

УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОТЕКАНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЗАДАННОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ

Н. А. Гейдаров, Ю. Н. Захаров

В задачах о движении жидкости в каналах для стационарной системы уравнений Навье-Стокса, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости и записанной относительно скоростей и давления, чаще всего рассматривается две постановки задачи.

Одна из них является наиболее популярной и заключается в задании на твердых стенках условия прилипания, а на участках втекания и вытекания жидкости векторов скорости. Но т. к. в исходной постановке на границе не фиксируются значения функции давления, их при численном решении приходится задавать с помощью каких-либо дополнительных соотношений. Этому посвящено достаточно большое число работ (см., например, [5]). К сожалению, все эти способы определения давления на границе расчетной области не являются универсальными. Эту проблему в двумерном случае чаще всего преодолевают, исключая давление путем перехода к системе уравнений, записанной относительно функций тока и завихренности.

Вторая постановка заключается в задании на участках втекания-вытекания давления, а не скоростей. Т. е. движение жидкости в области протекания осуществляется за счет разности давлений. На участках протекания границы отсутствуют условия для компонент скорости, что затрудняет процесс решения. В работах [2], [3] показано, что для существования и единственности решения нестационарной задачи, кроме задания давления на участках втекания-вытекания границы, необходимо задать и значения одной из компонент скорости. Отсутствие значения второй компоненты вектора скорости не позволяет без дополнительных условий на эту компоненту построить численный процесс решения таких задач. Обычно численно решаются задачи протекания в каналах с параллельными прямыми границами и прямыми углами. В этом случае задаются «естественные» краевые условия на скорости вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad \text{и т. п. (см. [2, 3])},$$

которые позволяют построить алгоритмически замкнутый численный метод решения. Однако такое «простое» определение скоростей на границе не всегда возможно, т.к. оно может не вытекать из характера течения на границе. Например, если на KL и MN (см. рис. 1) задать вертикальную составляющую скорости равную нулю (в соответствии с [1]), то получающееся решение не является «естественным», т. к. вблизи точек M и N жидкость будет вытекать под прямым углом к границе. Т. о., задание всех компонент вектора скорости на участках протекания позволяет получить приемлемые решения лишь в областях сравнительно простой формы: с параллельными твердыми стенками и перпендикулярными им границам входа и выхода.

Существует несколько подходов к решению стационарной системы уравнений Навье-Стокса. Наиболее широко используется метод стационарирования: решение исходной задачи находится как предел решения нестационарной задачи. Второй подход состоит в решении каким-либо итерационным методом непосредственно системы нелинейных алгебраических уравнений, аппроксимирующей исходную стационарную задачу. В первом случае обычно используют неявные схемы решения, которые требуют задания краевых условий для всех граничных компонент вектора неизвестных. Еще одной особенностью такого подхода является требование солёноидальности поля скоростей на каждом временном слое, удовлетворение которого также является технически сложной задачей. Во втором случае не возникает трудностей как с выполнением условия солёноидальности поля скоростей (соответствующее уравнение является частью решаемой системы), так и с устойчивостью применяемого итерационного метода.

В [4] предложен используемый в настоящей работе итерационный метод минимальных невязок решения разностных задач, аппроксимирующих систему уравнений Навье-Стокса, основанный на минимизации последовательности невязок. Этот метод позволяет находить обобщенное решение разностных задач, аппроксимирующих стационарные задачи для системы уравнений Навье-Стокса, описывающие течение в каналах при задании на участках втекания и вытекания границы перепада давления. Решен ряд задач как при задании, так и при отсутствии задания вектора скорости на входе и выходе канала. Показано, что, в случае отсутствия задания вектора скорости, определение его значения с помощью аппроксимации системы внутри области решения на границах втекания-вытекания позволяет получить приемлемые решения.

1. Рассмотрим двумерную задачу о протекании вязкой однородной несжимаемой жидкости в криволинейном канале с заданным перепадом давления на входе и выходе.

$$\begin{aligned} \nu \Delta u - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \nu \Delta v - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

$$p|_{KL} = p_1, \quad p|_{MN} = p_2, \quad p_1 > p_2, \quad (2.1)$$

$$\vec{u}|_{LM} = 0, \quad \vec{u}|_{KM} = 0, \quad (2.2)$$

$$|(\vec{u}|_{KL}, \vec{n})| = |\vec{u}|_{KL}|, \quad |(\vec{u}|_{MN}, \vec{n})| = |\vec{u}|_{MN}|, \quad (2.3)$$

где $\vec{u} = (u, v)$ – вектор скорости, p – давление, $\nu > 0$ – коэффициент кинематической вязкости,

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, Ω – конечный криволинейный канал, являющийся областью решения (см. рис. 1).

