УДК 514.75.6

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ ОСНАЩЕННОГО КОМПЛЕКСА КУБИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Б. Ким

1. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P^3 трехпараметрическое семейство (комплекс) плоских кривых третьего порядка (кубик) K_3. Будем считать, что плоскости кубик также образуют трехпараметрическое семейство.

Отнесем пространство P^3 к подвижному реперу $\{A_0 A_1 A_2 A_3\}$, деривационные формулы которого имеют вид: $dA_I = \omega_I^K A_K \quad (I, K = 0,1,2,3)$, где формы Пфаффа ω_I^K удовлетворяют структурным уравнениям Картана:

$D\omega_I^K = \omega_I^L \wedge \omega_L^K$ и соотношению $\omega_I^I = 0$.

Расположим вершины $A_i \ (i, j, k = 1,2,3)$ подвижного репера в плоскости кубики, а вершину A_0 – вне этой плоскости. Тогда уравнения кубики K_3 запишутся в следующем виде:

$$a_{ijk} x^i x^j x^k = 0, \quad x^0 = 0. \tag{1}$$

Система дифференциальных уравнений комплекса кубик может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered}\theta_{ijk} \equiv da_{ijk} - a_{ljk}\omega_i^l - a_{ilk}\omega_j^l - \\ -a_{ijl}\omega_k^l - a_{ijk}\omega_0^0 = b_{ijk}^l \omega_l.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\omega_i = \omega_i^0$.

Обозначим через ∇R_{ijk}^{pqr} дифференциальный оператор, действующий на величины R_{ijk}^{pqr}, зависящие от верхних и нижних индексов, следующим образом:

$$\nabla R_{ijk}^{pqr} = dR_{ijk}^{pqr} + R_{ijk}^{sqr}\omega_s^p + R_{ijk}^{psr}\omega_s^q + \\ + R_{ijk}^{pqs}\omega_s^r - R_{ljk}^{pqr}\omega_i^l - R_{ilk}^{pqr}\omega_j^l - R_{ijl}^{pqr}\omega_k^l.$$

Замыкание системы (2) дает систему дифференциальных уравнений для величин b_{ijk}^l:

$$\nabla b_{ijk}^l - 2b_{ijk}^l\omega_0^0 - (a_{pjk}\delta_i^l + a_{ipk}\delta_j^l + \\ + a_{ijp}\delta_k^l - a_{ijk}\delta_p^l)\omega^p = b_{ijk}^{lm}\omega_m.$$

В [3] построен обращенный тензор a^{ijk}, компоненты которого удовлетворяют уравнениям: $\nabla a^{ijk} + a^{ijk}\omega_0^0 = b^{ijkl}\omega_l$.

В плоскости кубики обращенный тензор определяет кривую третьего класса K^3:

$a^{ijk} u_i u_j u_k = 0, \quad u_0 = 0$.

Здесь u_I – тангенциальные координаты прямой на плоскости кубики.

Компоненты прямого и обращенного тензоров удовлетворяют соотношениям:

$$a^{ijk} a_{ijk} = 12$$
$$a^{ijk} a_{ijl} = 4\delta_l^k.$$

Рассмотрим некоторые преобразования, ассоциированные с кривой K^3.

Пусть в плоскости кубики задана некоторая кривая второго порядка (коника) C:

$c_{ij} x^i x^j = 0, \quad x^0 = 0$ и прямая l:

$v_i x^i = 0, \quad x^0 = 0$.

Первым (квадратичным) полюсом в смысле Е. Т. Ивлева [4] прямой l относительно кривой K^3 будет кривая второго класса $K^2(l)$:

$a^{ijk} v_i u_j u_k = 0, \quad x^0 = 0$.

Тогда кривая $K^2(l)$ и коника C определяют проективное преобразование $\Pi(l)$ плоскости кубики: $\tilde{x}^i = \Pi_j^i x^j$,

где $\Pi_l^i(l) = a^{ijk} v_k c_{jl}$.

Совокупность прямых l плоскости кубики таких, что соответствующее им преобразование $\Pi(l)$ будет преобразованием W [4], определяется уравнением $u_i p^i = 0$,

где $p^i = a^{ijk} c_{jk}$.

Таким образом, это будет пучок прямых с центром в точке $P = p^i A_i$.

