УДК 514.76

КОНТАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ ТОЧНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ

Я. В. Славолюбова

В данной статье рассматриваются контактные алгебры Ли, построенные на основе точных симплектических алгебр Ли. Найдено семейство нормальных ассоциированных контактных метрических структур. Вычислены секционные кривизны, скалярные кривизны ассоциированных метрик и квадраты норм тензоров кривизны, Риччи и тензора кручения $N^{(1)}$.

1. Предварительные сведения. Напомним, что дифференцируемое $(2n+1)$-мерное многообразие M класса C^∞ называется контактным, если на нем задана дифференциальная 1-форма η, такая что $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1}. Форма η называется контактной формой. Контактная форма определяет на многообразии M^{2n+1} распределение $D = \{X\in TM^{2n+1} \mid \eta(X) = 0\}$ размерности $2n$, которое называется контактным. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое ξ, которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi,X) = 0$, для всех векторных полей X на M^{2n+1}. Векторное поле ξ определяет 1-мерное распределение, дополнительное к D. Векторное поле ξ называется *полем Риба* или характеристическим векторным полем контактной структуры.

Если M^{2n+1} – контактное многообразие с контактной формой η, то контактной метрической структурой называется четверка (η, ξ, φ, g), где ξ – поле Риба, g – риманова метрика и φ – аффинор на M^{2n+1}, для которой имеют место следующие свойства:

1) $\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi$,
2) $d\eta(X,Y) = g(\varphi X,Y)$,
3) $g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$,

где I – тождественный эндоморфизм касательного расслоения.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной. Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффинором φ:

$$g(X,Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y). \tag{1}$$

Поэтому мы ассоциированные метрики будем задавать аффинором φ. Отметим также, что аффинор φ действует как почти комплексная структура на контактном распределении D.

Контактная метрическая структура называется структурой Сасаки, если интегрируема почти комплексная структура J, определенная формулой $J(X, fd/dt) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)d/dt)$, где $X\in M^{2n+1}$, $t\in \mathbf{R}$, f – функция класса C^∞ на $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$, $J^2 = -I$.

На контактном многообразии определены четыре тензора $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$ следующими выражениями [1]:

$$N^{(1)}(X,Y) = [\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi, \quad N^{(2)}(X,Y) =$$
$$= (L_{\varphi X}\,\eta)(Y) - (L_{\varphi X}\,\eta)(X),$$
$$N^{(3)}(X,Y) = (L_\xi\varphi)X, \quad N^{(4)}(X,Y) = (L_\xi\eta)(X).$$

Как известно [1], тензор $N^{(3)}$ обращается в нуль, если и только если характеристическое векторное поле ξ является киллинговым относительно метрики g.

Пусть M^{2n+1} контактное метрическое многообразие, такое что η – контактная форма и (η,ξ,φ,g) – ассоциированная почти контактная метрическая структура. Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий, то есть ξ – векторное поле Киллинга относительно g, то такую контактную метрическую структуру называют K-контактной [1]. Контактная метрическая структура является K-контактной, если и только если $L_\xi\varphi = N^{(3)} = 0$ [1].

Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли G, то естественно рассматривать левоинвариантные контактные структуры. В этом случае контактная форма η, векторное поле Риба ξ, аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице, т. е. на алгебре Ли $L(G)$ группы Ли G.

2. Методы контактизации. Существует несколько методов построения контактной алгебры Ли из симплектической алгебры Ли. Напомним, что симплектической группой Ли (H, ω_H) называется группа Ли H с заданной на ней замкнутой невырожденной левоинвариантной 2-формой ω_H. Поскольку левоинвариантная симплектическая форма ω_H определяется своим значением в единице $\omega = \omega_H(e)$, то пара $(L(H), \omega)$ называется симплектической алгеброй Ли. Напомним два классических метода “контактизации”.

2.1. Центральное расширение. Этот метод дает только такие контактные группы Ли, которые имеют одномерный центр. Если имеется симплектическая алгебра Ли $(L(H), \omega)$, то можно построить центральное расширение $L(G) = L(H)\times_\omega\mathbf{R}$ при помощи невырожденного 2-коцикла ω. Скобки Ли задаются следующим образом:

$$[X, e_0]_{L(G)} = 0, \quad [X, Y]_{L(G)} = [X, Y]_{L(H)} + \omega(X, Y)e_0$$

для любых $X, Y \in L(H)$ и e_0 – базисный вектор из $\mathbf{R}$, (мы будем иногда использовать обозначение) $e_0 \in \mathbf{R}e_0$. В результате получается контактная алгебра Ли с центром $Z(L(G)) = \mathbf{R}e_0$ и контактной формой $\eta = -e^0$, где e^0 – ковектор, обладающий свойствами $e^0(e_0) = 1$ и $e^0(L(H)) = 0$.

