УДК 65.012.12

НЕЛИНЕЙНЫЙ СГЛАЖИВАЮЩИЙ ФИЛЬТР ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО

В. А. Толстунов

На основе обобщенного цифрового фильтра и операции геометрического усреднения строится нелинейный фильтр с хорошими сглаживающими свойствами, найдены его вероятностные характеристики.

Рассмотрим фильтр со скользящим «окном», длиной апертуры *n+1*. Пусть на вход фильтра поступают сигналы $x_i=s_i + n_i$,$i=1,2,\dots$,где $s_i=s(t_i)$ – отсчеты полезного детерминированного сигнала, $n_i=n(t_i)$ – отсчеты мешающего шума.

Выход фильтра y_k, соответствующий точке x_k, будем определять по значениям входного сигнала из апертуры $\{x_{k-n/2},\dots,x_k,\dots,x_{k+n/2}\}$. При этом полагаем, что в пределах апертуры фильтра значения полезного сигнала практически постоянны. Это предположение оправдано, по крайней мере, при высокой частоте дискретизации входного сигнала и малых значениях апертуры. Тогда: $x_i= s_k + n_i$ для $i\in\left(k-n/2,\dots,k+n/2\right)$.

Для выходного сигнала y_k используем предложенное ранее соотношение для обобщенного цифрового фильтра [1]:

$$y_k = f^{-1}\left\{F\left(f(x_{k-n/2}),\dots,f(x_k),\dots,f(x_{k+n/2})\right)\right\}, \qquad (1)$$

где $f(x)$ является некоторой монотонной непрерывной функцией, а преобразование F определяет характер сглаживания.

Выберем в качестве преобразования F операцию геометрического усреднения:

$$F\left(f(x_{k-n/2}),\dots,f(x_k),\dots,f(x_{k+n/2})\right)= \sqrt[n+1]{\prod_{i=k-n/2}^{k+n/2} f(x_i)} \qquad (2)$$

и будем полагать, что $f(x)=\ln(x+c)$, $c=const>0$.

Тогда из (1):

$$y_k = \exp\left\{\sqrt[n+1]{\prod_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln(x_i+c)}\right\}-c\,. \qquad (3)$$

Алгоритм (3) определяет фильтр геометрического среднего с логарифмическим преобразованием.

Отметим, что (3) можно получить также с помощью операции выборочного усреднения

$$F\left(f(x_{k-n/2}),\dots,f(x_k),\dots,f(x_{k+n/2})\right)= \frac{1}{n+1}\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} f(x_i),$$

если выбрать: $f(x)=\ln\left(\ln(x+c)\right)$, $c=const>0$.

Действительно, в этом случае:

$$f^{-1}(y)=\exp(\exp(y))-c\,,$$

$$F\left(f(x_{k-n/2}),\dots,f(x_k),\dots,f(x_{k+n/2})\right)= \frac{1}{n+1}\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln\left((\ln(x_i+c)\right)= \frac{1}{n+1}\ln\left(\prod_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln(x_i+c)\right)= \ln\left\{\sqrt[n+1]{\prod_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln(x_i+c)}\right\}.$$

Тогда из (1) переходим к (3).

Рассмотрим свойства фильтра (3) для модели входного сигнала $x_i = s_i+\xi_i+\eta_i$, $i=1,2,\dots$

Здесь ξ_i – гассовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, η_i – импульсный шум, для которого $p(\eta_i=0)=p$, $p(\eta_i=A)=q=1-p$, $A\ge 0$. Полагаем, что составляющие ξ_i, η_i мешающего шума n_i независимы.

Для выбранной модели плотность вероятностей входного сигнала будет иметь вид:

$$p_{x_i}(x)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[p\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-s_i)^2\right\}+q\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-s_i-A)^2\right\}\right],$$

$$x\in(-\infty,\infty)\,. \qquad (4)$$

Найдем закон распределения и числовые характеристики выходного сигнала (3).

Положим:

$$\zeta_k=\ln\prod_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln(x_i+c)=\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln\left(\ln(x_i+c)\right).$$

При $n >> 1$, согласно центральной предельной теоремы теории вероятностей [2], случайная величина ζ_k распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M(\zeta_k)=m_k$ и дисперсией $D(\zeta_k)=\sigma_k^2$.

$$p_{\zeta_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(x-m_k)^2\right\},$$

$$x\in(-\infty,\infty)\,. \qquad (5)$$

Имея (5) и $\zeta_k=\ln z_k$, где $z_k=\prod_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln(x_i+c)$, можно найти [2] плотность вероятностей случайной величины z_k. Это будет плотность логарифмически-нормального закона распределения:

$$p_{z_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k x}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(\ln x-m_k)^2\right\},$$

$$x\in(0,\infty)\,.$$

(6)

Аналогично, используя (5), находим плотность вероятностей величины: $v_k = \sqrt[n+1]{z_k}$

$$p_{v_k}(x) = \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k x}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(\ln x^{n+1} - m_k)^2\right\},$$
$$x \in (0,\infty). \qquad (7)$$

Из (7) и $y_k = \exp\{v_k\} - c$ находим плотность вероятностей выхода фильтра:

$$p_{y_k}(x) = \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\frac{1}{(x+c)\ln(x+c)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left[(n+1)\ln\left(\ln(x+c)\right) - m_k\right]^2\right\},\ x>1-c. \qquad (8)$$

