УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д. А. Прокудин, Н. А. Кучер

В статье представлен результат о существовании ренормализованных решений первой краевой задачи для системы уравнений, описывающих стационарное движение двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей для всех значений показателя адиабаты из интервала $(3,+\infty)$.

Рассматривается задача об установившемся баротропном движении двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей без учета химических реакций в ограниченном объеме $\Omega \subset R^3$ евклидова пространства точек $x=(x_1,x_2,x_3)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2. В замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω требуется найти плотности $\rho_i:\bar{\Omega}\to R^+$ и поля скоростей $\vec{u}^{(i)}:\bar{\Omega}\to R^3$, $i=1,2$ составляющих смеси, удовлетворяющие следующим уравнениям [1], [2]:

$$div\left(\varphi_i \vec{u}^{(i)} i\right) = 0 \quad \Omega, \quad = 1,2, .^{1)} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} + div\left(\rho_i\, \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}\right) + \nabla p_i = \\ = \vec{I}^{(i)}_{в} + \rho_i \vec{f}^{(i)} \quad \Omega, \quad = 1,2, \tag{2}$$

в которых операторы

$L_{ij} = -\mu_{ij}\Delta - \left(\lambda_{ij}+\mu_{ij}\right)\nabla div, \quad i,j=1,2$ удовлетворяют условию:

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega} L_{ij}\vec{u}^{(j)}\cdot\vec{u}^{(i)}dx \ge C_0\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left|\nabla\vec{u}^{(i)}\right|^2 dx, \quad ^{2)} \tag{*}$$

$C_0 = const > 0.$

Мы будем предполагать, что давление $p_i=\rho_i^{\gamma}$, $i=1,2$, где $\gamma>1$ – показатель адиабаты, а интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси $\vec{I}^{(i)} = (-1)^{i+1}\, a\left(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}\right)$, $i=1,2$, где $a>0$ – заданная постоянная. Массовые силы $\vec{f}^{(1)}$ и $\vec{f}^{(2)}$ считаются непрерывными векторными полями. Уравнения (1) и (2) должны быть дополнены краевыми условиями. Простейшими являются условия прилипания:

$$\vec{u}^{(i)}на = 0 \quad i \quad \partial\Omega, \quad = 1,2, \tag{3}$$

которые означают, что граница области течения является неподвижной твердой стенкой. В стационарном случае уравнения и краевые условия не определяют течение единственным образом. Поэтому к уравнениям и граничным условиям необходимо добавить условия нормировки. Мы будем искать решение, удовлетворяющее дополнительным соотношениям:

$$\int_{\Omega}\rho_i\, dx = M > 0,\ i=1,2, \tag{4}$$

где M – заданная постоянная. Условимся в дальнейшем для краткости задачу (1)-(4) называть *задачей* P.

Отметим, что условие (*) обеспечивает выполнение основной энергетической оценки для системы уравнений (1)-(2). Действительно, формально умножая обе части (2) скалярно на $\vec{u}^{(i)}$, $i=1,2$, используя формулу интегрирования по частям, уравнения (1) и граничные условия (3), получим энергетическое неравенство:

$$C_0\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left|\nabla\vec{u}^{(i)}\right|^2dx + a\int_{\Omega}\left|\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}\right|^2dx \le \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\rho_i\vec{f}^{(i)}\cdot\vec{u}^{(i)}dx\,. \tag{5}$$

В настоящее время фактически нет результатов, касающихся математической теории разрешимости уравнений (1) – (2) в случае двух и более пространственных переменных. Имеются лишь результаты относительно отдельных частных случаев. Так, в работе [3] доказано существование слабого обобщенного решения задачи Коши в R^3 для уравнений (1) – (2) в случае отсутствия конвективного переноса. В [4] получен результат о единственности слабых решений этой задачи Коши при предположении, что массовые силы и члены, учитывающие обмен импульсом между различными компонентами смеси и конвективный перенос, равны нулю. В [5] доказано существование слабого решения рассматриваемых здесь уравнений в ограниченной области евклидова пространства при условии, что в уравнениях (2) отсутствуют конвективные слагаемые, а давление $p_i=\rho_i$, $i=1,2$. В работе [6] рассматривалась квази-стационарная задача в ограниченной области, но со специальными граничными условиями, оправданными только с математической точки зрения.