Когда пространство $\mathbf{R}$ рассматривается как векторное пространство с базисным (единичным) вектором e_0, мы будем использовать обозначение $\mathbf{R}e_0$.

2.2. Контактизация на основе точных симплектических групп Ли. Можно также построить контактные группы Ли из точных симплектических групп Ли. Напомним, что симплектическая алгебра Ли ($L(H)$, ω) называется точной симплектической, если форма ω является дифференциалом $d\alpha = \omega$ левоинвариантной формы α. Если имеется точная симплектическая алгебра ($L(H)$, $d\alpha$), то на прямом произведении $L(G) = L(H)\times\mathbf{R}e_0$ в качестве контактной формы берется 1-форма

$$\eta = se^0 + \alpha,$$

где $s\neq 0$ – некоторое вещественное число. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = (1/s)e_0$.

Теорема 1. *Если симплектическая алгебра Ли* ($L(H)$, ω) *является точной симплектической,* $\omega = d\alpha$, *то контактные расширения* ($L(H)\times_\omega\mathbf{R}$, $\eta = -e^0$) *и* ($L(H)\times\mathbf{R}$, $\eta = se^0 + \alpha$) *являются изоморфными при любом значении параметра* $s \neq 0$.

Доказательство. Выберем базис ($e_1,\ldots, e_{2n}$) в алгебре Ли $L(H)$, в котором симплектическая форма ω имеет вид:

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + \cdots + e^{2n-1} \wedge e^{2n}, \ \alpha = -e^1,$$

где e^i – ковекторы, дуальные к e_i. Отметим, что из уравнений Маурера-Картана $de^k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k e^i \wedge e^j$

и из условия $\omega = d\alpha$ следует, что

$c_{ij}^1 = \omega_{ij}, \quad i,j = 1,\cdots,2n$, где c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $L(H)$.

Тогда в базисе ($e_0, e_1,\ldots, e_{2n}$) алгебры Ли $L(H)\times_\omega\mathbf{R}$ скобки Ли имеют вид:

$$C_{i0}^k = 0, \quad C_{ij}^0 = \omega_{ij}, \quad C_{ij}^k = c_{ij}^k, \quad i,j,k = 1,\cdots,2n.$$

Рассмотрим теперь алгебру Ли ($L(H)\times\mathbf{R}$, $\eta = se^0 - e^1$) и выберем в ней базис ($E_0, E_1, \ldots, E_{2n}$) следующим образом:

$$E_0 = -(1/s)e_0, \ E_1 = (1/s)e_0 + e_1, \ E_2 = e_2, \ \ldots, E_{2n} = e_{2n}.$$

Тогда очевидно, что в этом базисе ковектор E^0, дуальный к E_0, будет таким: $E^0 = -se^0 + e^1$. Это означает, что $\eta = -E^0$. Найдем скобки Ли C_{ij}^k в данном базисе. Очевидно, что $C_{i0}^k = 0, \quad i,k = 1,\cdots,2n$. Для остальных скобок Ли имеем:

$$C_{ij}^k E_k = [E_i, E_j] = [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k = c_{ij}^1 (E_0 + E_1) +$$
$$+ c_{ij}^2 E_2 + \cdots + c_{ij}^{2n} E_{2n}, \quad i,j,k = 1,\cdots, 2n.$$

Поэтому, $C_{ij}^k = c_{ij}^k, \quad i,j,k = 1,\cdots,2n$ и

$C_{ij}^0 = c_{ij}^1 = \omega_{ij}, \quad i,j = 1,\cdots,2n$. В выбранном базисе E_i алгебры Ли $L(H)\times\mathbf{R}$ скобки Ли совпали со скобками Ли в базисе e_i алгебры Ли $L(H)\times_\omega\mathbf{R}$, поэтому данные алгебры изоморфны. Кроме того, контактная структура в каждом случае задается одним и тем же вектором базиса, $\eta = -e^0$ и $\eta = -E^0$.

Теорема доказана.