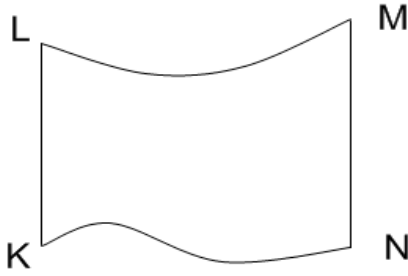


Рис. 1.

Отметим, что равенство (2.3) означает, что вектор скорости $\vec{u}$ перпендикулярен границам KL и MN .

Наряду с задачей (1), (2.1), (2.2), (2.3) рассматривалась задача (1), (2.1), (2.2), т. е. без условия на касательную составляющую вектора скорости на участках протекания.

2. Для решения полученной дифференциальной задачи (1), (2) введем в ограниченной области Ω прямоугольную и в общем случае неравномерную сетку Ω_h , согласующуюся с границей Γ .

На узлах $(x_i, y_j) \in \Omega$ введем сеточные функции u_{ij} , v_{ij} , p_{ij} и аппроксимируем систему дифференциальных уравнений (1) разностной схемой:

$$\begin{aligned} v \Delta_h u_{ij} - \frac{u_{i+1j}^2 - u_{i-1j}^2}{h_{xi+1} + h_{xi}} - \frac{u_{ij+1}v_{ij+1} - u_{ij-1}v_{ij-1}}{h_{yj+1} + h_{yj}} &= \frac{p_{i+1j} - p_{i-1j}}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \\ v \Delta_h v_{ij} - \frac{v_{i+1j}u_{i+1j} - v_{i-1j}u_{i-1j}}{h_{xi+1} + h_{xi}} - \frac{v_{ij+1}^2 - v_{ij-1}^2}{h_{yj+1} + h_{yj}} &= \frac{p_{ij+1} - p_{ij-1}}{h_{yj+1} + h_{yj}}, \\ \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1} - v_{ij-1}}{h_{yj+1} + h_{yj}} &= 0, \quad (i, j) \in J, \end{aligned} \quad (3)$$

где J – множество индексов (i, j) , отвечающих внутренним точкам. Разностный оператор Δ_h аппроксимирует оператор Лапласа:

$$\Delta_h u_{ij} = \frac{\frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_{xi+1}} - \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_{xi}}}{h_{xi}} + \frac{\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_{yj+1}} - \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_{yj}}}{h_{yj}}.$$

Вместе с аппроксимацией краевых условий (2) мы получим разностную задачу относительно вектора $\vec{u} = (u_{ij}, v_{ij}, p_{ij})$, $i, j \in J$ размерности m . Для замыкания системы (количество уравнений меньше количества неизвестных в силу отсутствия условий на скорости на границах протекания) использовалась аппроксимация дифференциальных уравнений на границе внутри области решения какой-либо схемой первого или второго порядка аппроксимации. При решении задачи (1), (2.1), (2.2) необходимо также аппроксимировать оператор в узлах, соответствующих горизонтальной компоненте вектора скорости.

Полученная система m нелинейных алгебраических уравнений является билинейной:

$$A(\vec{u})\vec{u} = f, \quad (4)$$

где $A(\vec{u})\vec{v} = A_1(\vec{u})\vec{v} + A_2\vec{v}$.

$A_1(\vec{u})$ – матрица, элементы которой зависят от компонент вектора $\vec{u}$, A_2 – числовая матрица.

Считаем, что (4) имеет хотя бы одно решение.

3. Для решения системы (4) использовался явный метод неполной аппроксимации:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \tau_{n+1}[A(u^n)u^n - f] \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} + \alpha_{n+1}z^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где $z^n = (z_1, \dots, z_m)^T$ – некоторый вектор, u^0 – произвольное начальное приближение из области определения оператора A , τ_{n+1} – итерационный параметр, α_{n+1} – диагональная матрица итерационных параметров.