В данной статье мы представим теорему существования слабого обобщенного решения задачи P для всех значений показателя адиабаты из интервала $(3,+\infty)$.

В дальнейшем будут использоваться обычные обозначения $L^p\left(W^{l,p}\right)$ для пространств функций интегрируемых со степенью $p\ge1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l\ge0$). Через $C^l\left(\bar{\Omega}\right)$ ($C_0^l\left(\bar{\Omega}\right)$) обозначим банахово пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций (об-

---

1) Здесь и далее никакого суммирования по повторным индексам не производится, если не оговорено противное.

2) Условие (*), в терминах коэффициентов вязкости λ_{ij} и μ_{ij}, эквивалентно следующему условию:

$$\mu_{11}>0,\ \mu_{22}>0,\ 2\mu_{11}+\lambda_{11}>0,\ 2\mu_{22}+\lambda_{22}>0,$$
$$4\mu_{11}\mu_{22}-\left(\mu_{12}+\mu_{21}\right)^2>0,$$
$$4\left(2\mu_{11}+\lambda_{11}\right)\left(2\mu_{22}+\lambda_{22}\right)-\left(2\mu_{12}+\lambda_{12}+2\mu_{21}+\lambda_{21}\right)^2>0.$$

ращающихся в нуль на $\partial\Omega$), $l \geq 0$. Обозначения пространств для векторных функций будем использовать такие же, как и для скалярных функций, а принадлежность $\vec{u} \in X$ будем понимать как $u_i \in X, \quad i = 1,...,n, \quad \vec{u} = (u_1,...,u_n)$.

Определение слабого решения уравнений (1) – (2) несколько отличается от стандартного определения обобщенного решения для уравнений математической физики, что обусловлено спецификой уравнений (1) (см. [7], [8]). Прежде всего заметим, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $G_i : R \to R, i = 1, 2$ каждые гладкие решения $\rho_i, i = 1, 2$ уравнений (1) удовлетворяют уравнениям:

$$div\left(G_i(\rho_i)\vec{u}^{(i)}\right) + \\ +\left(G_i'(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i)\right) div\, \vec{u}^{(i)} = 0, i = 1, 2, \tag{6}$$

которые называются ренормализованной формой уравнений (1), а процедура перехода от (1) к бесконечной системе уравнений вида (6) называется ренормализацией. Функции $\rho_i, i = 1, 2$, удовлетворяющие этой системе, называются ренормализованным решением уравнений (1).

Определение 1. *Обобщенным решением краевой задачи P называются неотрицательные функции $\rho_i \in L_1(\Omega), i = 1, 2$ и векторные поля $\vec{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega), i = 1, 2$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(A1) $\int\limits_\Omega \rho_i\, dx = M$, $\rho_i \vec{u}^{(i)} \in L^1(\Omega)$, $p_i(\rho_i) \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\rho_i \left|\vec{u}^{(i)}\right|^2 \in L^1_{loc}(\Omega), i = 1, 2$.

(A2) *для любых дифференцируемых функций G_i с ограниченными производными $G_i' \in C(R), i = 1, 2$ и произвольных функций $\psi_i \in C^1(\Omega), i = 1, 2$ выполняются интегральные тождества:*

$$\int\limits_\Omega \begin{pmatrix} G_i(\rho_i)\vec{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i + \\ +\left(G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i)\rho_i\right) div\, \vec{u}^{(i)}\psi_i \end{pmatrix} dx = 0, i = 1, 2;$$

