УДК 514.76

**ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПСЕВДОКЕЛЕРОВЫ СТРУКТУРЫ
НА НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ ЛИ ТИПА M1**

Н. К. Смоленцев

В работе [3] найдены левоинвариантные комплексные структуры на шестимерной группе Ли G_1 с алгеброй Ли типа $M1$ (по классификации Морозова). В работе [2] показано, что группа Ли G_1 является симплектической. В данной работе найдены левоинвариантные псевдокелеровы структуры на группе Ли G_1 и исследованы их свойства кривизны. Показано, что соответствующие метрики образуют 6 параметрическое семейство неплоских Риччи-плоских метрик. Они дают новые примеры неплоских левоинвариантных эйнштейновых псевдоримановых метрик на шестимерных нильпотентных группах Ли.

1. Группа Ли G_1 . По классификации Морозова [5] существует 22 неразложимых неизоморфных вещественных нильпотентных шестимерных алгебры Ли, обозначаемых символами $M1 - M22$. Рассмотрим шестимерную группу Ли G_1 , которая имеет алгебру Ли $M1$, определенную следующими коммутационными соотношениями: $[E_1, E_2] = E_4$, $[E_2, E_3] = E_6$, $[E_2, E_4] = E_5$. Таким образом, алгебра Ли имеет всего три ненулевые структурные константы: $C_{12}^4 = 1$, $C_{23}^6 = 1$, $C_{24}^5 = 1$. Данная алгебра Ли имеет двумерный центр Z , образованный векторами E_5, E_6 . Общий элемент $X = x^1 E_1 + x^2 E_2 + x^3 E_3 + x^4 E_4 + x^5 E_5 + x^6 E_6$ алгебры Ли может быть представлен матрицей X порядка 6, первые две строки которой имеют вид $(0, x^2, x^1, x^5, -x^4, x^6)$, $(0, 0, 0, x^4, x^1, x^3)$, а остальные строки – нулевые. Общий элемент соответствующей группы Ли G_1 имеет вид $g = Id + X$, где Id – единичная матрица.

В работе [2] показано, что группа Ли G_1 является симплектической. Она имеет три левоинвариантные симплектические структуры, которые задаются 2-формами:

$$\omega_1 = -\theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_6,$$

$$\omega_2 = \theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_6,$$

$$\omega_3 = \theta_1 \wedge \theta_6 + \theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_4,$$

$$J_{62} = -\frac{((\psi_{33} + \psi_{11})\psi_{41} + \psi_{42}\psi_{21})\psi_{54}\psi_{43} + (\psi_{53}\psi_{41} - \psi_{51}\psi_{43})(\psi_{33}^2 + 1) + (\psi_{33} + \psi_{11})\psi_{61}\psi_{43}^2}{\psi_{43}^2\psi_{21}},$$

при условии, что $\psi_{43}\psi_{21} \neq 0$. Из выражения (1) сразу следует, что центр Z алгебры Ли инвариантен относительно оператора комплексной структуры J .

Напомним, что почти комплексная структура J является интегрируемой (комплексной) [1], если ее тензор Нейенхейса:

$$N(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$$

обращается в нуль. В случае левоинвариантной почти комплексной структуры J на группе Ли тензор Нейенхейса легко выражается через структурные константы алгебры Ли:

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ – 1-формы, двойственные базису $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ алгебры Ли $M1$.

В работе [3] показано, что группа Ли G_1 имеет 10-и параметрическое семейство левоинвариантных комплексных структур, которые определяются следующим оператором J почти комплексной структуры на алгебре Ли $M1$:

$$J = \begin{pmatrix} \psi_{11} & -\frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & -\psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{31} & J_{32} & \psi_{33} & -\frac{\psi_{33}^2 + 1}{\psi_{43}} & 0 & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & -\psi_{33} & 0 & 0 \\ \psi_{51} & J_{52} & \psi_{53} & \psi_{54} & -\psi_{33} & \psi_{43} \\ \psi_{61} & J_{62} & -\psi_{54} & J_{64} & -\frac{\psi_{33}^2 + 1}{\psi_{43}} & \psi_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\text{где } J_{31} = \frac{(\psi_{33} - \psi_{11})\psi_{41} - \psi_{42}\psi_{21}}{\psi_{43}},$$

$$J_{32} = \frac{(\psi_{33} + \psi_{11})\psi_{42}\psi_{21} + (\psi_{11}^2 + 1)\psi_{41}}{\psi_{43}\psi_{21}},$$