В [3] построены различные геометрические объекты [1] комплекса кубик, например:

а) линейный однородный объект $\{a_{ijk}, b_{ij}, c_i\}$, где

$$b_{ij} = b_{ijk}^k, \tag{3}$$

$$\nabla b_{ij} = 2b_{ij}\omega_0^0 + 4a_{ijk}\omega_0^k + b_{ij}^k\omega_k,$$

$$c_i = b_{ij}^j, \tag{4}$$

$$\nabla c_i = 3c_i\omega_0^0 + 6b_{ij}\omega^j + c_i^j\omega_j.$$

Этот объект определяет в пространстве P^3 инвариантное семейство поверхностей третьего порядка, проходящих через кубику K_3:

$$a_{ijk} x^i x^j x^k + 3b_{ij} x^0 x^i x^j + \\ + 3c_i x^0 x^0 x^i + \lambda (x^0)^3 = 0;$$

б) квазитензор $v^i = -\dfrac{1}{16} a^{ijk} b_{jk}$,

$$\nabla \nu^i = \nu^i \omega_0^0 - \omega_0{}^i + \nu^{ij}\omega_j .$$

В пространстве P^3 этот квазитензор определяет инвариантную точку:

$$A = A_0 + \nu^i A_i \tag{5}$$

в) тензор

$$a^{ij} = \nu^{ij} - \nu^i \nu^j , \tag{6}$$

$$\nabla a^{ij} = 2a^{ij}\omega_0^0 + b^{ijk}\omega_k ;$$

г) тензор

$$A_{ijklm} = a_{(ijk} b_{lm)} - 2b^p_{(ijk} a_{lm)p} , \tag{7}$$

$$\nabla A_{ijklm} = 3A_{ijklm}\omega_0^0 + A^p_{ijklm}\omega_p .$$

Здесь и далее по индексам, заключенным в скобки, производится циклирование.

В плоскости кубики тензор A_{ijklm} определяет кривую пятого порядка K_5:

$$A_{ijklm} x^i x^j x^k x^l x^m = 0, \quad x^0 = 0 . \tag{8}$$

Точки пересечения кривых K_3 и K_5 называются t – фокальными точками комплекса кубик. Их геометрическая характеристика дана в [3].

2. Зададим систему дифференциальных уравнений:

$$\nabla \Lambda_3^\alpha - \Lambda_3^\alpha \Lambda_3^\beta \omega_\beta^3 + \omega_3^\alpha = \Lambda_3^{\alpha k}\omega_k , \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2). \tag{9}$$

Система (9) характеризует относительную инвариантность [2] формы

$$\theta = \omega_3 + \Lambda^\alpha{}_3 \omega_\alpha \tag{10}$$

и определяет геометрический объект

$$\Lambda = \{\Lambda_3^\alpha\} . \tag{11}$$

Комплекс кубик с заданным полем объекта Λ называется оснащенным комплексом кубик.

Объект Λ называется характеристическим объектом оснащенного комплекса кубик.

Система уравнений оснащенного комплекса кубик состоит из уравнений (2) и (9). Продолжая систему (9) внешним образом, получаем систему дифференциальных уравнений для величин $\Lambda_3^{\alpha k}$:

$$\nabla \Lambda_3^{\alpha k} - \Lambda_3^{\alpha k}\omega_0^0 + \delta_3^k \omega_0^\alpha - (\Lambda_3^{\beta k}\Lambda_3^\alpha + \Lambda_3^\beta \Lambda_3^{\alpha k})\omega_\beta^3 - \\ -\Lambda_3^\alpha \delta_3^k \omega_0^3 + \Lambda_3^\beta (1 - \Lambda_3^\alpha)\delta_\beta^k \omega_0^3 = \Lambda_3^{\alpha kj}\omega_j . \tag{12}$$

В плоскости кубики характеристический объект определяет точку: $M = A_3 + \Lambda_3^\alpha A_\alpha$.

Теорема. Точка M характеризуется тем, что ее смещение вдоль любой кривой, ассоциированной с оснащенным комплексом кубик [2], принадлежит плоскости кубики K_3.

Доказательство. Рассмотрим множество кривых:

$$\omega_\alpha = \lambda_\alpha \tau, \quad A_3^\alpha \lambda \alpha + \lambda_3 = 0 , \tag{13}$$

ассоциированных с оснащенным комплексом кубик. Здесь τ – параметрическая форма [2]. Для точки M имеем:

$$(dM, A_1, A_2, A_3) = \\ = (\omega_3 + \Lambda_3^\alpha \omega_\alpha)(A_0, A_1, A_2, A_3). \tag{14}$$

Сравнивая (13) и (14) , убеждаемся в справедливости теоремы.

Обозначим через K_2 и L соответственно первую (коническую) и вторую (линейную) поляры точки M относительно кубики K_3. Они задаются следующими уравнениями:

Коника K_2: $(a_{ij\alpha}\Lambda_3^\alpha + a_{ij3})x^i x^j = 0, x^0 = 0$.

Прямая L:

$(a_{i\alpha\beta}\Lambda_3^\alpha \Lambda_3^\beta + a_{i\alpha 3}\Lambda_3^\alpha)x^i = 0, x^0 = 0$.