(A3) *для любых векторных полей* $\vec{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, 2$ *выполняются интегральные тождества:*

$$\mu_{i1}\int\limits_\Omega \nabla\vec{u}^{(1)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx + \mu_{i2}\int\limits_\Omega \nabla\vec{u}^{(2)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx + \\ +(\lambda_{i1} + \mu_{i1})\int\limits_\Omega div\, \vec{u}^{(1)} : div\, \vec{\varphi}^{(i)} dx + \\ +(\lambda_{i2} + \mu_{i2})\int\limits_\Omega div\, \vec{u}^{(2)} : div\, \vec{\varphi}^{(i)} dx - \\ -\int\limits_\Omega \rho_i\, \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx = \int\limits_\Omega \rho_i^\gamma\; div\, \vec{\varphi}^{(i)} dx + \\ +\int\limits_\Omega \left(\vec{I}^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)}\right) \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx, i = 1, 2.$$

Основной результат настоящей работы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любых $\vec{f}^{(i)} \in C(\Omega), i = 1, 2, \quad \gamma > 3$ краевая задача P имеет, по крайней мере, одно обобщенное решение.*

Кратко охарактеризуем основные этапы доказательства этого утверждения. Обобщенное решение задачи P будет получено как предел обобщенных решений следующей регуляризованной краевой задачи:

$$\varepsilon\rho_i^\varepsilon + div\left(\rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right) - \varepsilon\Delta\rho_i^\varepsilon = \varepsilon\frac{M}{|\Omega|} \quad \Omega, \quad = 1, 2, \tag{7}$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M}{|\Omega|}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{1}{2}\rho_i^\varepsilon\left(\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla\right)\vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \\ +\frac{1}{2}div\left(\rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right) + \sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}_\varepsilon^{(j)} + \\ +\nabla p_i^\varepsilon = \vec{I}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon \vec{f}^{(i)} \quad \Omega, \quad = 1, 2, \tag{8}$$

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} = 0, \quad \nabla\rho_i^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0 \quad \partial\Omega, \quad = 1, 2, \tag{9}$$

которую условимся называть *задачей* P_ε. Здесь $p_i^\varepsilon = \left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma$, $\vec{I}_\varepsilon^{(i)} = (-1)^{i+1} a\left(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)}\right), i = 1, 2$, $|\Omega| = meas(\Omega)$, $\varepsilon \in (0,1]$, $\vec{n}$ – вектор единичной внешней нормали к Ω. Энергетическое неравенство для краевой задачи P_ε имеет вид:

$$\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega \rho_i^\varepsilon\left|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M}{|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega\left|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right|^2 dx + C_0\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega\left|\nabla\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right|^2 dx + \varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega\left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma dx + \varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega\left(\rho_i^\varepsilon\right)^{\gamma-2}\left|\nabla\rho_i^\varepsilon\right|^2 dx + \\ +a\int\limits_\Omega\left|\vec{u}_\varepsilon^{(1)} - \vec{u}_\varepsilon^{(2)}\right|^2 dx \leq \varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega\left(\rho_i^\varepsilon\right)^{\gamma-1} dx + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega \rho_i^\varepsilon \vec{f}^{(i)} \cdot \vec{u}_\varepsilon^{(i)} dx. \tag{10}$$

Определение 2. *Сильным обобщенным решением краевой задачи P_ε называются неотрицательные функции $\rho_i^\varepsilon \in W^{2,q}(\Omega), q < \infty, i = 1, 2$ и векторные поля $\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in W^{2,q}(\Omega), q < \infty, i = 1, 2$ такие, что уравнения (6) – (7) выполнены п.в. в Ω и п.в. на $\partial\Omega$ – краевые условия (8).*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любых $\vec{f}^{(i)} \in C(\Omega), i = 1, 2, \quad \gamma > 3$ краевая задача P_ε имеет, по крайней мере, одно сильное обобщенное решение.*

Доказательство теоремы 2 проводится следующим образом. Сначала, на основе энергетического неравенства (10) и результатов о регулярности решений эллиптических дифференциальных уравнений выводятся априорные оценки для решений задачи P_ε: $\left\|\rho_i^\varepsilon\right\|_{W^{2,q}(\Omega)} + \left\|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{W^{2,q}(\Omega)} \le K$ для всех $q<\infty$,

$$i=1,2, \tag{11}$$

где постоянная K зависит только от $\varepsilon, C_0, \left\|\vec{f}^{(i)}\right\|_{C(\Omega)}$, $\lambda_i, \mu_i, i=1,2, \gamma, |\Omega|$ и M. Затем, с помощью полученных априорных оценок и теоремы Лере-Шаудера о неподвижной точке ([9], теорема 11.6) доказывается существование сильных решений задачи P_ε.

