УДК 514.76

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПСЕВДОКЕЛЕРОВЫ СТРУКТУРЫ НА НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ ЛИ ТИПА М3

Н. К. Смоленцев, Е. Н. Коровин

В работе [4] найдены левоинвариантные комплексные структуры на шестимерной группе Ли G_3 с алгеброй Ли типа $M3$ (по классификации Морозова). В работе [2] показано, что группа Ли G_3 является симплектической. В данной работе найдены левоинвариантные псевдокелеровы структуры на группе Ли G_3 и исследованы их свойства кривизны. Показано, что соответствующие метрики образуют многопараметрическое семейство неплоских Риччи-плоских метрик. Они дают новые примеры неплоских левоинвариантных эйнштейновых псевдоримановых метрик на шестимерных нильпотентных группах Ли.

1. Группа Ли G_3. По классификации Морозова [6] существует 22 неразложимых неизоморфных вещественных нильпотентных шестимерных алгебры Ли, обозначаемых символами $M1$ – $M22$. Рассмотрим шестимерную группу Ли G_3, которая имеет алгебру Ли $M3$, определенную следующими коммутационными соотношениями: $[E_1,E_2] = E_4$, $[E_1, E_3] = E_5$, $[E_2, E_3] = E_6$. Таким образом, алгебра Ли имеет всего три ненулевые структурные константы: $C_{12}^4 = 1, C_{13}^5 = 1, C_{23}^6 = 1$. Данная алгебра Ли имеет трехмерный центр Z, образованный векторами E_4, E_5, E_6. Общий элемент $X = x^1E_1 + x^2E_2 + x^3E_3 + x^4E_4 + x^5E_5 + x^6E_6$ алгебры Ли может быть представлен матрицей X порядка 6, первые три строки которой имеют вид: $(0, x^2, x^1, x^5, -x^4, x^6)$, $(0, 0, 0, 0, x^1, x^3)$, $(0, 0, 0, x^3, 0, 0)$, а остальные строки – нулевые. Общий элемент соответствующей группы Ли $M3$ имеет вид: $g = Id + X$, где Id – единичная матрица.

В работе [2] показано, что группа Ли G_3 является симплектической. Она имеет левоинвариантную симплектическую структуру, которая задается 2-формой: $\omega(\lambda) = \theta_1 \wedge \theta_6 + \lambda\theta_2 \wedge \theta_5 + (\lambda - 1)\theta_3 \wedge \theta_4$,

$$\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 1, \tag{1}$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ – 1-формы, двойственные базису $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ алгебры Ли $M3$.

В работе [4] показано, что группа Ли G_3 имеет многопараметрическое семейство левоинвариантных комплексных структур, которые определяются операторами J почти комплексной структуры на алгебре Ли, удовлетворяющими условию интегрируемости. Напомним, что, почти комплексная структура J является интегрируемой (комплексной) [1], если ее тензор Нейенхейса:

$$N(X,Y) = 2([JX, JY] - [X,Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]),$$

обращается в нуль. В случае левоинвариантой почти комплексной структуры J на группе Ли тензор Нейенхейса легко выражается через структурные константы алгебры Ли:

$$N_{ij}^k = 2(J_i^l J_j^m C_{lm}^k - C_{ij}^k - J_m^k J_j^l C_{il}^m - J_m^k J_i^l C_{lj}^m). \tag{2}$$

Почти комплексная структура J называется ассоциированной с симплектической формой ω, если $\omega(JX,JY) = \omega(X,Y)$, для любых элементов $X,Y \in M3$. Учитывая, что $J^2 = -1$, условие ассоциированности удобно представить в форме:

$$\omega(JX,Y) + \omega(X,JY) = 0. \tag{3}$$

Для формы $\omega(\lambda)$ оператор J, удовлетворяющий условию (4), имеет блочный вид: $J = \begin{pmatrix} A & B \\ \tilde{N} & D \end{pmatrix}$, где блоки обладают некоторыми свойствами симметрии. А именно: блок A – произвольный, а остальные имеют вид:

$$B = \begin{pmatrix} J_{14} & \lambda J_{26} & J_{16} \\ J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{34} & \dfrac{\lambda J_{24}}{\lambda - 1} & \dfrac{J_{14}}{\lambda - 1} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} J_{41} & J_{42} & J_{43} \\ J_{51} & J_{52} & \dfrac{(\lambda-1)J_{42}}{\lambda} \\ J_{61} & \lambda J_{51} & (\lambda-1)J_{41} \end{pmatrix},$$

$$D = -\begin{pmatrix} J_{33} & \dfrac{\lambda J_{23}}{\lambda-1} & \dfrac{J_{13}}{\lambda-1} \\ \dfrac{(\lambda-1)J_{32}}{\lambda} & J_{22} & \dfrac{J_{12}}{\lambda} \\ (\lambda-1)J_{31} & \lambda J_{21} & J_{11} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для ассоциированной почти комплексной структуры 2-форма: $g_J(X,Y) = \omega(X,JY)$ (5) является симметричной и поэтому определяет на (псевдо) риманову метрику на группе Ли G_3. Если J – интегрируемая почти комплексная структура, то тройка (g_J, J, ω) определяет левоинвариантную (псевдо)келерову структуру на группе G_3.

Как известно, компоненты римановой связности Γ_{ij}^k левоинвариантной метрики на группе Ли и тензора кривизны R_{ijk}^s выражаются через структурные константы. Для выбранного ранее базиса $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ алгебры Ли $M3$ имеем $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$. Компоненты связности Γ_{ij}^k находим из шестичленной формулы [1], которая для левоинвариантных векторных полей X,Y,Z на группе Ли принимает вид:

$$\begin{gathered} 2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y],Z) + \\ + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y]) \end{gathered}.$$

Используя структурные константы C_{ij}^k в базисе $\{E_i\}$ алгебры Ли, получаем:

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} g^{kn} (C_{ij}^p g_{pk} + C_{ki}^p g_{pj} + C_{kj}^p g_{ip}). \tag{6}$$

Тензор кривизны определяется равенством:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\,,$$

где X,Y,Z – левоинвариантные векторные поля на группе Ли. В базисе $\{E_i\}$ имеем:

$$R^s_{ijk} E_s = R(E_i, E_j)E_k =$$
$$= \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_k - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_k - \nabla_{[E_i,E_j]} E_k =$$
$$= \Gamma^s_{ip}\Gamma^p_{jk} E_s - \Gamma^s_{jp}\Gamma^p_{ik} E_s - C^p_{ij}\Gamma^s_{pk} E_s,$$

$$R^s_{ijk} = \Gamma^s_{ip}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^s_{jp}\Gamma^p_{ik} - C^p_{ij}\Gamma^s_{pk}\,. \qquad (7)$$

Тензор Риччи определяется как свертка тензора кривизны по первому и по четвертому (верхнему) индексам: $Ric_{jk} = R_{ijk}{}^i$. Скалярная кривизна определяется как свертка тензора Риччи: $S = g^{jk} Ric_{jk}$. Будем рассматривать также (псевдо)риманов скалярный квадрат тензора кривизны:

$$NR = g^{ip} g^{jr} g^{ks} g_{lt} R^l_{ijk} R^t_{prs}\,. \qquad (8)$$

Найдем ассоциированные с симплектической формой $\omega(\lambda)$ левоинвариантные комплексные структуры J на $M3$, построим соответствующие метрики и вычислим их характеристики кривизны. Все вычисления проведем в системе Maple по формулам (2), (6) – (8). Файлы с программами вычислений можно найти на Web-сайте кафедры математического анализа КемГУ: http://www.math.kemsu.ru /faculty/kma/.

Все левоинвариантные комплексные структуры на группе Ли G_3 разбиваются на три семейства [3]. Рассмотрим отдельно каждый класс.

