

УДК 519.6

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В ЗАКРЫТЫХ БУХТАХ

Ю. Н. Захаров, Е. В. Полторацкая

При построении портов, использование естественных закрытых гаваней для размещения судов и искусственных сооружений (например плавучих нефтяных платформ) крайне важно знать характер волнения в этих акваториях. Существует проблема определения волнового режима внутри бухты в зависимости от наличия и расположения препятствий, так как колебания уровня воды определяются не только высотными отметками порта и глубиной на подходах и у причалов, но и формой берега и сооружений.

Соответствующий нормативный документ [1] не дает ответа на вопросы о дифракции волн в закрытых бухтах различной формы. Известные гидромеханические аналитические решения [2, 3] не учитывают особенностей компоновки реальных акваторий. Поэтому возникла необходимость построить математическую модель, описывающую данную проблему и решить ее численно.

Целью данной работы является анализ дифракции волн в закрытых бухтах для различных конфигураций акватории, форм дна, наличия в ней искусственных и естественных сооружений.

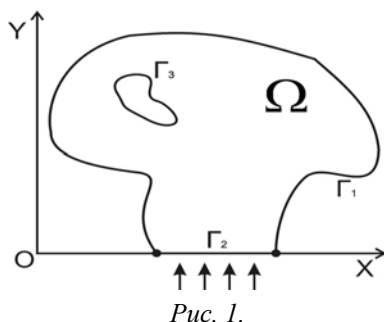


Рис. 1.

1. При решении задачи дифракции волн в акваториях в линейном приближении в случае пологих волн ($H/\lambda \leq 0.05$, H и λ – высота и длина исходного волнения) в стационарном случае установившегося волнения будем решать уравнение Гельмгольца [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2(x, y)u = f(x, y), (x, y) \in \Omega,$$

$$k^2(x, y) = k_n^2 [1 + \delta(x, y)], y \geq 0, \quad (1)$$

где $u(x, y)$ – высота волны, k , $k_n = 2\pi/\lambda$ – соответственно значения волнового числа на рассматриваемой глубине d и на начальной (исходной) глубине d_n ; $\delta(x, y)$ – малая величина, определяемая как изменение квадрата волнового числа k_n при изменении глубины от d_n до d . Ω – внутренняя область бухты, где Γ_2 – вход в бухту (см. рис. 1), $f(x, y)$ – известная правая часть.

Граничное условие на входе в бухту, т. е. на участке, свободном от оградительных сооружений, задается высота волны:

$$u|_{\Gamma_2} = u^*(x, y)|_{y=0}. \quad (2a)$$

На твердых стенках береговой линии и сооружениях внутри области Ω граничное условие определяется из условия отражаемости и задается равенством:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Gamma} = q \cdot u^*(x, y), \quad (2b)$$

где $\bar{n}$ – внешняя нормаль к границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$, $\Gamma_i, i = \overline{3, m}$ – сооружения внутри акватории, q – коэффициент, характеризующий изменение исходного волнения. Для непроницаемых сооружений $q = 0$, для полностью проницаемых $|q| = 1$.

Считаем что задача (1), (2) имеет единственное решение в области Ω с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$, и это решение непрерывно в области со своими производными до четвертого порядка включительно.

2. Введем в области Ω неравномерную сетку, согласованную с границей Γ , с шагами $h_{x_i} = x_{i+1} - x_i$, $h_{y_j} = y_{j+1} - y_j$, $i, j \in J$, J – множество индексов. Для построения расчетной сетки используется программа визуального конструирования сеток Atea.

На этой сетке аппроксимируем уравнение (1) разностной схемой:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{x_i}} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_{x_{i-1}}} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_{y_j}} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_{y_{j-1}}} - k_{i,j}^2 u_{i,j} =, \quad (3)$$

$$= -f_{i,j}, i, j \in J$$

$$\text{где } f_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad \overline{h_{x_i}} = \frac{h_{x_i} + h_{x_{i-1}}}{2},$$

$$\overline{h_{y_j}} = \frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}. \quad (1)$$

Для схемы (3) краевое условие (2a) задается точно, а условие (2b) задается путем его аппроксимации в направлении нормали $\bar{n}$ с 1-м порядком.