Опишем способ нахождения матрицы параметров α_{n+1} .

Пусть α_{n+1} – квадратная матрица с m ненулевыми элементами $\alpha_{l_i k_i}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, l_i, k_i – произвольные целые числа от 1 до m . (5) может быть записано в виде:

$$u^{n+1} = y_{(p-1)}^{n+1/2} + \sum_{i=p}^m \alpha_{l_i k_i}^{(n+1)} \bar{z}_{k_i}^n, \quad p = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$\text{где } y_{(p-1)}^{n+1/2} = u^{n+1/2} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{l_i k_i}^{(n+1)} \bar{z}_{k_i}^n,$$

$y_{(0)}^{n+1/2} = u^{n+1/2}$, $\bar{z}_{k_i}^n$ – вектор с одной ненулевой k_i -ой компонентой – $\bar{z}_{k_i}^n = (0, \dots, 0, z_{k_i}, 0, \dots, 0)^T$.

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} r_{(i)}^{n+1/2} &= A(y_{(i-1)}^{n+1/2} + \alpha_{l_i k_i}^{(n+1)} z_{k_i}^n, y_{(i-1)}^{n+1/2} + \\ &+ \alpha_{l_i k_i}^{(n+1)} z_{k_i}^n) - f, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Очевидно, что $r_{(m)}^{n+1/2} = r^{n+1} = A(u^{n+1}, u^{n+1}) - f$ – невязка схемы (3.3).

Далее:

$$r_{(i)}^{n+1/2} = r_{(i-1)}^{n+1/2} + \alpha_{l_i k_i}^{(n+1)} F_{1n}^{(k_i)} + (\alpha_{l_i k_i}^{(n+1)})^2 F_{2n}^{(k_i)}, \quad (7)$$

$$F_{1n}^{(k_i)} = A(y_{(i-1)}^{n+1/2}, z_{k_i}^n) + A_1(z_{k_i}^n, y_{(i-1)}^{n+1/2}),$$

$$\text{где } F_{2n}^{(k_i)} = A_1(z_{k_i}^n, z_{k_i}^n).$$

Из (7) имеем:

$$\begin{aligned} \|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2 &= \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2 + \sum_{S=1}^4 (\alpha_{l_i k_i}^{(n+1)})^S \theta_{sn}^{(k_i)} = \\ &= \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2 - \Phi_{n+1}(\alpha_{l_i k_i}^{(n+1)}), \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь:

$$\theta_{1n}^{(k_i)} = 2(r_{(i-1)}^{n+1/2}, F_{1n}^{(k_i)}),$$

$$\theta_{2n}^{(k_i)} = \|F_{1n}^{(k_i)}\|^2 + 2(r_{(i-1)}^{n+1/2}, F_{2n}^{(k_i)}),$$

$$\theta_{3n}^{(k_i)} = 2(F_{1n}^{(k_i)}, F_{2n}^{(k_i)}), \quad \theta_{4n}^{(k_i)} = \|F_{2n}^{(k_i)}\|^2.$$

Так как $\theta_{4n}^{(k_i)} \geq 0$, то график зависимости $\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2$ от $\alpha_{l_i k_i}^{(n+1)}$ имеет вид, показанный на рис. 2.

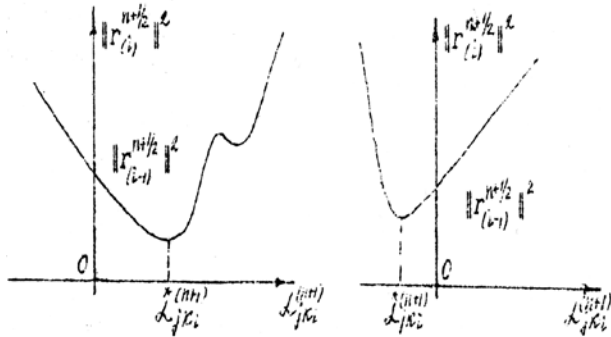


Рис. 2.