2. Первое семейство псевдокелеровых метрик. Случай $\xi_{16} \neq 0$. Группа Ли G_3 имеет 12-ти параметрическое семейство левоинвариантных комплексных структур, которые определяются следующим оператором J почти комплексной структуры на алгебре Ли $M3$:

$$J = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{36} & -\xi_{26} & \xi_{16} \\ J_1^2 & \dfrac{\xi_{55}\xi_{16} - \xi_{26}(\xi_{56}+\xi_{12})}{\xi_{16}} & \dfrac{\xi_{45}\xi_{16} + \xi_{26}(\xi_{46}+\xi_{13})}{\xi_{16}} & \dfrac{\xi_{36}\xi_{26}}{\xi_{16}} & -\dfrac{\xi_{26}^2}{\xi_{16}} & \xi_{26} \\ J_1^3 & J_2^3 & \dfrac{\xi_{56}\xi_{26} + \xi_{55}\xi_{16} + \xi_{36}\xi_{13}}{\xi_{16}} & \dfrac{\xi_{36}^2}{\xi_{16}} & -\dfrac{\xi_{36}\xi_{26}}{\xi_{16}} & \xi_{36} \\ J_1^4 & \dfrac{\xi_{56}\xi_{13} - \xi_{53}\xi_{16} + \xi_{46}\xi_{12}}{\xi_{16}} & J_3^4 & -\dfrac{\xi_{56}\xi_{26} - \xi_{55}\xi_{16} + \xi_{46}\xi_{36}}{\xi_{16}} & \xi_{45} & \xi_{46} \\ J_1^5 & \xi_{52} & \xi_{53} & J_4^5 & \xi_{55} & \xi_{56} \\ J_1^6 & J_2^6 & J_3^6 & J_4^6 & J_5^6 & J_6^6 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где символами J_1^3 обозначены рациональные функции остальных переменных ξ_{ij} этой матрицы, выражения которых можно найти в работе [3]. Параметры должны удовлетворять следующему условию: $\xi_{16}(\xi_{46}\xi_{26} + \xi_{45}\xi_{16}) \neq 0$.

Выделим из семейства (9) те комплексные структуры на G_3, которые ассоциированы с симплектической структурой $\omega(\lambda)$ на $M3$. Из условия (4) для комплексной структуры (9) получаем вычислениями в системе Maple, что ассоциированные комплексные структуры вида (9) существуют только для значения $\lambda = 1/2$. Поэтому в этом разделе мы будем рассматривать симплектическую структуру:

$$\omega = \theta_1 \wedge \theta_6 + \frac{1}{2}\theta_2 \wedge \theta_5 - \frac{1}{2}\theta_3 \wedge \theta_4\,.$$

Учитывая симметрии (4) в выражении (9) комплексной структуры, получаем, что ассоциированные комплексные структуры существуют только при $\xi_{45} \neq 0$ и $\xi_{16} \neq 0$, и они имеют следующий вид:

$$J_\omega = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & 0 & 0 & \xi_{16} \\ 0 & 0 & \xi_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\xi_{45}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\dfrac{\xi_{11}\xi_{13} + \xi_{12}\xi_{45}}{\xi_{16}} & -\xi_{53} & \dfrac{2\xi_{12}^2\xi_{45}^2 + \xi_{45}^2\xi_{52}\xi_{16} + 2\xi_{13}^2}{\xi_{16}} & 0 & \xi_{45} & 2\xi_{13} \\ 2\dfrac{\xi_{13} - \xi_{11}\xi_{12}\xi_{45}}{\xi_{16}\xi_{45}} & \xi_{52} & \xi_{53} & -\dfrac{1}{\xi_{45}} & 0 & -2\xi_{12} \\ -\dfrac{\xi_{11}^2 + 1}{\xi_{16}} & \dfrac{\xi_{13} - \xi_{11}\xi_{12}\xi_{45}}{\xi_{16}\xi_{45}} & -\dfrac{\xi_{11}\xi_{13} + \xi_{12}\xi_{45}}{\xi_{16}} & 0 & 0 & -\xi_{11} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Рассмотрим псевдориманову метрику на группе Ли G_3, определенную почти комплексной структурой J_ω и симплектической формой $\omega = \theta_1 \wedge \theta_6 + \frac{1}{2}\theta_2 \wedge \theta_5 - \frac{1}{2}\theta_3 \wedge \theta_4$ по формуле $g_J(X,Y) = \omega(X,JY)$. Получаем:

$$g_J = \begin{pmatrix} -\frac{\xi_{11}^2+1}{\xi_{16}} & \frac{\xi_{13}-\xi_{11}\xi_{12}\xi_{45}}{\xi_{16}\xi_{45}} & -\frac{\xi_{11}\xi_{13}+\xi_{12}\xi_{45}}{\xi_{16}} & 0 & 0 & -\xi_{11} \\ \frac{\xi_{13}-\xi_{11}\xi_{12}\xi_{45}}{\xi_{16}\xi_{45}} & \frac{\xi_{52}}{2} & \frac{\xi_{53}}{2} & -\frac{1}{2\xi_{45}} & 0 & -\xi_{12} \\ -\frac{\xi_{11}\xi_{13}+\xi_{12}\xi_{45}}{\xi_{16}} & \frac{\xi_{53}}{2} & -\frac{2\xi_{12}^2\xi_{45}^2+\xi_{45}^2\xi_{52}\xi_{16}+2\xi_{13}^2}{\xi_{16}} & 0 & -\frac{\xi_{45}}{2} & -\xi_{13} \\ 0 & -\frac{1}{2\xi_{45}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\xi_{45}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_{11} & -\xi_{12} & -\xi_{13} & 0 & 0 & -\xi_{16} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Поскольку J_ω – интегрируемая почти комплексная структура, то тройка (g_J , J_ω, ω) определяет левоинвариантную (псевдо)келерову структуру на группе G_3. Таким образом, мы получили 7-ми параметрическое семейство псевдокелеровых метрик на группе G_3.

Из выражения (11) сразу следует, что векторы E_4 и E_5 центра Z алгебры Ли лежат в изотропном конусе. Третий вектор E_6 центра Z алгебры Ли неизотропен и всегда ортогонален векторам E_4 и E_5. Площадка $\{E_4,\ E_5\}$ является J_ω-голоморфной (т. е. J_ω-инвариантной) и изотропной при любых значениях параметров.

Некоторые классы псевдокелеровых метрик на G_3. Общая псевдокелерова метрика (11) зависит от семи параметров и выглядит довольно сложно. Простой двухпараметрический класс комплексных структур и ассоциированных получается, если мы положим равными нулю те параметры, которые не связаны никакими условиями: ψ_{11}=0, ψ_{12}=0, ψ_{13}=0, ψ_{52}=0, ψ_{53}=0. Тогда получаем следующие выражения комплексной структуры и ассоциированной метрики.

$$J_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{16} \\ 0 & 0 & \xi_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\xi_{45}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\xi_{45}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\xi_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\xi_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\xi_{45}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_{45}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\xi_{45}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\xi_{45}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_{16} \end{pmatrix}$$

Голоморфные площадки: $\{E_1,\ E_6\}$, $\{E_2,\ E_3\}$ и $\{E_4,\ E_5\}$. Отметим, что тензор кривизны зависит только от параметров этого частного класса. Другой 5-параметрический класс псевдокелеровых метрик получается при: $\psi_{16}=1, \psi_{45}=1$.

3. Второе семейство псевдокелеровых метрик. Случай ξ_{16} = 0, $\xi_{25} \neq 0$. Комплексные структуры существуют при условии $\xi_{25}(\xi_{25}\xi_{31}+\xi_{24}\xi_{21}) \neq 0$, их общий вид можно найти в работе [4]. Вычисления в системе Maple показывают, что ассоциированные с симплектической формой $\omega(\lambda)$ комплексные структуры J_ω и существуют только при значении λ = 2. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать симплектическую структуру: $\omega = \theta_1 \wedge \theta_6 + 2\theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_4$. Для этой формы ω оператор J_ω имеет вид:

$$J_\omega = \begin{pmatrix} \xi_{11} & 0 & -\frac{\xi_{11}^2+1}{\xi_{31}} & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & 0 & \xi_{25} & 0 \\ \xi_{31} & 0 & -\xi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{41} & 2J_{53} & \xi_{43} & \xi_{11} & -2\xi_{23} & \frac{\xi_{11}^2+1}{\xi_{31}} \\ -\frac{\xi_{23}\xi_{31}+\xi_{21}(\xi_{11}+\xi_{22})}{\xi_{25}} & -\frac{\xi_{22}^2+1}{\xi_{31}} & J_{53} & 0 & -\xi_{22} & 0 \\ J_{61} & -2\frac{\xi_{23}\xi_{31}+\xi_{21}(\xi_{11}-\xi_{22})}{\xi_{25}} & \xi_{41} & -\xi_{31} & -2\xi_{21} & -\xi_{11} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $J_{53} = \frac{\xi_{21}(\xi_{11}^2+1)+\xi_{23}\xi_{31}(\xi_{11}-\xi_{22})}{\xi_{31}\xi_{25}}$ и $J_{61} = -2\frac{\xi_{31}^2(\xi_{23}^2+\xi_{43}\xi_{25})+\xi_{21}^2(\xi_{11}^2+1)+\xi_{31}\xi_{11}(\xi_{25}\xi_{41}+2\xi_{23}\xi_{21})}{\xi_{25}(\xi_{11}^2+1)}$.

Рассмотрим псевдориманову метрику на группе Ли G_3, определенную почти комплексной структурой J_ω и симплектической формой $\omega = \theta_1 \wedge \theta_6 + 2\theta_2 \wedge \theta_5 + \theta_3 \wedge \theta_4$ по формуле $g_J(X,Y) = \omega(X,JY)$. Прямое вычисление показывает, что:

$$g_J=\begin{pmatrix} J_{61} & -2\dfrac{\xi_{23}\xi_{31}+\xi_{21}(\xi_{11}+\xi_{22})}{\xi_{25}} & \xi_{41} & -\xi_{31} & -2\xi_{21} & -\xi_{11}\\ -2\dfrac{\xi_{23}\xi_{31}+\xi_{21}(\xi_{11}+\xi_{22})}{\xi_{25}} & -2\dfrac{\xi_{22}^2+1}{\xi_{31}} & 2J_{53} & 0 & -2\xi_{22} & 0\\ \xi_{41} & 2J_{53} & \xi_{43} & \xi_{11} & -2\xi_{23} & \dfrac{\xi_{11}^2+1}{\xi_{31}}\\ -\xi_{31} & 0 & \xi_{11} & 0 & 0 & 0\\ -2\xi_{21} & -2\xi_{22} & -2\xi_{23} & 0 & -2\xi_{25} & 0\\ -\xi_{11} & 0 & \dfrac{\xi_{11}^2+1}{\xi_{31}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Поскольку J_ω – интегрируемая почти комплексная структура, то тройка (g_J , J_ω, ω) определяет левоинвариантную (псевдо)келерову структуру на группе G_3. Таким образом, мы получили еще одно 8-ми параметрическое семейство псевдокелеровых метрик на группе G_3. Из выражения (13) сразу следует, что векторы E_4 и E_6 центра Z алгебры Ли лежат в изотропном конусе. Третий вектор E_5 центра Z алгебры Ли неизотропен и всегда ортогонален векторам E_4 и E_6.

Некоторые классы второго семейства псевдокелеровых метрик на G_3. Общая псевдокелерова метрика (13) зависит от восьми параметров и выглядит довольно сложно. Простой двухпараметрический класс комплексных структур и ассоциированных получается, если мы положим равными нулю те параметры, которые не связаны никакими условиями: ψ_{11}=0, ψ_{21}=0, ψ_{22}=0, ψ_{23}=0, ψ_{41}=0, ψ_{43}=0. Тогда получаем следующие выражения комплексной структуры и ассоциированной метрики:

$$J_\omega=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{\xi_{31}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{25} & 0\\ \xi_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\xi_{31}}\\ 0 & -\dfrac{1}{\xi_{25}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\xi_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}\ldots$$

$$g_J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\xi_{31} & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{2}{\xi_{25}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\xi_{31}}\\ -\xi_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_{25} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\xi_{31}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Голоморфные площадки: $\{E_1,\ E_3\}$, $\{E_2,\ E_5\}$ и $\{E_4,\ E_6\}$. Отметим, что тензор кривизны зависит только от параметров этого частного класса. Другой 6-параметрический класс псевдокелеровых метрик получается при ψ_{31}=1, ψ_{25}=1.