Отметим, что при контактном расширении ($L(H)\times\mathbf{R}e_0$, $\eta = se^0+\alpha$) числовой коэффициент s можно считать равным единице $s = 1$. Если это не так, то в качестве базисного вектора $e_0\in \mathbf{R}$ можно взять вектор $(1/s)e_0$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $s = 1$ и $\eta = e^0+\alpha$.

Пусть (H,ω) – симплектическая группа Ли. Рассмотрим прямое произведении $H\times\mathbf{R}$. Пусть $\pi: H\times\mathbf{R} \to H$ – естественная проекция.

Лемма. *Левоинвариантная почти келерова структура* ($L(H)$, $\omega = d\alpha$, J_H, g_H) *на точной симплектической группе Ли* (H, $\omega = d\alpha$) *однозначно определяет левоинвариантную K-контактную метрическую структуру* (η, ξ, φ, g) *на контактном расширении* ($L(H)\times\mathbf{R}e_0$, $\eta = e^0+\alpha$).

Доказательство. Пусть на точной симплектической группе Ли (H,ω) задана левоинвариантная почти комплексная структура J_H, обладающая свойствами: $\omega(J_HX,J_HY) = \omega(X,Y)$ и $g_H(X,Y) = \omega(X,J_HY)$, для $X,Y\in L(H)$. Рассмотрим контактное расширение ($L(H)\times\mathbf{R}e_0$, $\eta = e^0+\alpha$). Очевидно, что поле Риба есть параллельное вдоль $\mathbf{R}$ векторное поле e_0. Естественно возникает левоинвариантный аффинор φ, обладающий свойствами: $\varphi(\xi) = 0$, контактное распределение D инвариантно относительно φ и $d\pi(\varphi(V)) = J_H(d\pi(V))$ для $V\in L(H)\times\mathbf{R}e_0$. Определим левоинвариантную риманову метрику g на $H\times\mathbf{R}$, полагая, что $g(e_0)=1$, $D\perp e_0$ и

$g(U,V) = g_H(d\pi(U), d\pi(V))$ для $U,V\in D$. Эта метрика очевидно сохраняется при сдвигах вдоль второй компоненты $\mathbf{R}$ прямого произведения $H\times\mathbf{R}$. Тогда, учитывая, что $J_H^2 = -I$ и $\omega = d\eta$, легко видеть, что выполнены все свойства для контактной метрической структуры: $\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi$, $d\eta(X,Y) = g(\varphi X,Y)$ и $g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$. Из инвариантности метрического тензора g относительно сдвигов вдоль поля Риба e_0, т. е. вдоль $\mathbf{R}$, следует K-контактность (η, ξ, φ, g) на контактном расширении ($L(H)\times\mathbf{R}e_0$, $\eta = e^0+\alpha$).

Теорема 2. *Точная симплектическая алгебра Ли* ($L(H)$, $\omega = d\alpha$) *обладает левоинвариантной келеровой структурой* ($L(H)$, $\omega = d\alpha$, J_H, g_H) *тогда и только тогда, когда контактное расширение* ($L(H)\times\mathbf{R}e_0$, $\eta = e^0+\alpha$) *обладает левоинвариантной K-контактной структурой Сасаки* (η, $\xi = e_0$, φ, g).

Доказательство. Из леммы следует, что левоинвариантная почти келерова структура ($L(H)$, $\omega = d\alpha$, J_H, g_H) на точной симплектической группе Ли (H, $\omega = d\alpha$) однозначно определяет левоинвариантную K-контактную метрическую структуру (η, ξ, φ, g). Она будет структурой Сасаки, если интегрируема левоинвариантная почти комплексная структура J на группе $H\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ определенная на ее алгебре Ли $L(H)\times\mathbf{R}e_0\times\mathbf{R}e$ формулой $J(X, ae) = (\varphi X - ae_0, \eta(X)e)$, где $X\in L(H)\times\mathbf{R}e_0$ и e – базисный вектор из $\mathbf{R}$. При этом, если $V\in D$, $J(V) = J(V, 0) = (\varphi V, \eta(V)e) = (\varphi V, 0) = \varphi V$. Пространство $\mathbf{R}e_0\times\mathbf{R}e$ также инвариантно относительно J и на нем J определяет стандартную комплексную структуру, $\mathbf{R}\times\mathbf{R} = \mathbf{C}$, $J(e) = J(0, e) = (-e_0, 0) = -(e_0, J(e_0)) = J(e_0,0) = (0, e) = e$.