В итоге схема (3) с краевыми условиями, записанная относительно вектора $u = \{u_{i,j}, i, j \in J\}$, является системой линейных алгебраических уравнений размерности m :

$$Au = f^h, \quad (4)$$

где $A = -\Delta_h - k^2 E$ (Δ_h – матрица аппроксимации оператора Лапласа и краевых условий), E – единичная матрица, f^h – известная правая часть.

Матрица A , вообще говоря, не самосопряжена и для некоторых k (длин исходного волнения λ) является незнакоопределенной. В этом случае при построении быстроходящихся схем можно было бы использовать 1-ую трансформацию Гаусса [5], но очевидно, что существуют такие волновые числа k^2 , при которых матрица A может быть особенной или близкой к особенной. В этом случае умножение системы (4) на A^* при ее численном решении приводит к существенному изменению свойств исходной систем, так как в случае особенной матрицы решение не единственно и итерационный процесс может сойтись к любому из решений с точностью до вектора из ядра матрицы A .

Поэтому для решения (4) мы используем двухшаговую явную итерационную схему:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \tau_{n+1}(Au^n - f^h), \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} - \alpha_1^n z_1^n - \dots - \alpha_m^n z_m^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где u^0 – произвольное начальное приближение – итерационный параметр τ_{n+1} выбирается из условия

$$\min_{\tau_{n+1}} \|r^{n+1/2}\|^2 = \min_{\tau_{n+1}} \|Au^{n+1/2} - f^h\|^2,$$

$z_k^n = (0, \dots, z_k, \dots, 0)^T$ – вектор с одной ненулевой k -ой компонентой, α_i^n , $i = 1, \dots, m$ выбираются последовательно из условия

$$\min_{\alpha_i^n} \|Ay_{(i)} - f^h\| = \min_{\alpha_i^n} \|r^{n+1/2} - \alpha_1^n z_1 - \dots - \alpha_i^n z_i\|,$$

$i = 1, \dots, m$.

Как показано в [6], если матрица A является неособенной, то схема (5) является сходящейся. Во всех расчетах итерации останавливаются при выполнении условия:

$$\|r^n\|/\|r^0\| = \|Au^n - f^h\|/\|Au^0 - f^h\| \leq \varepsilon.$$

3. В этом пункте приведены результаты некоторых методических расчетов.

Области решения приведены на рис. 2, рис. 3.

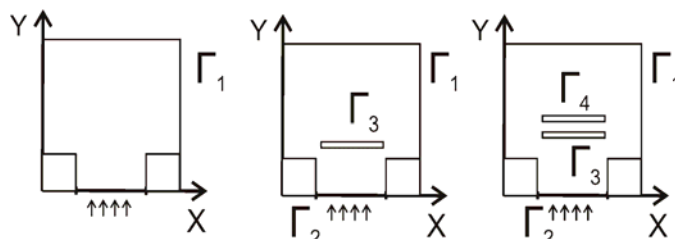


Рис. 2. Расчетные области в виде прямоугольника с каналом на входе

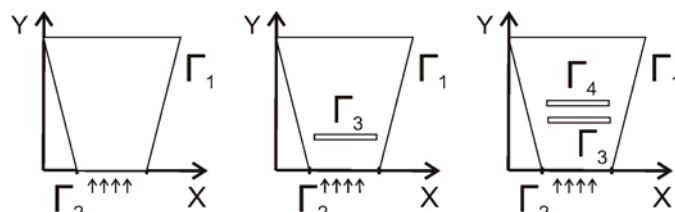


Рис. 3. Расчетные области в виде расширяющейся от входа трапеции

Сначала рассмотрим случай равномерного дна с постоянной глубиной $d = \text{const} = 0.2$,