4. Третье семейство псевдокелеровых метрик. Случай ξ_{16} = 0, ξ_{25} = 0. Вычисления в системе Maple показывают, что ассоциированные с симплектической формой $\omega(\lambda)$ комплексные структуры J_ω и существуют только при значении λ = –1. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать симплектическую структуру:

$\omega=\theta_1\wedge\theta_6-\theta_2\wedge\theta_5-2\theta_3\wedge\theta_4$.

Для этой формы ω оператор J_ω ассоциированной интегрируемой почти комплексной структуры находим из трех условий: $\omega(JX,Y)+\omega(X,JY)=0$, $N=0$ и $J^2=-1$. В результате вычислений получаем:

$$J=\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{1+\xi_{11}^2}{\xi_{12}} & -\xi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{2}J_6^4 & \xi_{32} & \xi_{33} & -\dfrac{1+\xi_{33}^2}{\xi_{43}} & 0 & 0\\ \dfrac{\xi_{33}\xi_{42}-\xi_{43}\xi_{32}+\xi_{42}\xi_{11}}{\xi_{12}} & \xi_{42} & \xi_{43} & -\xi_{33} & 0 & 0\\ \xi_{51} & \xi_{52} & 2\xi_{42} & -2\xi_{32} & \xi_{11} & \xi_{12}\\ J_6^1 & -\xi_{51} & -\dfrac{2(\xi_{33}\xi_{42}-\xi_{43}\xi_{32}+\xi_{42}\xi_{11})}{\xi_{12}} & J_6^4 & -\dfrac{1+\xi_{11}^{22}}{\xi_{12}} & -\xi_{11} \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

где при $\xi_{12}\neq 0,\ \xi_{43}\neq 0,\ J_6^1=\dfrac{-2\xi_{51}\xi_{11}\xi_{43}\xi_{12}+\xi_{52}\xi_{43}+\xi_{52}\xi_{43}\xi_{11}^2-2\xi_{42}^2-2\xi_{42}^2\xi_{33}^2+4\xi_{42}\xi_{33}\xi_{32}\xi_{43}-2\xi_{43}^2\xi_{32}^2}{\xi_{12}^2\xi_{43}}$ и

$$J_6^4=\frac{2(\xi_{42}+\xi_{42}\xi_{33}^2-\xi_{33}\xi_{32}\xi_{43}+\xi_{11}\xi_{32}\xi_{43})}{\xi_{43}\xi_{12}}.$$

Рассмотрим псевдориманову метрику на группе Ли G_3, определенную почти комплексной структурой J_ω и симплектической формой $\omega=\theta_1\wedge\theta_6-\theta_2\wedge\theta_5-2\theta_3\wedge\theta_4$ по формуле $g_J(X,Y)=\omega(X,JY)$. Получаем:

$$g_j = \begin{pmatrix} J_6^1 & -\xi_{51} & -2\dfrac{\xi_{33}\xi_{42}-\xi_{43}\xi_{32}+\xi_{42}\xi_{11}}{\xi_{12}} & J_6^4 & -\dfrac{1+\xi_{11}^2}{\xi_{12}} & -\xi_{11} \\ -\xi_{51} & -\xi_{52} & -2\xi_{42} & 2\xi_{32} & -\xi_{11} & -\xi_{12} \\ -2\dfrac{\xi_{33}\xi_{42}-\xi_{43}\xi_{32}+\xi_{42}\xi_{11}}{\xi_{12}} & -2\xi_{42} & -2\xi_{43} & 2\xi_{33} & 0 & 0 \\ J_6^4 & 2\xi_{32} & \xi_{33} & -2\dfrac{1+\xi_{33}^2}{\xi_{43}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1+\xi_{11}^2}{\xi_{12}} & -\xi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_{11} & -\xi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Поскольку J_ω – интегрируемая почти комплексная структура, то тройка (g_J , J_ω, ω) определяет левоинвариантную (псевдо)келерову структуру на группе G_3. Таким образом, мы получили третье 8-ми параметрическое семейство псевдокелеровых метрик на группе G_3.