Выберем базис ($e_1,\ldots, e_{2n}$) в алгебре Ли $L(H)$, в котором потенциал α симплектической формы ω является ковектором, дуальным к e_1, $\alpha = e^1$. Отметим, что из уравнений Маурера-Картана

$de^k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k e^i \wedge e^j$ и из условия $\omega = d\alpha$ следует, что $c_{ij}^1 = \omega_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, 2n$, где c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $L(H)$. Рассмотрим теперь контактную алгебру Ли ($L(H)\times\mathbf{R}$, $\eta = e^0 - e^1$) и выберем в ней базис ($E_0, E_1, ..., E_{2n}$) так, чтобы векторы ($E_1, ..., E_{2n}$) образовывали бы базис контактного распределения и соответствовали бы базису ($e_1, \ldots, e_{2n}$) при проекции $\pi: H\times\mathbf{R} \to H$, а вектор E_0 совпадал бы с полем Риба:

$E_0 = -e_0$, $E_1 = e_0 + e_1$, $E_2 = e_2$, …, $E_{2n} = e_{2n}$.

Тогда очевидно, что в этом базисе ковектор E^0, дуальный к E_0, будет таким: $E^0 = -e^0 + e^1$. Это означает, что $\eta = -E^0$. Найдем скобки Ли C_{ij}^k в данном базисе. Очевидно, что $C_{i0}^k = 0, \quad i, k = 1, \cdots, 2n$. Для остальных скобок Ли имеем:

$$C_{ij}^k E_k = [E_i, E_j] = [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k = c_{ij}^1 (E_0 + E_1) + c_{ij}^2 E_2 + \cdots + c_{ij}^{2n} E_{2n}, \quad i, j, k = 1, \cdots, 2n.$$

Поэтому,

$C_{ij}^k = c_{ij}^k, C_{0j}^k = C_{i0}^k = 0, \quad i, j, k = 1, \cdots, 2n$ и

$C_{ij}^0 = c_{ij}^1 = \omega_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, 2n$.

Рассмотрим группу $H\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Базисный вектор дополнительного пространства $\mathbf{R}$ обозначим e_{-1}. Структурные константы алгебры Ли $L(H)\times\mathbf{R}e_0\times\mathbf{R}e_{-1}$ являются нулевыми, когда хотя бы один из индексов есть -1 и совпадают с C_{ij}^k в остальных случаях.

Предположим, что почти комплексная структура J_H на группе H интегрируема, т. е. ее тензор Нейенхейса $N(X,Y) = 2([JX,JY]-[X,Y]-J[X,JY]- J[JX,Y])$ равен нулю. Покажем интегрируемость левоинвариантной почти комплексной структуры J на группе $H\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, определенной на ее алгебре Ли $L(H)\times\mathbf{R}e_0\times\mathbf{R}e_{-1}$ формулой $J(X, ae_{-1}) = (\varphi X - ae_0, \eta(X)\, e_{-1})$, где $X\in L(H)\times\mathbf{R}e_0$. Вычислим тензор Нейенхейса для J на всех возможных векторах из $L(H)\times\mathbf{R}e_0\times\mathbf{R}e_{-1}$. Будем использовать то, что контактное подпространство D и пространство $\mathbf{R}e_0\times\mathbf{R}e_{-1}$ инвариантны относительно J и то, что векторы из $\mathbf{R}e_0\times\mathbf{R}e_{-1}$ коммутируют с векторами из D. Тогда имеем:

$$N(e_0, e_{-1}) = 2([Je_0,Je_{-1}]-[e_0,e_{-1}]- J[e_0,Je_{-1}]- J[Je_0,e_{-1}]) = 0,$$
$$N(e_0, V) = 2([Je_0,JV]-[e_0,V]- J[e_0,JV]- J[Je_0,V]) = 0, \quad V\in D,$$
$$N(e_{-1}, V) = 2([Je_{-1},JV]-[e_{-1},V]- J[e_{-1},JV]- J[Je_{-1},V]) = 0, \quad V\in D.$$

