УДК 517.988.8

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРОЙ

О. В. Малышенко

Многие задачи математической физики допускают естественную вариационную постановку. Вариационный подход позволяет снять ограничения гладкости искомого решения, не вызванные физической природой изучаемого явления (рассматривается так называемое обобщенное решение).

В механике, физике, экономике часто приходится иметь дело с более общим классом задач, которые также приводятся к экстремальным, но на более узком множестве функций, чем традиционные. Для исследования такого рода экстремальных задач с ограничениями были привлечены так называемые вариационные неравенства. Также вариационные неравенства возникают в ряде разделов механики сплошных сред, в задачах со свободной границей, во многих задачах оптимального управления и т. п. [1].

Рассмотрим одну задачу об управлении температурой[2]. Пусть Ω – ограниченная область евклидова пространства R^n, $n \le 3$, которую занимает сплошная среда, с границей Γ. Обозначим за $u(x,t)$ температуру в точке $x \in \Omega$ в момент времени t.

Зададим две исходные температуры $h_1(x)$ и $h_2(x)$, где $x \in \Gamma$. Потребуем, чтобы температура $u(x,t)$ на границе как можно более точно принимала значения из интервала $\left(h_1(x), h_2(x)\right)$. С этой целью установим «термостатические регуляторы», подающие через границу тепловой поток. Так как эффективность таких устройств ограничена, то тепловой поток, подаваемый через границу, будет заключен в интервале $[g_1, g_2]$, содержащем 0. Управление регуляторами будем осуществлять следующим образом:

1) если $u(x,t) \in \left(h_1(x), h_2(x)\right)$, т. е. температура находится в заданном интервале и нет необходимости подавать тепловой поток, то $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$;

2) если $u(x,t) \notin \left[h_1(x), h_2(x)\right]$, то вводим тепловой поток следующим образом:

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = g_1, \quad \text{если } u < h_1; \; 0 \le -\frac{\partial u}{\partial n} \le g_2, \quad \text{если } u = h_2, \quad g_1 \le \frac{\partial u}{\partial n} \le 0, \; \text{если} \; u = h_1, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad \text{если } u > h_2. \tag{1}$$

Введем функцию Φ:

$$\Phi(u) = \begin{cases} g_1, & \text{если } u < h_1 \\ [g_1, 0], & \text{если } u = h_1 \\ 0, & \text{если } h_1 < u < h_2 \\ [0, g_2], & \text{если } u = h_2 \\ g_2, & \text{если } u > h_2 \end{cases}, \tag{2}$$

тогда условия (1) перепишутся в виде:

$$-\frac{\partial u}{\partial n} \in \Phi(u(t)) \text{ на } \Gamma \times [0, T]. \tag{3}$$

Задача D. Найти функцию: $u(x,t),\ t \in [0,T],\ x \in \Omega$, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

а также граничному условию (3) и следующему начальному условию: $u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in \Omega$.

Задача D допускает вариационную постановку.

Задача V. Найти функцию

$$\begin{aligned} & u(t) \in H^1(\Omega),\ t \in [0,T]: \\ & (u_t, v-u) + a(u, v-u) - (f, v-u) + \\ & + j(v) - j(u) \ge 0,\ \forall\ v \in H^1(\Omega) \\ & u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$, $\quad (f,v) = \int\limits_{\Omega} f v dx$,

$j(v) = \int\limits_{\Gamma} \psi(v) d\Gamma$, где

$$\psi(v) = \begin{cases} g_1(v - h_1), & \text{если } v < h_1 \\ 0, & \text{если } h_1 < v < h_2 \\ g_2(v - h_2), & \text{если } v > h_2 \end{cases}.$$

Функционал $j(v)$ является недифференцируемым, так как функция $\psi(v)$ недифференцируема в точках h_1, h_2. Заменим $j(v)$ на дифференцируемый функционал $j_\varepsilon(v)$, вычисляемый по формуле $j_\varepsilon(v) = \int\limits_{\Gamma} \psi_\varepsilon(v) d\Gamma$, где:

$$\psi_\varepsilon(v)=\begin{cases} g_1 v - g_1 h_1, \text{ если } v \le h_1 - d \\ -\dfrac{g_1\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2}v^2+\left[g_1+\dfrac{2(h_1-d)g_1\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2}\right]v-c_1, \text{ если } h_1-d\le v\le h_1+\varepsilon \\ 0, \text{ если } h_1+\varepsilon\le v\le h_2-\varepsilon \\ \dfrac{g_2\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2}v^2+\left[g_2-\dfrac{2(h_2+d)g_2\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2}\right]v-c_2, \text{ если } h_2-\varepsilon\le v\le h_2+d \\ g_2 v - g_2 h_2, \text{ если } v \ge h_2+d, \end{cases}$$

где $c_1=\dfrac{g_1\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2}(h_1-d)^2-g_1h_1,\;\; c_2=-\dfrac{g_2\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2}(h_2+d)^2+g_2h_2,\;\; \varepsilon>d$.