$$J_{64} = -\frac{(\psi_{33}^2 + 1)\psi_{53} + 2\psi_{54}\psi_{43}\psi_{33}}{\psi_{43}^2},$$

$$J_{52} = \frac{(\psi_{11} - \psi_{33})(\psi_{53}\psi_{41} - \psi_{51}\psi_{43})}{\psi_{43}\psi_{21}} + \frac{\psi_{53}\psi_{42}}{\psi_{43}} - \frac{\psi_{54}\psi_{41} + \psi_{61}\psi_{43}}{\psi_{21}},$$

$$N_{ij}^k = 2(J^l_i J^m_j C_{lm}^k - C_{ij}^k - J^k_m J^l_j C_{il}^m - J^k_m J^l_i C_{lj}^m). \quad (2)$$

2. Комплексные структуры на группе Ли G_1 , ассоциированные с симплектическими формами. Почти комплексная структура J называется ассоциированной с симплектической формой ω , если $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ для любых элементов $X, Y \in M1$. В этом случае 2-форма

$$g_J(X, Y) = \omega(X, JY) \quad (3)$$

является симметричной и поэтому определяет на псевдориманову метрику на группе Ли G_1 .

Если J – интегрируемая почти комплексная структура, то тройка (g_J, J, ω) определяет левоинвариантную (псевдо)келерову структуру на группе G_1 . Выделим из семейства (1) те комплексные структуры на G_1 , которые ассоциированы с симплектической структурой на M . Учитывая, что $J^2 = -1$, условие ассоциированности удобно представить в форме:

$$\omega(JX, Y) + \omega(X, JY) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим сначала формы:

$$\omega_1 = -\theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_6 \text{ и}$$

$$\omega_2 = \theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_6.$$

Оператор J , удовлетворяющий условию (4),

имеет блочный вид: $J = \begin{pmatrix} A & B \\ \tilde{N} & D \end{pmatrix}$, где блоки обла-

дают некоторыми свойствами симметрии. В частности, блок B имеет вид для первой и второй форм, соответственно:

$$B_1 = \begin{pmatrix} J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ -J_{15} & J_{25} & J_{26} \\ -J_{16} & J_{26} & J_{36} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{15} & J_{25} & J_{26} \\ J_{16} & J_{26} & J_{36} \end{pmatrix}.$$

$$J_\omega = \begin{pmatrix} \psi_{11} & -\psi_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & -\psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{42}\psi_{11}^2 + \psi_{42} + 2\psi_{41}\psi_{43}\psi_{11}}{\psi_{43}^2} & \psi_{41} & -\psi_{11} & -\frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & 0 & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{11} & 0 & 0 \\ \psi_{51} & J_5^2 & \psi_{42} & -\psi_{41} & \psi_{11} & \psi_{43} \\ \psi_{61} & \psi_{51} & \psi_{41} & \frac{\psi_{42}\psi_{11}^2 + \psi_{42} + 2\psi_{41}\psi_{43}\psi_{11}}{\psi_{43}^2} & -\frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & -\psi_{11} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $J_5^2 = \frac{2\psi_{11}\psi_{43}\psi_{42}\psi_{41} - 2\psi_{11}\psi_{43}^2\psi_{51} + \psi_{42}^2\psi_{11}^2 + \psi_{42}^2 + \psi_{43}^2\psi_{41}^2 - \psi_{43}^2\psi_{61}^2}{(\psi_{11}^2 + 1)\psi_{43}}$. Соответствующая псевдориманова метрика $g_J(X, Y) = \omega(X, JY)$ имеет следующую матрицу:

$$g_J = \begin{pmatrix} \psi_{61} & \psi_{51} & \psi_{41} & \frac{\psi_{42}\psi_{11}^2 + \psi_{42} + 2\psi_{41}\psi_{43}\psi_{11}}{\psi_{43}^2} & -\frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & -\psi_{11} \\ \psi_{51} & g_{22} & \psi_{42} & -\psi_{41} & \psi_{11} & \psi_{43} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{11} & 0 & 0 \\ \frac{\psi_{42}\psi_{11}^2 + \psi_{42} + 2\psi_{41}\psi_{43}\psi_{11}}{\psi_{43}^2} & -\psi_{41} & \psi_{11} & \frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & \psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi_{11} & \psi_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $g_{22} = \frac{2\psi_{11}\psi_{43}\psi_{42}\psi_{41} - 2\psi_{11}\psi_{43}^2\psi_{51} + \psi_{42}^2\psi_{11}^2 + \psi_{42}^2 + \psi_{43}^2\psi_{41}^2 - \psi_{43}^2\psi_{61}^2}{(\psi_{11}^2 + 1)\psi_{43}}$. Таким образом, мы получили 7-и

параметрическое семейство псевдокелеровых метрик на группе G_1 .