Таким образом, у полинома (8) или два, или один минимум. При этом глобальный минимум величины $r_i^{(n+1/2)}$ не превосходит $r_{i-1}^{(n+1/2)}$. Выберем $\alpha_{l_i k_i}^{(n+1)}$ из условия минимума нормы вектора невязки $\|r_{(i)}^{(n+1/2)}\|$. Тогда $\alpha_{l_i k_i}^{(n+1)}$ находится как решение уравнения:

$$\sum_{q=1}^4 q(\alpha_{l_i k_i}^{(n+1)})^{q-1} \theta_{qn}^{(k_i)} = 0 \quad (9)$$

по явным формулам Кардано. Пусть $\alpha_{l_i k_i}^{*(n+1)}$ – решение (7), отвечающее глобальному минимуму (8). Подставив этот корень в (8), получим:

$$\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2 = \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2 - \Phi_{n+1}^{(i)} = \rho_{(i)}^2 \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2, \quad (10)$$

$$\rho_{(i)}^2 = 1 - \Phi_{n+1}^{(i)} / \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2,$$

где $\Phi_{n+1}^{(i)} = \Phi_{n+1}(\alpha_{l_i k_i}^{*(n+1)}) \geq 0$.

Таким образом,

$$\|r_{(i)}^{n+1/2}\| \leq \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\| \leq \dots \leq \|r_0^{n+1/2}\| = \|r^{n-1/2}\|,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и, в силу ограниченности $\|r^0\|$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|r^n\| = \|r^\infty\| < \infty.$$

Следует отметить, что $\Phi_{n+1}^{(i)} = 0$ только в случае $\alpha_{l_i k_i}^{*(n+1)} = 0$, а это возможно, если

$$\theta_{1n}^{(k_i)} = 2(r_{(i-1)}^{n+1/2}, F_{1n}^{(k_i)}) = 0. \quad (11)$$

Следовательно, для того чтобы последовательность $\{\|r^n\|\}$ была убывающей, номера $l_i, k_i, i = 1, 2, \dots, m$, в котором стоит элемент $\alpha_{j k_i}^{*(n+1)}$, необходимо выбирать так, чтобы величина $\Phi_{n+1}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, m$ была наибольшей. При этом, в случае, например, $k_1 = k_2$, независимо от

$l_i = 1, 2, \dots, m$, мы будем изменять оба раза одну и ту же k_i – компоненту вектора u^{n+1} .

Рассуждая аналогично, найдем параметр τ_{n+1} первого шага схемы, при выводе вместо набора векторов $y_i^{n+1/2}$ используем $u^{n+1/2}$, а вместо $\tilde{e}_i^n - r^{n+1/2}$. В итоге τ_{n+1} находится как решение уравнения $\sum_{q=1}^4 q(\tau_{n+1})^{q-1} \theta_{qn} = 0$, где $\theta_{1n} = 2(r^{n+1/2}, F_{1n})$, $\theta_{2n} = \|F_{1n}\|^2 + 2(r^{n+1/2}, F_{2n})$, $\theta_{3n} = 2(F_{1n}, F_{2n})$, $\theta_{4n} = \|F_{2n}\|^2$, а $F_{1n} = A(u^{n+1/2}, r^{n+1/2}) + A_1(r^{n+1/2}, u^{n+1/2})$, $F_{2n} = A_1(r^{n+1/2}, r^{n+1/2})$.

Подробнее о методе см. [4].

4. В данном пункте приведены результаты расчетов течений вязкой несжимаемой жидкости в каналах различных форм при заданном перепаде давления.

Целью проведенных расчетов являлась проверка допустимости задания условий на компоненты скорости на входных и выходных границах области, а также возможности получения «логичного» решения при отсутствии подобных условий.

Наряду с постановкой граничных условий, показанной выше, рассматривалась задача (1), (2), но без условия (2.3). Для замыкания разностной задачи (3), (2.1), (2.2) мы аппроксимируем исходную систему на границах внутри области решения.

На первом этапе были изучены течения жидкости в каналах наиболее простой формы: с параллельными или перпендикулярными стенками. Далее были проведены численные эксперименты в каналах «сложной» формы (в качестве такого канала выбран канал-диффузор) и влияние наличия или отсутствия условия (2.3) на получаемое решение.

Во всех расчетах давление $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0$. Параметр вязкости $\nu = 0.01$.

Кроме схемы (3), построенной для «совмещенной» сетки (в одном и том же узле сетки рассчитываются все сеточные функции), использовалась и схема, на «разнесенной» сетке (см. [5]), когда каждая из переменных u , v и p рассчитывается на своем наборе узлов.