Таким образом, задача D «приближается» следующей регуляризованной задачей.

Задача V_ε. Найти $u_\varepsilon(t)\in H^1(\Omega),\ t\in[0,T]$:

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v-u_\varepsilon\right)+a(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon)- -(f, v-u_\varepsilon)+j_\varepsilon(v)-j_\varepsilon(u_\varepsilon)\ge 0,\ \forall\, v\in H^1(\Omega). \quad (5)$$

Проведем дискретизацию по времени. Для каждого момента времени $t=nk$, где $k=\dfrac{T}{N}$, $n=0,1,...N$, эволюционному вариационному неравенству (5) поставим в соответствие следующее вариационное неравенство:

$$\left(\frac{u_\varepsilon^{n+1}-u_\varepsilon^n}{k}, v-u_\varepsilon^{n+1}\right)+ +\int_\Omega \nabla u_\varepsilon^{n+1}\nabla(v-u_\varepsilon^{n+1})dx-(f^{n+1}, v-u_\varepsilon^{n+1})+ +j_\varepsilon(v)-j_\varepsilon(u_\varepsilon^{n+1})\ge 0, \quad (6)$$

$\forall\ v\in H^1(\Omega)$, $u_\varepsilon^{n+1}\in H^1(\Omega),\ \ u^0=u_0$.

Лемма. Решение вариационного неравенства (6) эквивалентно решению следующей вариационной задаче: найти $u_\varepsilon\in H^1(\Omega)$:

$J_\varepsilon(u_\varepsilon)\le J_\varepsilon(v)\quad \forall v\in H^1(\Omega)$, где

$$J_\varepsilon(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\,dx-(v,u_\varepsilon^{n+1})+ +\frac{k}{2}a(v,v)-k(f^{n+1},v)+kj_\varepsilon(v). \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что функционал (7) выпуклый, субдифференцируемый, коэрцитивный и слабо полунепрерывный снизу.

Для численного решения задачи V_ε воспользуемся известным методом Ритца [3].

В пространстве $H^1(\Omega)$ фиксируем полную ортогональную систему:

$$\varphi_{ij}(x,y)= =\begin{Bmatrix} \cos i\pi x\cos j\pi y,\ \cos i\pi x\sin j\pi y, \\ \sin i\pi x\sin j\pi y,\ \sin i\pi x\cos j\pi y \end{Bmatrix}$$

$i,j=1,2,.....$

Обозначим через E_{n^2} – конечномерное пространство, натянутое на базисные функции $\varphi_{ij}(x,y),\quad i,j=1,2,..n$.

Так как $J_\varepsilon(v)$ дифференцируем, по Гато, на $H^1(\Omega)$, то он дифференцируем, по Гато, и на E_{n^2}, причем для произвольных векторов $v,h\in E_n$, т. е. для:

$v=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\varphi_{ij},\ h=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}\varphi_{ij}$, где α_{ij},β_{ij} произвольные числа, имеем:

$$\left.\frac{d}{dt}J_\varepsilon(v+th)\right|_{t=0}=\left\langle\nabla J_\varepsilon(v),h\right\rangle= =\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}\left\langle\nabla J_\varepsilon\left(\sum_{r,l=1}^{n}\alpha_{rl}\varphi_{rl}\right),\varphi_{ij}\right\rangle.$$

Таким образом, система Ритца для отыскания точки абсолютного минимума $J_\varepsilon(v)$ на E_{n^2} имеет вид:

$$\left\langle \nabla J_\varepsilon \left(\sum_{r,l=1}^{n} \alpha_{rl}\varphi_{rl} \right), \varphi_{ij} \right\rangle = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots n \ (8)$$