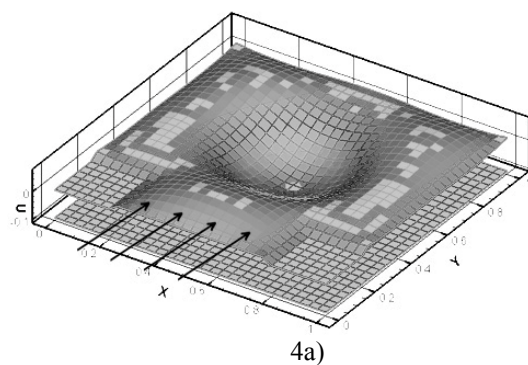
$k^2 = \text{const} = 100$. Сетка равномерная. Граничное условие на входе в бухту $u|_{\Gamma_2} = \text{const} = 0.02$. Волна заходит в бухту в направлении, указанном стрелочками. Береговая линия Γ_1 состоит из полностью не отражающих стенок, то есть согласно (2b) $q = 0$. Защитные сооружения с границей Γ_3 и Γ_4 , длиной такой же, как вход (будем называть их «молами»). Краевое условие на Γ_3 задается равенством:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_3} = 0.005, \text{ а на } \Gamma_4 - \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_4} = 0.01.$$

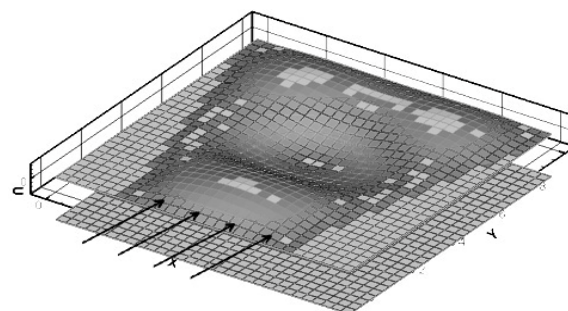
Волна в середине бухты образует что-то вроде котлована и дальше идет вверх. Как видно на рис. 4б волна почти не изменила свое направление, только изменились минимальные и максимальные значения (увеличились по отношению к области без

«мола»). На рис. 4в первое препятствие располагается прямо за входом, второе – непосредственно за ним через небольшое расстояние. Здесь волна ведет себя аналогично варианту с одним «молом».

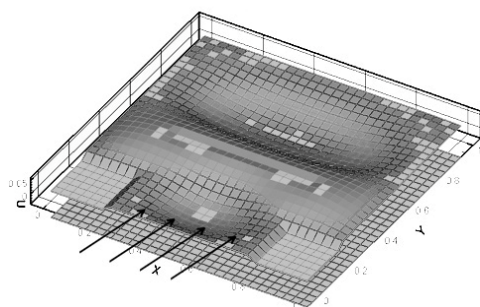
На рис. 5б, так как «мол» был поставлен прямо за входом и между его концами и береговой линией оставалось мало места, получился всплеск (по отношению к рис. 5а максимальное значение высотной отметки волны выросло примерно в 7 раз, минимальное по модулю только в 2). В случае двух препятствий минимальное и максимальное значения высоты волны увеличились.



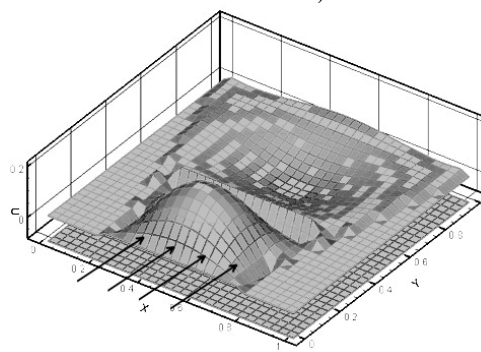
4а)



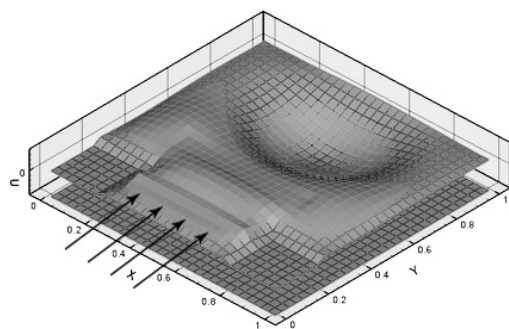
5а)