3. Проведем канонизацию репера оснащенного комплекса кубик следующим образом: вершину A_3 поместим в точку M , а вершины A_1 и A_2 – на прямой L . Тогда

$$\Lambda_3^\alpha = 0, \quad a_{\alpha 33} = 0 . \tag{15}$$

Уравнения кубики примут вид:

$$a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + a_{\alpha\beta 3} x^\alpha x^\beta x^3 + \\ + a_{333}(x^3)^3 = 0, \quad x^0 = 0.$$

Из (9) в силу (15) получаем:

$$\omega_3^\alpha = \Lambda_3^{\alpha k}\omega_k . \tag{16}$$

Из (2) в силу (15) получаем:

$$-\omega_1^3 - 2a_{113}\omega_3^1 - 2a_{123}\omega_3^2 = b_{133}^k \omega_k$$

$$-\omega_2^3 - 2a_{223}\omega_3^2 - 2a_{123}\omega_3^1 = b_{233}^k \omega_k .$$

Отсюда с учетом (16):

$$\omega_\alpha^3 = \Lambda_\alpha^{3k}\omega_k , \tag{17}$$

где $\Lambda_\alpha^{3k} = -b_{\alpha 33}^k - 2a_{\alpha\beta 3}\Lambda_3^{\beta k}$.

Следовательно, формы ω_α^3 становятся главными. Система дифференциальных уравнений оснащенного комплекса кубик в построенном репере принимает вид:

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{b}^i_{\alpha\beta\gamma}\omega_i , \quad \theta_{\alpha\beta 3} = \tilde{b}^i_{\alpha\beta 3}\omega_i , \quad \theta_{333} = \tilde{b}^i_{333}\omega_i , \\ \omega_\alpha^3 = \Lambda_\alpha^{3i}\omega_i , \quad \omega_3^\alpha = \Lambda_3^{\alpha i}\omega_i . \tag{18}$$

Здесь:

$$\tilde{b}^i_{\alpha\beta\gamma} = b^i_{\alpha\beta\gamma} + a_{3(\alpha\beta}\Lambda^{3i}_{\gamma)} , \\ \tilde{b}^i_{\alpha\beta 3} = b^i_{\alpha\beta 3} + a_{\alpha\beta\gamma}\Lambda_3^{\gamma i} . \tag{19}$$

Дифференциальные уравнения для величин $\tilde{b}^i_{\alpha\beta\gamma}, \tilde{b}^i_{\alpha\beta 3}$ получаются из уравнений (2) с учетом разложения форм $\omega_\alpha^3, \omega_3^\alpha$ по базисным. Для величин $\Lambda_\alpha^{3i}, \Lambda_3^{\alpha i}$ получаем из системы (17) и последней группы уравнений системы (18):

$$\nabla \Lambda_3^{\alpha k} - \Lambda_3^{\alpha k}\omega_0^0 + \delta_3^k \omega^\alpha = \Lambda_3^{\alpha kl}\omega_l , \tag{20}$$

$$\nabla \Lambda_\alpha^{3i} + \Lambda_\alpha^{3j}(\delta_j^i \omega_0^0 + \delta_\alpha^\gamma \omega_3^3) + \delta_\alpha^i \omega_0^3 = \Lambda_\alpha^{3ij}\omega_j .$$

Из системы (18) следует, что величины $a_{\alpha\beta\gamma}$ образуют самостоятельный тензор, который определяет кубическую форму от двух переменных: $\Phi \equiv a_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma}$.

Эта форма задает на прямой $A_1 A_2$ три точки – пересечение кубики K_3 с этой прямой. Дискриминант D этой формы имеет вид:

$$D = 3a^2{}_{112}a^2_{122} + 6a_{111}a_{112}a_{122}a_{222} -$$
$$-4a_{111}a^3{}_{122} - 4a^3{}_{112}a_{222} - a^2_{111}a^2_{222}.$$

В общем случае $D \neq 0$, т. е. среди точек, определяемых формой Φ , нет попарно совпавших.

Из системы (20) следует, что величины Λ^{3i}_{α} и $\Lambda^{\alpha\beta}_{3}$ также образуют самостоятельные геометрические объекты.

Указанные геометрические объекты могут быть использованы при построении канонического репера комплекса кубик и изучении его классов.

Литература

1. Лаптев, Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г. Ф. Лаптев // Тр. Моск. матем. об-ва. – М.: ГИТТЛ,1953. – С. 275 – 382.

2. Малаховский, В. С. К геометрии касательно оснащенных многообразий / В. С. Малаховский // Изв. высших уч. завед. Математика. – 1972. – 9. – С. 54 – 62.

3. Ким, В. Б. О некоторых классах комплексов кубик в P^3 / В. Б. Ким. – М.: ВИНИТИ, 1982. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ. – № 737 – 82.

4. Ивлев, Е. Т. Структуры почти произведения на базах проективных расслоений / Е. Т. Ивлев. – М.: ВИНИТИ, 1985. – 165 с. – Деп .в ВИНИТИ. – № 2248 – 86.