Покажем, что $N(U, V) = 2([JU,JV]-[U,V]-J[U,JV]- J[JU,V]) = 0$ для любых $U,V\in D$, т. е. покажем, что равны нулю компоненты тензора Нейенхейса, $N_{ij}^k = 0$. Поскольку $U,V\in D$, то можно считать, что $i,j = 1,2, \ldots, 2n$. В базисе ($E_1, ..., E_{2n}$) контактного распределения D компоненты оператора J совпадают с компонентами почти комплексной структуры J_H на $L(H)$, кроме того, совпадают и структурные константы, поэтому $N_{ij}^k = 0, i, j, k = 1,...,2n$. Легко также видеть, что равна нулю и компонента тензора Нейенхейса в направлении $\mathbf{R}e_{-1}$, $N_{ij}^{-1} = 0, i, j = 1,...,2n$. Осталось показать, что $N_{ij}^0 = 0$. Для левоинвариантной почти комплексной структуры тензор Нейенхейса легко выражается через структурные константы:

$$N_{ij}^k = 2(J^l_i J^m_j C_{lm}^k - C_{ij}^k - J^k_m J^l_j C_{il}^m - J^k_m J^l_i C_{lj}^m).$$

Тогда получаем:

$$N_{ij}^0 / 2 = J^l_i J^m_j C_{lm}^0 - C_{ij}^0 - J^0_m J^l_j C_{il}^m - J^0_m J^l_i C_{lj}^m =$$
$$= J^l_i J^m_j C_{lm}^0 - C_{ij}^0 - J^0_{-1} J^l_j C_{il}^{-1} - J^0_{-1} J^l_i C_{lj}^{-1} =$$
$$= J^l_i J^m_j C_{lm}^0 - C_{ij}^0 = J^l_i J^m_j \omega_{lm} - \omega_{ij} = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что $\omega(J_H X, J_H Y) = \omega(X,Y)$.

Обратное утверждение очевидно, если тензор Нейенхейса для почти комплексной структуры J равен нулю, то и для почти комплексной структуры J_H на группе Ли H он также равен нулю, поскольку его компоненты совпадают с компонентами J в базисе ($E_1, ..., E_{2n}$) контактного распределения D. *Теорема доказана*.

В работах [6], [7] получен список четырехмерных разрешимых точных симплектических алгебр Ли.

Таблица 1

Четырехмерные разрешимые точные симплектические алгебры Ли

Случай	Скобки Ли	Потенциал
A_1^2	$[e_1, e_2]=e_2$, $[e_3, e_4]=e_4$	$\alpha = -e^2 - e^4$
$Aff(\mathbf{C})$	$[e_1, e_3]=e_3$, $[e_1, e_4]=e_4$, $[e_1, e_3]=e_3$, $[e_1, e_4]=e_4$	$\alpha = -e^3$
$L_{4,1}$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_4, e_3]=e_3$, $[e_4, e_1]=e_1$	$\alpha = -e^3 - e^1$
$L_{4,\lambda}$, $\lambda\neq 1$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_4, e_3]=e_3$, $[e_4, e_1]=\lambda e_1$, $[e_4, e_2]=(1-\lambda)e_1$	$\alpha = -e^3$
$L_{4,\delta}$, $\delta\neq 0$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_4, e_1]= \delta/2e_1 - e_2$, $[e_4, e_3]= \delta e_3$, $[e_4, e_2]=e_1+\delta/2e_1$	$\alpha = -e^3$
h_4	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_4, e_3]= e_3$, $[e_4, e_1]=1/2e_1$, $[e_4, e_2]=e_1+1/2e_2$	$\alpha = -e^3$

3. Контактные расширения алгебры Ли A_1^2 = = $\boldsymbol{Aff}(\mathbf{R})\times\boldsymbol{Aff}(\mathbf{R})$. Рассмотрим контактные структуры на двух алгебрах Ли, которые получаются из алгебры Ли $A_1^2 = Aff(\mathbf{R})\times Aff(\mathbf{R})$ двумя методами контактизации. Хотя в результате контактизации получаются изоморфные контактные алгебры Ли, имеет смысл рассмотреть оба метода контактизации. Алгебра Ли $A_1^2 = Aff(\mathbf{R})\times Aff(\mathbf{R})$ является разрешимой, но не нильпотентной. Первый производный идеал двумерен, центр – нулевой. Напомним, что алгебра Ли $Aff(\mathbf{R})$ группы аффинных преобразований прямой $\mathbf{R}$ представлена матрицами вида: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a, b\in \mathbf{R}$.