Следующим этапом доказательства теоремы 1 является получение априорных оценок для решений задачи P_ε, не зависящих от параметра ε. Заметим, что каждое сильное обобщенное решение $\rho_i^\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}, i=1,2$ задачи P_ε удовлетворяет условиям:

(**B1**) для любых функций $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega), i=1,2$ выполняются интегральные тождества:

$$\varepsilon\int_\Omega \rho_i^\varepsilon \psi_i\, dx - \int_\Omega \rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla\psi_i\, dx +$$
$$+\varepsilon\int_\Omega \nabla\rho_i^\varepsilon \cdot \nabla\psi_i\, dx = \varepsilon\frac{M}{|\Omega|}\int_\Omega \psi_i\, dx, i=1,2;$$

(**B2**) для любых векторных полей $\vec{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega), i=1,2$ выполняются интегральные тождества:

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \rho_i^\varepsilon\, \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M}{|\Omega|}\int_\Omega \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_i^\varepsilon \left(\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla\right)\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx +$$
$$+\mu_{i1}\int_\Omega \nabla\vec{u}_\varepsilon^{(1)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx + \mu_{i2}\int_\Omega \nabla\vec{u}_\varepsilon^{(2)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx +$$
$$+\left(\lambda_{i1}+\mu_{i1}\right)\int_\Omega div\,\vec{u}_\varepsilon^{(1)} : div\,\vec{\varphi}^{(i)} dx + \left(\lambda_{i2}+\mu_{i2}\right)\int_\Omega div\,\vec{u}_\varepsilon^{(2)} : div\,\vec{\varphi}^{(i)} dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_i^\varepsilon\, \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx =$$
$$=\int_\Omega \left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma div\,\vec{\varphi}^{(i)} dx + \int_\Omega \left(\vec{I}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon \vec{f}^{(i)}\right) \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx, i=1,2.$$

Условие (**B2**) эквивалентно тождествам:

(**B2'**)

$$\varepsilon\int_\Omega \rho_i^\varepsilon\, \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon \cdot \nabla\right)\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx +$$
$$+\mu_{i1}\int_\Omega \nabla\vec{u}_\varepsilon^{(1)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx + \mu_{i2}\int_\Omega \nabla\vec{u}_\varepsilon^{(2)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx +$$
$$+\left(\lambda_{i1}+\mu_{i1}\right)\int_\Omega div\,\vec{u}_\varepsilon^{(1)} : div\,\vec{\varphi}^{(i)} dx +$$
$$+\left(\lambda_{i2}+\mu_{i2}\right)\int_\Omega div\,\vec{u}_\varepsilon^{(2)} : div\,\vec{\varphi}^{(i)} dx -$$
$$-\int_\Omega \rho_i^\varepsilon\, \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla\vec{\varphi}^{(i)} dx = \int_\Omega \left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma div\,\vec{\varphi}^{(i)} dx +$$
$$+\int_\Omega \left(\vec{I}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon \vec{f}^{(i)}\right) \cdot \vec{\varphi}^{(i)} dx, i=1,2.$$

Возьмем в качестве пробных функций $\vec{\varphi}^{(i)}, i=1,2$ в условии (**B2**) такие, что

$$div\,\vec{\varphi}^{(i)} = \left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma dx \quad \Omega, \quad \vec{\varphi}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2 \tag{12}$$

и получим, используя свойства решений задач (12) (см. [10]) и энергетическое неравенство (10), что при

$$\gamma>3: \left\|\rho_i^\varepsilon\right\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \left\|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le C, i=1,2, \tag{13}$$

где постоянная C зависит только от $C_0, \left\|\vec{f}^{(i)}\right\|_{C(\Omega)}, \lambda_i, \mu_i, i=1,2, \gamma, |\Omega|$ и M. Благодаря априорным оценкам (13), мы можем извлечь подпоследовательности, снова обозначенные как $\rho_i^\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}, i=1,2$ такие, что при $\gamma>3$ и $\varepsilon\to0$:

$\rho_i^\varepsilon \to \rho_i$ *слабо в* $L^{2\gamma}(\Omega), i=1,2,$

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \to \vec{u}^{(i)} \text{ слабо в } W_0^{1,2}(\Omega), \; i=1,2 \tag{14}$$

и, по теореме вложения С. Л. Соболева:

$$\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \to \vec{u}^{(i)} \text{ сильно в } L^q(\Omega), \; q\in[1,6), \; i=1,2. \tag{15}$$

Кроме того, из (10) следует (см. [11]), что:

$$\varepsilon\rho_i^\varepsilon \to 0 \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to0, i=1,2. \tag{16}$$

Переходя к пределу по выбранным подпоследовательностям в интегральных тождествах (**B1**), (**B2'**) при $\varepsilon\to0$ получим, что предельные функции $\rho_i \in L^{2\gamma}(\Omega), \rho_i \ge 0, \vec{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega), i=1,2$ при $\gamma>3$ удовлетворяют в слабом смысле системе уравнений:

$$div\left(\rho_i \vec{u}^{(i)}\right) = 0 \quad \Omega, \; i=1,2, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} + div\left(\rho_i\, \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}\right) + \nabla\overline{p}_i = \vec{I}^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} \quad \Omega, \; i=1,2, \tag{18}$$

где

$$\left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma \to \overline{p}_i \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to0, \; i=1,2. \tag{19}$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 1, мы должны показать, что верна формула:

$$\overline{p}_i = \left(\rho_i\right)^\gamma, i=1,2. \tag{20}$$

Для этого мы используем технику, развитую в [7], [8] для классической модели Навье-Стокса. Введем в рассмотрение величины

$$p_i - \left(\lambda_{i1}+2\mu_{i1}\right) div\,\vec{u}^{(1)} - \left(\lambda_{i2}+2\mu_{i2}\right) div\,\vec{u}^{(2)}, i=1,2,$$

которые называются эффективным вязким потоком для i-ой составляющей смеси. В случае классической модели Навье-Стокса было показано, что эффективный вязкий поток обладает многими замечательными свойствами (см. [7], [8], [11]), наиболее важным из которых является коммутативное соотношение для слабых пределов решений уравнений Навье-Стокса. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\rho_i^\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}, i=1,2$ *– последовательность решений задачи* P_ε*, существование которых гарантируется теоремой 2, и пусть* $\rho_i, \vec{u}^{(i)}$ *и* $\overline{p}_i, i=1,2$ *- их пределы в (14) и (19) соответственно.*

Тогда, при $\gamma > 3$ *и* $\varepsilon \to 0$*:*

$$\int_\Omega \left[\tilde{A}^{-1}\vec{p}^\varepsilon \cdot \vec{\rho}^\varepsilon - div\,\vec{u}_\varepsilon^{(1)}\rho_1^\varepsilon - div\,\vec{u}_\varepsilon^{(2)}\rho_2^\varepsilon \right]\tau^2 dx \to$$
$$\to \int_\Omega \left[\tilde{A}^{-1}\vec{\overline{p}}\cdot\vec{\rho} - div\,\vec{u}^{(1)}\rho_1 - div\,\vec{u}^{(2)}\rho_2 \right]\tau^2 dx \quad \forall \tau \in C_0^\infty(\Omega), \tag{21}$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}+2\mu_{11} & \lambda_{12}+2\mu_{12} \\ \lambda_{21}+2\mu_{21} & \lambda_{22}+2\mu_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_\varepsilon = \vec{p}\left(\vec{\rho}^\varepsilon\right) = \begin{pmatrix} \left(\rho_1^\varepsilon\right)^\gamma \\ \left(\rho_2^\varepsilon\right)^\gamma \end{pmatrix},$$

$$\vec{\rho}^\varepsilon = \left(\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon\right), \; \vec{\overline{p}} = \begin{pmatrix} \overline{p}_1 \\ \overline{p}_2 \end{pmatrix}, \; \vec{\rho} = \left(\rho_1, \rho_2\right).$$

