{b_{N-1}+An} (1 + e^{-i2\pi(d_1, A^{-1}b_{N-1})} + e^{-i2\pi(d_2, A^{-1}b_{N-1})} + \dots + e^{-i2\pi(d_{N-1}, A^{-1}b_{N-1})}) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} a_{An} z^{An} = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} a_{An} w^n = X_A(w)$$

– многочлен, содержащий только степени $w^n = z^{An}$. Таким образом, мы получили формулу децимации.

Теорема 4. *Если $X(z)$ – формальный степенной ряд, соответствующий сигналу $\{a_k\}$, то коэффициенты следующего ряда:*

$$\frac{1}{N}\left(X(z) + X(\rho_1 z) + X(\rho_2 z) + \cdots + X(\rho_{N-1} z)\right) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbf{Z}^p} a_{An} z^{An} = X_A(w) \tag{21}$$

относительно переменных $w = z^A$, дают A-децимацию сигнала $\{a_k\}$.

Следовательно, на уровне степенных рядов вейвлет-разложение производится по формулам:

$$X_0(w) = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} H_0(\rho_s z) X(\rho_s z),$$

$$X_l(w)=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}H_l(\rho_s z)X(\rho_s z),\quad l=1,2,\dots,N-1. \quad (22)$$

Образуем матрицу:

$$H(z)=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho_1 z) & \cdots & H_0(\rho_{N-1}z)\\ H_1(z) & H_1(\rho_1 z) & \cdots & H_1(\rho_{N-1}z)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho_1 z) & \cdots & H_{N-1}(\rho_{N-1}z)\end{pmatrix}. \quad (23)$$

Тогда разложение производится по формуле:

$$X(z)\to\begin{pmatrix} X_0(w)\\ X_1(w)\\ \dots\\ X_{N-1}(w)\end{pmatrix}= \quad (24)$$

$$=\frac{1}{N}\begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho_1 z) & \cdots & H_0(\rho_{N-1}z)\\ H_1(z) & H_1(\rho_1 z) & \cdots & H_1(\rho_{N-1}z)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho_1 z) & \cdots & H_{N-1}(\rho_{N-1}z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(z)\\ X(\rho_1 z)\\ \dots\\ X(\rho_{N-1}z)\end{pmatrix}.$$

Из равенства:

$$X(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^p}\left(a_{An}z^{An}+a_{d_1+An}z^{d_1+An}+\dots+a_{d_{N-1}+An}z^{d_{N-1}+An}\right)=$$

$$=\sum_n\left(a_{An}z^{An}+z^{d_1}a_{d_1+An}z^{An}+\dots+z^{d_{N-1}}a_{d_{N-1}+An}z^{An}\right)=$$

$$=\sum_n\left(a_{An}z^{An}+z^{d_1}a_{d_1+An}z^{An}+\dots+z^{d_{N-1}}a_{d_{N-1}+An}z^{An}\right)=$$

$$=\sum_n a_{An}z^{An}+z^{d_1}\sum_n a_{d_1+An}z^{An}+\dots+z^{d_{N-1}}\sum_n a_{d_{N-1}+An}z^{An}=$$

$$=B_0(w)+z^{d_1}B_1(w)+\dots+z^{d_{N-1}}B_{N-1}(w),$$

где $w=z^A$, мы видим, что полифазные слагаемые $B_j(w)$ можно выделить по формуле (21), примененной к $z^{-d_j}X(z)$. Для матрицы фильтров $H(z)$ определим полифазную матрицу $B(w)$ по формуле:

$$B_{i,j}(w)=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}(\rho_s z)^{-d_j}H_i(\rho_s z),\quad z\in\mathbf{T}^p=\mathbf{R}^p/2\pi\mathbf{Z}^p.$$

Легко видеть, что сумма справа зависит от $w=z^A$. Обратное преобразование определяется формулой:

$$H_i(z)=\sum_{j=0}^{N-1}B_{i,j}(z^A)\,z^{d_j},\quad z\in\mathbf{T}^p=\mathbf{R}^p/2\pi\mathbf{Z}^p. \quad (25)$$

Тогда последнее соотношение (25) может быть представлено как:

$$H(z)=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho_1 z) & \cdots & H_0(\rho_{N-1}z)\\ H_1(z) & H_1(\rho_1 z) & \cdots & H_1(\rho_{N-1}z)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho_1 z) & \cdots & H_{N-1}(\rho_{N-1}z)\end{pmatrix}= \quad (26)$$

$$=B(z^A)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ z^{d_1} & (\rho_1 z)^{d_1} & \cdots & (\rho_{N-1}z)^{d_1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ z^{d_{N-1}} & (\rho_1 z)^{d_{N-1}} & \cdots & (\rho_{N-1}z)^{d_{N-1}}\end{pmatrix}.$$

Здесь матрица

$$R(z)=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ z^{d_1} & (\rho_1 z)^{d_1} & \cdots & (\rho_{N-1}z)^{d_1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ z^{d_{N-1}} & (\rho_1 z)^{d_{N-1}} & \cdots & (\rho_{N-1}z)^{d_{N-1}}\end{pmatrix}$$