Вычислив, производную Гато:

$$\left\langle \nabla J_\varepsilon(v), h \right\rangle = \int_\Omega |\, vh \,|\, dx - (h, u_\varepsilon^n) + ka(v,h) - k(f^{n+1}, h) + k\int_\Gamma \psi'(v) h d\Gamma,$$ где

$$\psi'_\varepsilon(v) = \begin{cases} g_1, \text{ если } v \le h_1 - d \\ -\dfrac{2g_1\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2} v + \left[g_1 + \dfrac{2(h_1 - d)g_1\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2} \right], \text{ если } h_1 - d \le v \le h_1 + \varepsilon \\ 0, \text{ если } \quad h_1 + \varepsilon \le v \le h_2 - \varepsilon \\ \dfrac{2g_2\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2} v + \left[g_2 - \dfrac{2(h_2 + d)g_2\varepsilon}{(d+\varepsilon)^2} \right], \text{ если } h_2 - \varepsilon \le v \le h_2 + d \\ g_2, \text{ если } v \ge h_2 + d \end{cases}$$

систему уравнений (8) специализируем к виду:

$$\int_\Omega \left| \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\varphi_{ij}\varphi_{rl} \right| dxdy \text{ - } (\varphi_{lr}, u_\varepsilon^n) + k\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{lr}}{\partial x} dxdy +$$

$$+ k\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{lr}}{\partial y} dxdy \text{ - } k(f^{n+1}, \varphi_{lr}) + k\int_\Gamma \psi'_\varepsilon \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\varphi_{ij} \right) \varphi_{lr} d\Gamma = 0, \quad (9)$$

$l, r = 1, 2 \dots n.$

Так как функционал $v \to J_\varepsilon(v)$ слабо полунепрерывен снизу и дифференцируем по Гато, то система Ритца (9) однозначно разрешима для любого n [3].

Для численной реализации системы Ритца (9) использовался математический пакет MatLab. В результате численного расчета получаем приближенное решение вариационного неравенства (5), а также значения температуры в области. На рисунке 1а представлена картина распределения линий уровня в начальный момент времени, а на 1б – в конечный. За время $T = 20$ температура в области изменилась: во-первых, на границе температура стала принимать значения из интервала $[h_1, h_2]$, во-вторых, внутри области стало теплее.

Для выполнения расчета были заданы следующие параметры:

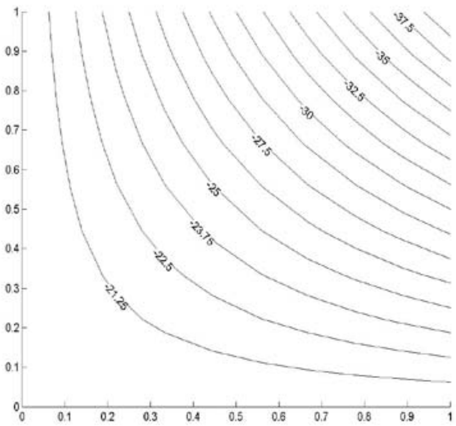
$h_1 = -5,\ h_2 = 0{,}3,\ a = 1,$

$b = 1,\ g_1 = -3,\ g_2 = 3,$

$n = 2,\ f = -1,\ eps = 0{,}0001,$ $\quad u_0 \in [-40, 20].$

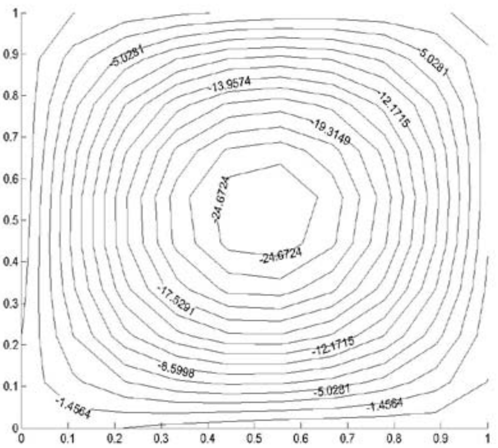
$d = 0{,}000001,$

а)



а) $T = 0$

б)



б) $T = 20$

Рис. 1. ***Распределение температуры в момент времени: а) T = 0, б) T = 20***

Литература

1. Гловински, Р. Г. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Г. Гловински, Ж. -Л. Лионс, Р. Тремольер. – М., 1979.

2. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М., 1980.

3. Вайнберг, М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов / М. М. Вайнберг.– М: Наука, 1972.