Тогда для комплексной структуры (1) мы име-

ем $J_{34} = -\frac{\psi_{33}^2 + 1}{\psi_{43}} = -J_{16} = 0$ – в случае формы ω_1 и

$J_{34} = -\frac{\psi_{33}^2 + 1}{\psi_{43}} = J_{16} = 0$ – в случае формы ω_2 , что

невозможно. Поэтому комплексных структур на G_1 , ассоциированных с симплектическими структурами ω_1 и ω_2 , – нет.

Рассмотрим третью симплектическую форму $\omega_3 = \theta_1 \wedge \theta_6 + \theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_4$. Оператор J , удовлетворяющий условию (4), имеет блочный вид:

$J = \begin{pmatrix} A & B \\ \tilde{N} & D \end{pmatrix}$, где блоки обладают некоторыми

свойствами симметрии. А именно: блок A – произвольный, блоки B и C – симметричные относительно побочной диагонали, блок $D = -A^t$. Учитывая эти симметрии, получаем следующий вид комплексной структуры, ассоциированной с симплектической формой ω_3 :

Из выражения (6) сразу следует, что центр Z алгебры Ли лежит в изотропном конусе и ортогонален подпространству $\{E_3, E_4\}$. Отметим также, что на подпространстве $\{E_3, E_4\}$ метрический тензор положительно определен при любых значениях параметров.

Хорошо известно, что левоинвариантная почти комплексная структура J является биинвариантной, если $J \cdot ad_X = ad_X \cdot J$ для любого вектора X из алгебры Ли. Легко видеть, что ассоциированные комплексные структуры (6) не являются биинвариантными.

3. Кривизна псевдокелеровых метрик на G_1 .

Найдем тензоры кривизны и Риччи данной псевдоримановой метрики (6). Хорошо известно, что компоненты римановой связности Γ_{ij}^k левоинвариантной метрики на группе Ли и тензора кривизны R_{ijk}^s выражаются через структурные константы. Для выбранного ранее базиса $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ алгебры Ли M_1 имеем $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$. Компоненты связности Γ_{ij}^k находим из шестичленной формулы [1], которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид: $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$.

Используя структурные константы C_{ij}^k в базисе $\{E_i\}$ алгебры Ли получаем:

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} g^{kn} (C_{ij}^p g_{pk} + C_{ki}^p g_{pj} + C_{kj}^p g_{ip}). \quad (7)$$

Тензор кривизны определяется равенством $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$, где X, Y, Z – левоинвариантные векторные поля на группе Ли. В базисе $\{E_i\}$ имеем:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^s E_s &= R(E_i, E_j) E_k = \\ &= \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_k - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_k - \nabla_{[E_i, E_j]} E_k = \\ &= \Gamma_{ip}^s \Gamma_{jk}^p E_s - \Gamma_{jp}^s \Gamma_{ik}^p E_s - C_{ij}^p \Gamma_{pk}^s E_s. \\ R_{ijk}^s &= \Gamma_{ip}^s \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^s \Gamma_{ik}^p - C_{ij}^p \Gamma_{pk}^s. \end{aligned} \quad (8)$$

Тензор Риччи определяется как свертка тензора кривизны по первому и по четвертому (верхнему) индексам: $Ric_{jk} = R_{ijk}^i$. Скалярная кривизна определяется как свертка тензора Риччи $S = g^{jk} Ric_{jk}$. Будем рассматривать также (псевдо)риманов скалярный квадрат тензора кривизны:

$$NR = g^{ip} g^{jr} g^{ks} g_{lt} R_{ijk}^l R_{prs}^t. \quad (9)$$

Прямыми вычислениями в системе Maple по формулам (5) – (9) получаем следующие свойства.

Свойства псевдокелеровой структуры на группе Ли G_1 .