Заключение леммы 1 есть очевидное следствие следующей леммы, доказательство которой проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения для случая классической модели Навье-Стокса (см., например, [7], лемма 3.2):

Лемма 2. *Пусть* $\rho_i^\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon^{(i)}, i=1,2$ *– последовательность решений задачи* P_ε*, существование которых гарантируется теоремой 2, и пусть* $\rho_i, \vec{u}^{(i)}$ *и* $\overline{p}_i, i=1,2$ *– их пределы в (14) и (19) соответственно.*

Тогда, при $\gamma > 3$ *и* $\varepsilon \to 0$

$$\int_\Omega \rho_j^\varepsilon \left[\left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma - \left(\lambda_{i1}+2\mu_{i1}\right) div\,\vec{u}_\varepsilon^{(1)} - \left(\lambda_{i2}+2\mu_{i2}\right) div\,\vec{u}_\varepsilon^{(2)} \right]\tau^2 dx \to$$
$$\to \int_\Omega \rho_j \left[\overline{p}_i - \left(\lambda_{i1}+2\mu_{i1}\right) div\,\vec{u}^{(1)} - \left(\lambda_{i2}+2\mu_{i2}\right) div\,\vec{u}^{(2)} \right]\tau^2 dx, \tag{22}$$
$$\forall \tau \in C_0^\infty(\Omega), i, j = 1, 2.$$

Далее, из (17) (продолжая нулем $\rho_i, \vec{u}^{(i)}, i=1,2$ в $R^3 \setminus \Omega$) следует, что (см. [7], лемма 3.3):

$$div\left(S_h[\rho_i]\vec{u}^{(i)}\right) = r_i^h \qquad {}^3, \quad =1,2, \tag{23}$$

где $S_h[v]$ – стандартный сглаживающий оператор, $r_i^h = div\left(S_h[\rho_i]\vec{u}^{(i)}\right) - S_h\left[div\left(\rho_i\,\vec{u}^{(i)}\right)\right] \to 0$ при $h \to 0$ в $L^1\left(R^3\right), i=1,2$ (см. [12], лемма 2.3). Теперь умножим (23) на $G_i'\left(S_h[\rho_i]\right), i=1,2$, где функции $G_i, i=1,2$ удовлетворяют всем условиям, наложенным на них в (**A2**) и перейдем к пределу в полученных выражениях при $h \to 0$. Получим, что функции $\rho_i, \vec{u}^{(i)}, i=1,2$ удовлетворяют условию (**A2**). Более того, в качестве функций $G_i(\rho_i)$ можно взять $\rho_i \ln \rho_i$ и получить из (**A2**), что

$$\int_\Omega \rho_i\, div\,\vec{u}^{(i)} dx = 0, i=1,2. \tag{24}$$

С другой стороны, из (7) следует, что (см. [7], раздел 3.5):

$$\int_\Omega \rho_i^\varepsilon\, div\,\vec{u}_\varepsilon^{(i)} dx \le \varepsilon C, i=1,2. \tag{25}$$

Возьмем неубывающую последовательность функций τ_n такую, что $\tau_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tau_n \to 1$ при $n \to \infty$, $0 \le \tau_n \le 1$. Объединяя заключение леммы 1, (24) и (25), мы получаем:

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \tilde{A}^{-1}\vec{p}^\varepsilon \cdot \vec{\rho}^\varepsilon dx \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \tilde{A}^{-1}\vec{p}^\varepsilon \cdot \vec{\rho}^\varepsilon \tau_n^2 dx \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \tau_n^2 \left(\tilde{A}^{-1}\vec{p}^\varepsilon \cdot \vec{\rho}^\varepsilon - div\,\vec{u}_\varepsilon^{(1)}\rho_1^\varepsilon - div\,\vec{u}_\varepsilon^{(2)}\rho_2^\varepsilon \right) dx +$$
$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \tau_n^2 \rho_1^\varepsilon\, div\,\vec{u}_\varepsilon^{(1)} dx + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \tau_n^2 \rho_2^\varepsilon\, div\,\vec{u}_\varepsilon^{(2)} dx \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_\Omega \tau_n^2 \left(\tilde{A}^{-1}\vec{\overline{p}}\cdot\vec{\rho} - div\,\vec{u}^{(1)}\rho_1 - div\,\vec{u}^{(2)}\rho_2 \right) dx +$$
$$+ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \rho_1^\varepsilon\, div\,\vec{u}_\varepsilon^{(1)} dx + \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \rho_2^\varepsilon\, div\,\vec{u}_\varepsilon^{(2)} dx \le \int_\Omega \tilde{A}^{-1}\vec{\overline{p}}\cdot\vec{\rho}dx - \int_\Omega \rho_1\, div\,\vec{u}^{(1)} dx - \int_\Omega \rho_2\, div\,\vec{u}^{(2)} dx = \int_\Omega \tilde{A}^{-1}\vec{\overline{p}}\cdot\vec{\rho}dx, i=1,2.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \tilde{A}^{-1}\vec{p}^\varepsilon \cdot \vec{\rho}^\varepsilon dx \le \int_\Omega \tilde{A}^{-1}\vec{\overline{p}}\cdot\vec{\rho}dx, i=1,2. \tag{26}$$

Для завершения доказательства формулы (20) воспользуемся свойством монотонности оператора $\tilde{A}^{-1}\vec{p}$, получим:

$$\int_\Omega \left(\tilde{A}^{-1}\vec{p}\left(\vec{\rho}^\varepsilon\right) - \tilde{A}^{-1}\vec{p}\left(\vec{\tilde{\rho}}\right) \right)\left(\vec{\rho}^\varepsilon - \vec{\tilde{\rho}}\right) dx \ge 0, i=1,2,$$

откуда следует, что

$$\int_\Omega \left(\tilde{A}^{-1}\vec{\overline{p}} - \tilde{A}^{-1}\vec{p}\left(\vec{\tilde{\rho}}\right) \right)\left(\vec{\rho} - \vec{\tilde{\rho}}\right) dx \ge 0, i=1,2.$$

Выбирая $\tilde{\rho}_i = \rho_i + \eta\psi, i=1,2,$ $\eta \to 0,$ ψ – произвольно, приходим к желаемому равенству (20).

Литература

1. Rajagopal, K. R. Mechanics of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao // Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. – River Edge , 1995. – Vol. 35.

2. Haupt, P. Continuum mechanics theory of materials / P. Haupt. – Advanced Texts in Physics. – Berlin, 2002.

3. Frehse, J. A Stokes-like system for mixtures / J. Frehse, S. Goj, J. Málek // Nonlinear Problems in Mathematical physics and Related Topics II. International Mathematical Series. – London, 2002.

4. Frehse, J. A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum / J. Frehse, S. Goj, J. Málek // Appl. Math. – 2005.

5. Goj, S. Analysis for mixtures of fluids / S. Goj // Dissertation. – Universitat Bonn, Math. Inst., 2005. - http://bib.math.uni-bonn.de/pdf2/BMS-375.pdf.

6. Frehse, J. On quasi-stationary compressible miscible mixtures / J. Frehse, W. Weigant // Manuscript. – 2004.

7. Feireisl, E. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations / E. Feireisl, A. Novotny, H. Petzeltova // Math. Fluid Mech. – 2001.

8. Плотников, П. И. Стационарные решения уравнений Навье-Стокса для двухатомных газов / П. И. Плотников, Ж. Соколовски // Успехи математических наук. – 2007. – Т. 62.

9. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989.

10. Боговский, М. Е. О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad / М. Е. Боговский // Труды семинара С. Л. Соболева. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. – 1980. – Т. 1.

11. Lions, P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics: Compressible Models / P.-L. Lions. – Oxford University Press. – New York, 1998. – Vol. 2.

12. Lions, P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics: Incompressible Models / P.-L. Lions. – Oxford University Press. – New York, 1996. – Vol. 1.

13. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева – М.: Наука, 1964.

14. Соболев, С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1989.