Из выражения (15) сразу следует, что векторы E_5 и E_6 центра Z алгебры Ли лежат в изотропном конусе. Третий вектор E_4 центра Z алгебры Ли неизотропен и всегда ортогонален векторам E_5 и E_6. Площадка $\{E_5, E_6\}$ является J_ω-голоморфной и изотропной при любых значениях параметров.

Некоторые классы третьего семейства псевдокелеровых метрик на G_3. Общая псевдокелерова метрика (15) зависит от семи параметров и выглядит довольно сложно. Простой двухпараметрический класс комплексных структур и ассоциированных получается, если мы положим равными нулю те параметры, которые не связаны никакими условиями: ψ_{11}=0, ψ_{32}=0, ψ_{33}=0, ψ_{42}=0, ψ_{51}=0, ψ_{52}=0. Тогда получаем следующие выражения комплексной структуры и ассоциированной метрики:

$$J_\omega = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\xi_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\xi_{43}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\xi_{12}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\xi_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_{12} \\ 0 & 0 & -2\xi_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{2}{\xi_{43}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\xi_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Голоморфные площадки: $\{E_1, E_2\}$, $\{E_3, E_4\}$ и $\{E_5, E_6\}$. Другой 6-параметрический класс псевдокелеровых метрик получается при ψ_{12}=1, ψ_{43}=1.

5. Кривизна псевдокелеровых метрик на G_3. Найдем тензоры кривизны и Риччи данной псевдоримановой метрики. Вычислениями в системе Maple по формулам (6) – (8) и (11), (13), (15) получаем следующие.

Свойства псевдокелеровых структур на группе Ли G_3. *Для всех трех случаев комплексная структура J_ω вместе с квадратичной формой g_ω образуют псевдокелерову структуру сигнатуры* (–,–,+,+,+,+) *на группе Ли* G_3. *Псевдориманова норма тензора кривизны равна нулю при любых значениях параметров,* $NR(g_J)$ = 0. *Тензор кривизны* R_{ijks} *имеет, с точностью до симметрий, одну ненулевую компоненту: в первом случае – это* R_{3232} =$-\xi_{16}$, *во втором случае* R_{1313} = $-2\xi_{25}$, *в третьем случае* $R_{1212} = -2\dfrac{1+\xi_{33}^2}{\xi_{43}}$. *Тензор Риччи является нулевым при любых значениях параметров* $Ric(g_J)$ = 0.

Хорошо известно, что левоинвариантная почти комплексная структура J является биинвариантной, если $J \cdot ad_X = ad_X \cdot J$, для любого вектора X из алгебры Ли. Прямая проверка показывает, что ассоциированные комплексные структуры (10), (12) и (14) не являются биинвариантными.

Известно [5], что если левоинвариантная риманова метрика на унимодулярной разрешимой группе Ли G эйнштейнова, то эта метрика плоская. Построенные метрики показывают, что данное утверждение не верно для левоинвариантных псевдоримановых метрик на шестимерных нильпотентных группах Ли.

Литература

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2 / Ш. Кобаяси, К. Намидзу. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
2. Khakimdjanov, Y. Symplectic or contact structures on Lie Groups / Y. Khakimdjanov, M. Goze, A. Medina // Preprint: эл. ресурс // http://arxiv.org /abs/math. DG/0205290.
3. Magnin, L. Technical report Complex Structures on Indecomposable 6-dimensional Nilpotent Real Lie Algebras / L. Magnin // Preprint: эл. ресурс // http://www.u-bourgogne.fr/monge/l.magnin.
4. Magnin, L. Complex Structures on Indecomposable 6-dimensional Nilpotent Real Lie Algebras / L. Magnin // Preprint, http://www.u-bourgogne.fr/ monge/l.magnin.
5. Miatello Dotti, I. Ricci curvature of left-invariant metrics on solvable unimodular Lie groups / I. Miatello Dotti // Math. Zeit. – 1982. – V. 180. – P. 257 – 263.
6. Морозов, В. В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка [Текст] / В. В. Морозов // Изв. вузов. Сер. «Математика». – 1958. – № 4. – С. 161 – 174.