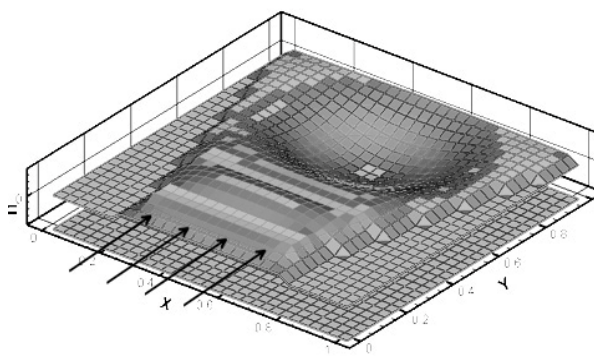
4б)



5б)



4в)



5в)

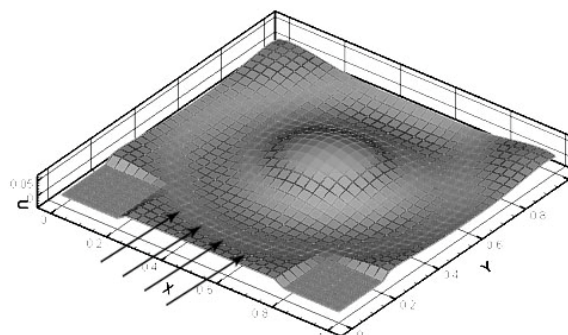
Рис. 4. Прямоугольная область с каналом на входе: а) область без «мола», б) за входом стоит один «мол» с границей Γ_3 , в) за входом два мола с границей Γ_3 и Γ_4

Рис. 5. Область в виде расширяющейся от входа трапеции: а) область без «мола», б) за входом стоит один «мол» с границей Γ_3 , в) за входом два мола с границей Γ_3 и Γ_4

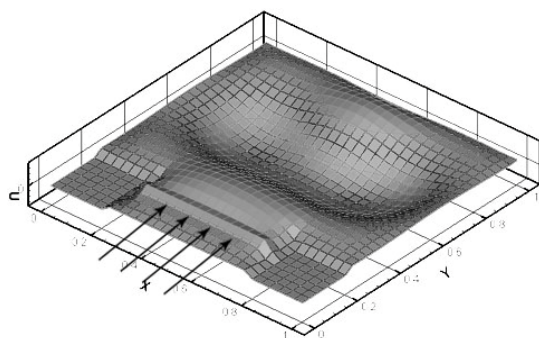
Интересно рассмотреть случай с дном переменной глубины, изменяющимся по формуле $d = -0.3 + y$. Краевые условия на Γ_3 и на Γ_4 остаются такими же, как в случае с дном без уклона, высота волны $u|_{\Gamma_2} = \text{const} = 0.02$, волновое число изменяется по формуле:

$$k^2 = k_n \left(1 + \frac{2\chi(x, y)}{1 + \text{sh}(2k_n d_n) / 2k_n d_n} \right),$$

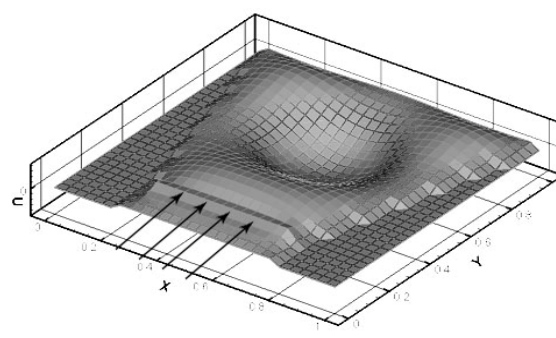
где: $\chi(x, y) = \left(1 - \frac{d(y)}{d_n} \right)$ определяется характером изменения рельефа дна [4].