Комплексная структура J_ω вместе с симплектической структурой

$\omega_3 = \theta_1 \wedge \theta_6 + \theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_4$ и квадратичной формой g_ω образуют псевдокелерову структуру сигнатуры $(-, -, +, +, +, +)$ на группе Ли G_1 . Центр Z алгебры Ли M_1 инвариантен относительно оператора комплексной структуры J_ω , он лежит в изотропном конусе и ортогонален подпространству $\{E_3, E_4\}$. На подпространстве $\{E_3, E_4\}$ метрический тензор положительно определен при любых значениях параметров. Псевдориманова норма тензора кривизны равна нулю при любых значениях параметров, $NR(g_j) = 0$. Тензор кривизны R_{ijk} имеет, с точностью до симметрий, одну ненулевую компоненту $R_{1212} = \frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}}$. Тензор Риччи является нулевым при любых значениях параметров, $Ric(g_j) = 0$.

Известно [4], что если левоинвариантная риманова метрика на унимодулярной разрешимой группе Ли G эйнштейнова, то эта метрика плоская. Построенные метрики показывают, что данное утверждение не верно для левоинвариантных псевдоримановых метрик на шестимерных нильпотентных группах Ли.

4. Некоторые классы псевдокелеровых метрик на G_1 .

Общая псевдокелерова метрика (6) зависит от шести параметров $\psi_{11}, \psi_{43}, \psi_{41}, \psi_{42}, \psi_{51}, \psi_{61}$, с одним условием: $\psi_{43} \neq 0$.

Рассмотрим два частных класса метрик. Пусть сначала $\psi_{41} = 0, \psi_{42} = 0, \psi_{51} = 0, \psi_{61} = 0$. Тогда получаем следующие выражения комплексной структуры и ассоциированной метрики:

$$g_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & -\psi_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{11} & \psi_{43} \\ 0 & 0 & \psi_{43} & \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{11} & \frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{43}} & \psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{43} & -\psi_{11} & \psi_{43} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$J_\omega = \begin{pmatrix} \psi_{11} & -\psi_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{43}} & -\psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{43} & & & & & \\ 0 & 0 & -\psi_{11} & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{43}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{43} & \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{11} & \psi_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{43}} & -\psi_{11} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Легко видеть, что метрический тензор имеет сигнатуру $(-, -, +, +, +, +)$ при $\psi_{43} > 0$ и сигнатуру $(+, +, -, -, -, -)$ при $\psi_{43} < 0$. Оператор J_ω комплексной структуры имеет следующие голоморфные площадки: $\{E_1, E_2\}$, $\{E_3, E_4\}$, $\{E_5, E_6\}$.

Другой класс псевдоклеровых метрик получается при $\psi_{11} = 0, \psi_{43} = 1$:

$$g_J = \begin{pmatrix} \psi_{61} & \psi_{51} & \psi_{41} & \psi_{42} & -1 & 0 \\ \psi_{51} & \psi_{42}^2 + \psi_{41}^2 - \psi_{61} & \psi_{42} & -\psi_{41} & 0 & 1 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{42} & -\psi_{41} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$J_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi_{42} & \psi_{41} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{51} & \psi_{42}^2 + \psi_{41}^2 - \psi_{61} & \psi_{42} & -\psi_{41} & 0 & 1 \\ \psi_{61} & \psi_{51} & \psi_{41} & \psi_{42} & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Легко видеть, что метрический тензор имеет сигнатуру $(-, -, +, +, +, +)$ при любых значениях параметров $\psi_{41}, \psi_{42}, \psi_{51}, \psi_{61}$. Отметим также, что эти параметры не влияют на тензор кривизны.

Литература

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. / Ш. Кобаяси, К. Намидзу. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
2. Khakimjanov, Y. Symplectic or contact structures on Lie Groups / Y. Khakimjanov, M. Goze, A. Medina // Preprint // Эл. вариант. – Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/math.DG/0205290>.
3. Magnin, L. Complex Structures on Indecomposable 6-dimensional Nilpotent Real Lie Algebras / L. Magnin // Preprint // Эл. вариант. – Режим доступа: <http://www.u-bourgogne.fr/monge/l.magnin>.
4. Miatello, Dotti I. Ricci curvature of left-invariant metrics on solvable unimodular Lie groups // Math. Zeit. – 1982. – V. 180. – P. 257 – 263.
5. Морозов, В. В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка [Текст] / В. В. Морозов // Изв. вузов. Сер. «Математика». – 1958. – № 4. – С. 161 – 174.