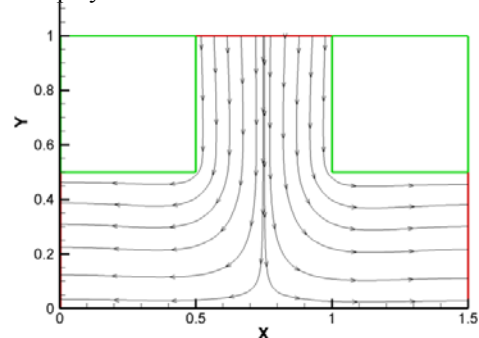


Рис. 3. Течение в Т-образном канале. Задача (3), (2.1), (2.2). Без (2.3):

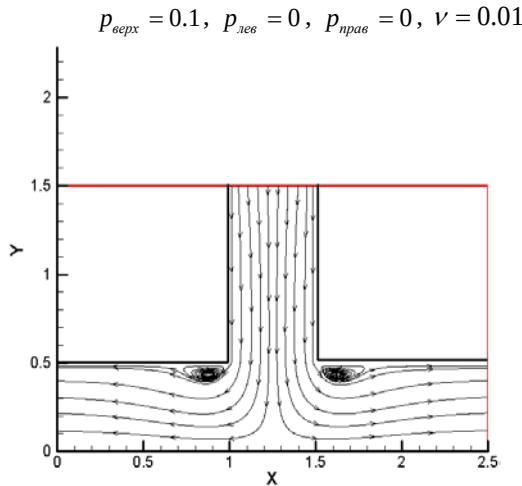


Рис. 4. Течение в Т-образном канале.
Задача (3), (2.1), (2.2). Без (2.3):

$$p_{\text{верх}} = 1, p_{\text{лев}} = 0, p_{\text{прав}} = 0, \nu = 0.01$$

Если стенки канала параллельны, а углы между границами прямые, то реализация краевых условий (2.1), (2.2) (без (2.3)) дает картину течения, совпадающую с течениями, приведенными в [2, 6]. При увеличении перепада давления, вызывающего движение в Т-образном канале, появляются вихри на верхних стенках (см. рис. 3, 4), что также соответствует результатам указанных работ. Отличие от решения соответствующей задачи (2.1), (2.2), (2.3) менее 1 %.

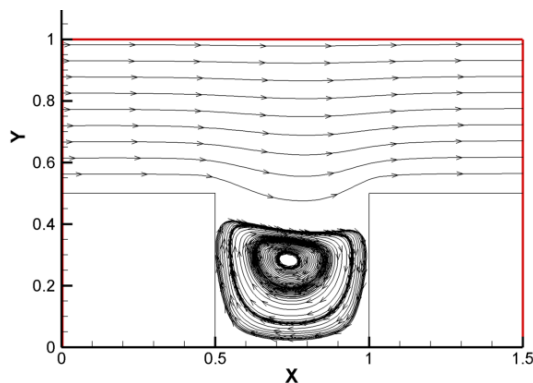


Рис. 5. Течение в канале с траншеей.
Задача (3), (2.1), (2.2). Без (2.3):

$$p_{\text{вход}} = 0.1, p_{\text{выход}} = 0, \nu = 0.01$$

Полученное решение краевой задачи (2.1), (2.2), без использования (2.3), в канале-траншее (рис. 5) согласуется с решениями аналогичной задачи в работе [3], где в качестве граничных условий задан вектор скорости на границе.

При малом угле канала-диффузора течения для разных постановок краевых условий качественно совпадают, однако значения вертикальной компоненты вектора скорости для задачи (2.1), (2.2) отличны от 0 на границе вытекания, что можно считать «естественным» для данной задачи.

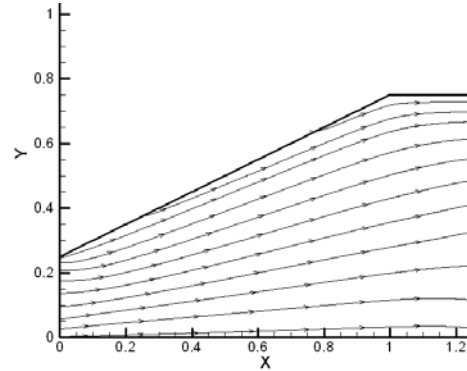


Рис. 6. Течение в канале-диффузоре
с продолжением.