является унитарной на торе $\mathbf{T}^p=S^1\times\ldots\times S^1$. Действительно, для $z=(z_1,\dots,z_p)\in\mathbf{T}^p$, используя равенство $\overline{z}=z^{-1}=(z_1^{-1},\dots,z_p^{-1})$, получаем элементы произведения $NR(z)R^*(z)$:

$$(\rho_0 z)^{d_i}\,\overline{(\rho_0 z)}^{d_j}+(\rho_1 z)^{d_i}\,\overline{(\rho_1 z)}^{d_j}+\dots$$
$$+(\rho_{N-1}z)^{d_i}\,\overline{(\rho_{N-1}z)}^{d_j}=$$
$$=z^{d_i-d_j}+(\rho_1 z)^{d_i-d_j}+\dots+(\rho_{N-1}z)^{d_i-d_j}=$$
$$z^{d_i-d_j}(1+\rho_1^{d_i-d_j}+\dots+\rho_{N-1}^{d_i-d_j})=N\delta_{ij}.$$

Действительно, если $c=d_i$-d_j., то $\rho_s^{d_i-d_j}=e^{-i2\pi(d_s,A^{-1})}$ и числа $1,e^{-i2\pi(d_1,A^{-1}c)},e^{-i2\pi(d_2,A^{-1}c)},\dots,e^{-i2\pi(d_{N-1},A^{-1}c)}$ образуют при $i\neq j$ конечную нетривиальную группу чисел на единичной окружности. Поэтому

$$1+e^{-i2\pi(d_1,A^{-1}c)}+e^{-i2\pi(d_2,A^{-1}c)}+\dots+e^{-i2\pi(d_{N-1},A^{-1}c)}=0.$$

В выражении (26) матрица $B(w)$ является уже произвольной невырожденной матрицей с полиномиальными элементами. Специфика матрицы $H(z)$ отражена теперь в матрице $R(z)$. Задавая $B(w)$, мы можем построить матрицу $H(z)$ и вместе с ней частотные функции $H_1(\omega)$, … , $H_{N-1}(\omega)$ вейвлетов, следовательно, и сами вейвлеты $\psi^1(x)$, … , $\psi^{N-1}(x)$.

Восстановление производим другими фильтрами: $G_l(z)=\sum_n\tilde{g}_n^l z^n$, $l=0,1,2,\dots,N-1$ по формуле (18). На уровне степенных рядов обратная децимация эквивалентна замене степенного ряда $X(w)$ по степеням переменной w на ряд $X(z^A)$, по степеням переменной z, $X(w)\to X(z^A)$. Поэтому восстановление на уровне степенных рядов делается по формуле:

$$\sum_{l=0}^{N-1}G_l(z)X_l(z^A)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}G_l(z)\sum_{s=0}^{N-1}H_l(\rho_s z)X(\rho_s z)=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1}G_l(z)H_l(\rho_s z)\right)X(\rho_s z)=X(z).$$

Поэтому для точного восстановления достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\sum_{l=0}^{N-1}G_l(z)H_l(z)=N\ \text{(при } s=0\text{)},$$

$$\sum_{l=0}^{N-1}G_l(z)H_l(\rho^s z)=0\ \text{ для } s=1,2,\dots,N-1.$$

Данные условия точного восстановления удобно выразить через матрицы фильтров разложения и восстановления в виде:

$$\begin{pmatrix} G_0(z) & G_1(z) & \cdots & G_{N-1}(z) \\ G_0(\rho z) & G_1(\rho z) & \cdots & G_{N-1}(\rho z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_0(\rho^{N-1}z) & G_1(\rho^{N-1}z) & \cdots & G_{N-1}(\rho^{N-1}z) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho z) & \cdots & H_0(\rho^{N-1}z) \\ H_1(z) & H_1(\rho z) & \cdots & H_1(\rho^{N-1}z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho z) & \cdots & H_{N-1}(\rho^{N-1}z) \end{pmatrix} = N.$$

Мы получили следующий факт.

Теорема 5. *Если матрица $H(z)$ фильтров разложения невырождена при $z \in \mathbf{T}^p$, то возможно точное восстановление сигнала фильтрами $G_l(z)$, $l = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, матрица которых:*

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} G_0(z) & G_0(\rho z) & \cdots & G_0(\rho^{N-1}z) \\ G_1(z) & G_1(\rho z) & \cdots & G_1(\rho^{N-1}z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{N-1}(z) & G_{N-1}(\rho z) & \cdots & G_{N-1}(\rho^{N-1}z) \end{pmatrix} \quad (27)$$

является транспонированной к обратной матрице $H(z)$ исходных фильтров.

Замечание. В ортогональном случае $H(z)$ – унитарная матрица, а $G(z)$ – комплексно сопряженная к $H(z)$. В общем случае для нахождения фильтров восстановления необходимо найти матрицу, обратную к $H(z)$.

Литература

1. Bratteli, O. Iterated function systems and permutation representations of the Cuntz algebra / O. Bratteli, P. E. T. Jorgensen // arXiv.org: funct-an/9612002v1. – 1996. – 84 p.

2. Bratteli, O. Wavelet filters and infinite-dimensional unitary groups / O. Bratteli, P. E. T. Jorgensen // arXiv.org: math.FA/0001171v3. – 2000. – 31 p.

3. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М.; Ижевск: РХД, 2001. – 494 с.

4. Jorgensen, P. E. T. Matrix Factorizations, Algorithms, Wavelets / P. E. T. Jorgensen // Notices Amer. Math. Soc. – 2003. – Vol. 50, no. 8. – P. 880 – 894. (Электронный вариант статьи: www.math.uiowa.edu/ ~jorgen/fea-jorgensen.pdf).

5. Podkur, P. N. Construction of some types wavelets with coefficient of scaling N / P. N. Podkur, N. K. Smolentsev // arXiv.org: math.FA/0612573v1. – 2006. – 19 p.

6. Смоленцев, Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. – М., ДМК-Пресс, 2008. – 448 с.