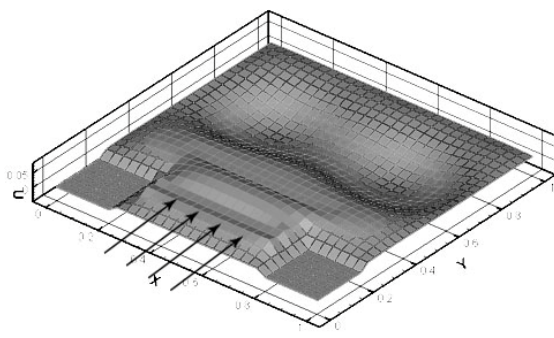
6а)



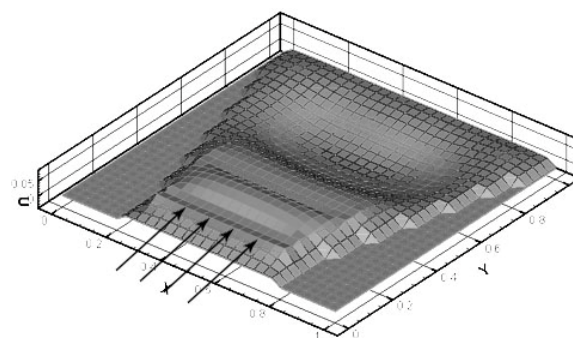
6а)



7а)



6б)



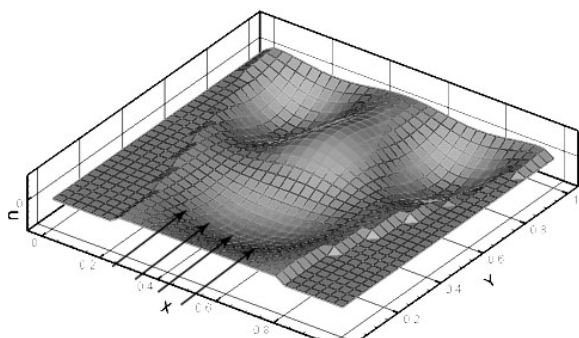
7б)

Рис. 6. Прямоугольная область с каналом на входе с дном, имеющий уклон: а) область без «мола», б) за входом стоит один «мол» с границей Γ_3 , в) за входом два мола с границей Γ_3 и Γ_4

Рис. 7. Область в виде расширяющейся от входа трапеции с дном, имеющий уклон: а) область без «мола», б) за входом стоит один «мол» с границей Γ_3 , в) за входом два мола с границей Γ_3 и Γ_4

Сразу можно заметить, что в областях характер течения меняется. Если с ровным дном в центре волна уходила вниз, теперь она, наоборот, поднимается. Как и в случае с дном без уклона, «молы» поставлены за входом. В результате такой постановки препятствий максимальный и минимальный по модулю уровень воды увеличились по отношению к области без сооружений. На рис.6в уровень воды незначительно изменился по сравнению с областью без «молов».

В случае трапеции с одним защитным сооружением (см. рис. 7б) относительно рис. 7а уровень воды почти не изменился. А вот в бухте с двумя «молами» при такой расстановке сооружений максимальное значение высоты волны осталось прежним, а минимальное уменьшилось в 3 раза.



7а)

Из проведенных численных расчетов можно сделать выводы: в случае дна без уклона для прямоугольной области и области в виде расширяющейся от входа трапеции с рассмотренными сооружениями волнение только увеличивается.

В случае дна переменной глубины для прямоугольной области со входом в виде канала с 1 или 2 «молами» и в акватории в виде трапеции с 1 сооружением волнение почти не изменяется. А в бухте в виде трапеции с 2 сооружением высота волны уменьшается.

Литература

1. Строительные нормы и правила. Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновое, ледовое и от судов) / СНиП 2.0608-82. – М.: Госстрой, 1986.
2. Крылов, Ю. М. Дифракция волн жидкости / Ю. М. Крылов // Труды ГОИН. – 1949. – Вып. 19.
3. Алешков, Ю. В. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости / Ю. В. Алешков. – Л.: Издательство ЛГУ, 1981.
4. Загряцкая, Н. Н. Определение волнового режима на огражденных акваториях и подходах к ним методом параболического уравнения / Н. Н. Загряцкая. – Красноярск, 1989.
5. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
6. Захаров, Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики / Ю. Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.