Выберем базис из следующих матриц: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда имеется единственное коммутационное соотношение $[e_1, e_2] = e_2$. Данная алгебра Ли является симплектической и $\omega_1 = e^1\wedge e^2 = -de^2 = d\alpha_1$. Поэтому алгебра Ли $Aff(\mathbf{R})$ является точной симплектической. Для прямого произведения $A_1^2 = Aff(\mathbf{R})\times Aff(\mathbf{R})$ имеем соответствующий базис e_1, e_2, e_3, e_4 и коммутационные соотношения $[e_1, e_2] = e_2$ и $[e_3, e_4] = e_4$. Симплектическая форма имеет вид:

$$\omega = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4, \quad \omega = d\alpha, \quad \alpha = -e^2-e^4.$$

3.1. Центральное расширение. Построим центральное расширение $A_1^2\times_\omega\mathbf{R}e_5$ при помощи симплектической формы ω. Ненулевые скобки Ли на алгебре Ли $A_1^2\times_\omega\mathbf{R}e_5$ определяются формулами:

$$[e_1, e_2] = e_2+e_5 \text{ и } [e_3, e_4] = e_4+ e_5.$$

Алгебра Ли $A_1^2\times_\omega\mathbf{R}e_5$ имеет одномерный центр $\mathbf{R}e_5$. В качестве контактной формы выберем 1-форму $\eta = -e^5$. Легко видеть, что $d\eta = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = -e_5$. Тогда левоинвариантное контактное распределение D определяется подпространством A_1^2 в $A_1^2\times_\omega\mathbf{R}e_5$. Выберем базис $E_1,\dots, E_5$ контактной алгебры Ли $L(A_1^2)\times_\omega\mathbf{R}e_5$: $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2$, $E_3 = e_3$, $E_4 = e_4$, $E_5 = -e_5$. Скобки Ли в новом базисе.

$[E_1, E_2] = [e_1, e_2] = e_2+e_5 = E_2 - E_5$,

$[E_3, E_4] = [e_3, e_4] = e_4+e_5 = E_4 - E_5$.

Контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал $d\eta = E^1\wedge E^2 + E^3\wedge E^4$.

3.2. Расширение алгебры Ли A_1^2 как точной симплектической. Рассмотрим прямое произведение $A_1^2\times \mathbf{R}e_5$ с контактной формой:

$$\eta = -e^2-e^4+se^5,$$

где $s\neq 0$ – некоторое вещественное число. Легко видеть, что $d\eta_s = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = (1/s)e_5$. Контактное распределение D – это левоинвариантное распределение, заданное следующим подпространством в алгебре Ли. Если $(x_1, \dots, x_5)$ – координаты на $L(G)$, соответствующие выбранному базису e_i, то $D \subset L(G)$ задается уравнением:

$$-x_2-x_4+sx_5 = 0.$$

Выберем базис $E_1,\dots, E_4$, E_5 алгебры Ли $A_1^2\times \mathbf{R}e_5$ так, что $E_5 = \xi = (1/s)e_5$ и векторы $E_1,\dots, E_4$ образуют базис контактного подпространства D и выбраны следующим образом: $E_1= e_1$, $E_3= e_3$, $E_2 = e_2+(1/s)e_5$, $E_4 = e_4+(1/s)e_5$. Найдем структурные константы в новом базисе.

$$[E_1, E_2] = [e_1, e_2+(1/s)e_5] = e_2 = E_2-E_5,$$

$$[E_3, E_4] = [e_3, e_4+(1/s)e_5] = e_4 = E_4-E_5.$$

Выпишем ненулевые структурные константы:

$$C_{12}^2 = 1,\ C_{12}^5 = -1,\ C_{34}^4 = 1,\ C_{34}^5 = -1.$$

Контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал имеет вид: $d\eta = dE^5 = E^1\wedge E^2+E^3\wedge E^4$.

Как известно, ассоциированная метрика g контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) при фиксированных η и ξ определяется аффинором φ по следующей формуле: $g(X,Y) = d\eta(X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)$. Запишем аффинор φ в общем виде в базисе $E_1,\dots, E_5$. Учитывая, что φ обладает свойством $d\eta(\varphi X,\varphi Y) = d\eta(X,Y)$, для $X,Y\in D$, легко видеть, что