Линии тока. Задача (2.1), (2.2), без (2.3):

$$p_{\text{вход}} = 0.1, p_{\text{выход}} = 0, \nu = 0.01$$

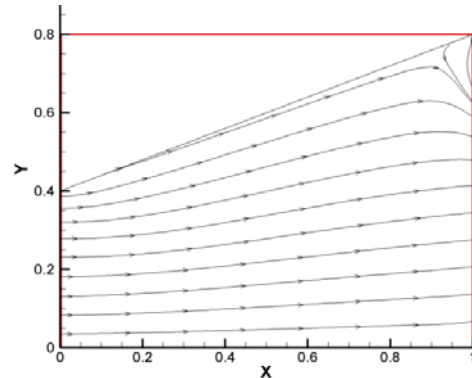


Рис. 7. Течение в канале-диффузоре.

Линии тока. Задача (2.1), (2.2), без (2.3):

$$p_{\text{вход}} = 0.1, p_{\text{выход}} = 0, \nu = 0.01$$

В случае течения в расширяющемся канале со стенками, параллельными вблизи выхода, получаем течение, не зависящее от наличия или отсутствия условия (2.3) (рис. 8). В [7] показано течение в канале-диффузоре при заданном поле скоростей на входе в канал. Показанный в этой работе отрыв от верхней стенки обнаруживается и при решении задачи (1), (2.1), (2.2) (см. рис. 7). Однако задание на правой границе нормальной составляющей скорости приводит к течению, отличному от приведенного в [7].

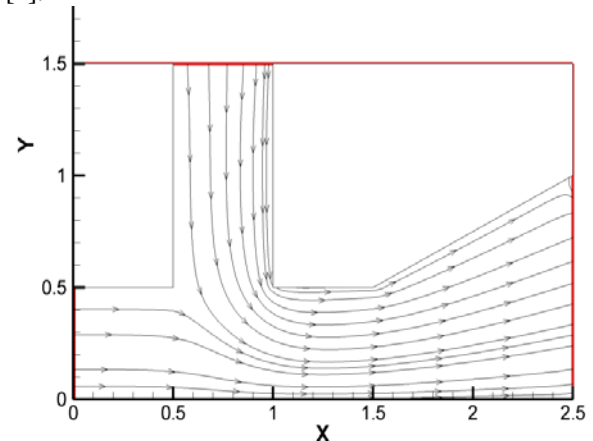


Рис. 8. Течение в Т-образном канале с расширением.
Линии тока. Задача (2.1), (2.2), без (2.3):

$$p_{\text{верх}} = 1, p_{\text{лев}} = 0.5, p_{\text{прав}} = 0, \nu = 0.01$$

Дополнив канал с параллельными и перпендикулярными стенками каналом с расширением (см. рис. 9) обнаружим отрывное течение аналогичное показанному на рис. 7.

5. Метод решения, используемый в работе, не требует задания поля скоростей на границе, позволяя при этом получать логичные решения, совпадающие с решениями других авторов.

Литература

1. Рагулин, В. В. О гидродинамическом моделировании мембранного фильтрования вязкой жидкости / В. В. Рагулин // Вестник КемГУ. – Кемерово, 2005. – Вып. 4(24). – С. 133 – 137.

2. Кузнецов, Б. Г. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах при заданных перепадах давлений / Б. Г. Кузнецов, Н. П. Мошкин, Ш. Смагулов // Численные методы динамики вязкой жидкости. – Новосибирск, 1983. – С. 203 – 207.

3. Захаров, Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики / Ю. Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.

4. Захаров, Ю. Н. Итерационная схема минимальных невязок решения стационарной системы уравнений Навье-Стокса / Ю. Н. Захаров, О. Н. Нагорнова // Проблемы динамики вязкой жидкости. – Новосибирск, 1985. – С. 156 – 159.

5. Патанкар, С. Численные методы решения задач тепломеханики и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 149 с.

6. Дорфман, А. Л. Численное решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в разветвляющемся канале при задании перепадов давления между ответвлениями / А. Л. Дорфман // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1979. – Т. 10. – № 7. – С. 47 – 53.

7. Карякин, В. Е. Расчет течений вязкой жидкости в плоских каналах произвольной формы / В. Е. Карякин, Ю. Е. Карякин // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1986. – Т. 17. – № 5. – С. 91 – 100.