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & 0 \\ \varphi_{21} & -\varphi_{11} & \varphi_{41} & \varphi_{24} & 0 \\ -\varphi_{24} & \varphi_{14} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & 0 \\ \varphi_{41} & -\varphi_{13} & \varphi_{43} & -\varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на группе $A_1^2\times\mathbf{R}e_5$ является K-контактной при всех значениях параметров. Она является контактной метрической структурой Сасаки при следующем аффиноре:*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_{11}^2+1}{\varphi_{12}} & -\varphi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{33} & \varphi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi_{33}^2+1}{\varphi_{34}} & -\varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующая метрика g контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) имеет следующую матрицу:

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi_{11}^2+1}{\varphi_{12}} & -\varphi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varphi_{33}^2+1}{\varphi_{34}} & -\varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_{33} & -\varphi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадраты норм тензоров Римана и Риччи имеют выражения:

$$\|Riem\|^2 = -6\varphi_{12} - 6\varphi_{34} + 4\varphi_{34}^2 + 4\varphi_{12}^2 + 17/2,$$

$\|Ric\|^2 = 2\varphi_{34}^2 + 2\varphi_{12}^2 - 2\varphi_{34} - 2\varphi_{12} + 2$. *Секционные кривизны $K_{i,j}$ в направлении координатных площадок векторов базиса принимают следующие значения:* $K_{12} = \varphi_{12}-3/4$, $K_{13}=0$, $K_{14}=0$, $K_{23}=0$, $K_{24}=0$, $K_{34}=\varphi_{34}-3/4$, $K_{12}=\varphi_{12}-3/4$, $K_{15}=1/4$, $K_{25}=1/4$, $K_{35}=1/4$, $K_{45}=1/4$. *Скалярная кривизна выражается формулой:*

$S = 2(\varphi_{12} + \varphi_{34} - 1)$. *Метрика Сасаки является эйнштейновой псевдоримановой при* $\varphi_{11} = \varphi_{33} = 0$ *и* $\varphi_{12} = \varphi_{34} = 3/2$.

Доказательство вытекает из Леммы и теоремы 2 с использованием прямых вычислений при помощи системы Maple.

Замечание. В классификационном списке работы [2] приведена пятимерная контактная алгебра Ли, являющаяся полупрямым произведением $A_1{}^2\times_\rho \mathbf{R}e_5$ (18-я алгебра Ли классификационного списка), заданная в базисе e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 коммутационными соотношениями:
$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_4$, $[e_1, e_5] = pe_5$, $[e_3, e_5] = qe_5$.

Легко видеть, что данная алгебра Ли изоморфна рассмотренной выше алгебре Ли $A_1{}^2\times \mathbf{R}e_5$, когда параметры p и q равны либо нулю, либо единице. Действительно, если $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2+pe_5$, $E_3 = e_3$, $E_4 = e_4+pe_5$, $E_5 = e_5$, то скобки Ли в новом базисе будут следующие: $[E_1, E_2] = e_2+p^2e_5 = E_2$, $[E_3, E_4] = e_4+p^2e_5 = E_4$. Этот случай, когда параметры p и q равны либо нулю, либо единице является общим. Это следует из результатов работы [5]. Действительно, если $p \neq 0$, то алгебра Ли e_1, e_2, e_5 с коммутационными соотношениями $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_5] = pe_5$ обладает тем свойством, что для любых ее элементов x,y выполняется свойство $[x,y] = l(x)y - l(y)x$, где $l(x)$ – линейная форма на алгебре Ли. В нашем случае $l(e_1) = 1$, $l(e_2) = 0$, $l(e_5) = 0$. Поэтому $p = 1$.

Аналогичным образом могут быть построены контактные алгебры Ли из остальных 4-мерных алгебр Ли таблицы 1.

Литература

1. Blair, D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics / D. E. Blair. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976.
2. Diatta, A. Left invariant contact structures on Lie groups// arXiv: math. DG/0403555 v2 24 Sep 2004.
3. Смоленцев, Н. К. Пространства римановых метрик / Н. К. Смоленцев // Современная математика и её приложения. – 2003. – Т. 31. – С. 69 – 146.
4. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Намидзу. – М.: Наука. – 1981. – Т. 1, 2.
5. Milnor, J. Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups / J. Milor // Advances in mathematics. – V. 21. – 1976. – P. 293 – 329.
6. Ovando, G. Complex, symplectic and Kahler structures on four dimensional Lie algebras / G. Ovando // arXiv: math.DG/ 0309146 v1, 8 Sep 2003, 15 P.
7. Ovando, G. Four dimensional symplectic Lie algebras / G. Ovando // arXiv: math. DG/0407501v1, 28 Jul 2004, 21 P.