Проверим условие нормировки для (8). Имеем:

$$\int_{1-c}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\frac{1}{(x+c)\ln(x+c)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left[(n+1)\ln\left(\ln(x+c)\right) - m_k\right]^2\right\}dx =$$

$$= \left[\ln(x+c) = y, dx = e^y dy, y \in (0,\infty)\right] = \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\int_0^{\infty}\frac{1}{ye^y}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left[(n+1)\ln y - m_k\right]^2\right\}e^y dy =$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left[(n+1)\ln y - m_k\right]^2\right\}d\ln y = \left[\ln y = t, t \in (-\infty,\infty)\right] =$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left[(n+1)t - m_k\right]^2\right\}dt = \left[\frac{(n+1)t - m_k}{\sigma_k} = x, dt = \frac{\sigma_k}{n+1}dx, x \in (-\infty,\infty)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dt = 1.$$

Таким образом, сигнал на выходе фильтра (3) имеет плотность вероятностей (8).

Найдем параметры m_k, σ_k этого закона распределения. Имеем:

$$m_k = M(\zeta_k) = M\left\{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln\left(\ln(x_i + c)\right)\right\} =$$
$$= \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2}M\left\{\ln\left(\ln(x_i + c)\right)\right\}.$$

Так как по условию, отсчеты входного сигнала x_i имеют плотность вероятностей (4), то

$$M\left\{\ln\left(\ln(x_i + c)\right)\right\} =$$
$$= \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\ln(x+c)\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - s_i)^2\right\}dx +$$
$$+ \frac{q}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\ln(x+c)\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - s_i - A)^2\right\}dx. \qquad (9)$$

Вычислим первый интеграл в (9):

$$\frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\ln(x+c)\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - s_i)^2\right\}dx =$$
$$= \left[\frac{x - s_i}{\sigma} = t, dx = \sigma dt, t \in (-\infty,\infty)\right] =$$
$$= \frac{p}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\ln(\sigma t + s_i + c)\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (10)$$

Легко убедиться, что подынтегральная функция в (10) на границах области интегрирования обращается в нуль. Действительно,

$$\lim_{t\to\infty}\ln\left(\ln(\sigma t + s_i + c)\right)e^{-\frac{t^2}{2}} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{d}{dt}\left(\ln\left(\ln(\sigma t + s_i + c)\right)\right)}{\frac{d}{dt}e^{\frac{t^2}{2}}} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\sigma}{(\sigma t + s_i + c)\ln(\sigma t + s_i + c)e^{\frac{t^2}{2}}t} = 0.$$

Тогда, полагая, что в (10) t принадлежит конечному интервалу, найдем для подынтегральной функции более простое приближенное представление.

Имеем: $f(t) = \ln\left(\ln(\sigma t + s_i + c)\right)$,

$$\ln(\sigma t + s_i + c) = \ln\left[(s_i + c)(1 + \frac{\sigma}{s_i + c}t)\right] =$$
$$= \ln(s_i + c) + \ln(1 + \frac{\sigma}{s_i + c}t).$$

Выберем произвольную пока константу c так, чтобы c >>1, $\frac{\sigma}{s_i + c} << 1$.

Тогда: $\ln(1+\frac{\sigma}{s_i+c}t) \approx \frac{\sigma}{s_i+c}t$ и

$$f(t) = \ln\left(\ln(s_i+c)+\frac{\sigma}{s_i+c}t\right) =$$

$$= \ln\left[\ln(s_i+c)\left(1+\frac{\sigma}{(s_i+c)\ln(s_i+c)}t\right)\right] =$$

$$= \ln\left(\ln(s_i+c)\right)+\ln\left(1+\frac{\sigma}{(s_i+c)\ln(s_i+c)}t\right).$$

Условие c >>1 позволяет считать, что $s_i+c > e$. Тогда $\ln(s_i+c)>1$ и $\frac{\sigma}{(s_i+c)\ln(s_i+c)}t << 1$.

Следовательно,

$$\ln\left(1+\frac{\sigma}{(s_i+c)\ln(s_i+c)}t\right) \approx \frac{\sigma}{(s_i+c)\ln(s_i+c)}t.$$

Тогда: $f(t) = \ln\left(\ln(s_i+c)\right)+\frac{\sigma}{(s_i+c)\ln(s_i+c)}t$. (11)

Подставляя теперь (11) в (10), легко вычисляем интеграл:

$$\frac{p}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\ln(\sigma t+s_i+c)\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \\ = p\ln\left(\ln(s_i+c)\right). \qquad (12)$$

Аналогичные выкладки позволяют найти второй интеграл в (9):

$$\frac{q}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\ln(x+c)\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-s_i-A)^2\right\}dx = \\ = q\ln\left(\ln(s_i+A+c)\right). \qquad (13)$$

Используя теперь (9), (12), (13), находим:

$$M\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\} = p\ln\left(\ln(s_i+c)\right)+ \\ +q\ln\left(\ln(s_i+A+c)\right). \qquad (14)$$

Полагая, как было отмечено ранее, что в пределах апертуры фильтра значения полезного сигнала практически постоянны, то есть: $s_i = s_k$, $\forall i \in [k-n/2, k+n/2]$, окончательно будем иметь:

$$m_k = \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} M\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\} = \\ = (n+1)\left[p\ln\left(\ln(s_k+c)\right)+q\ln\left(\ln(s_k+A+c)\right)\right]. \qquad (15)$$

Найдем параметр $\sigma_k^2 = D(\zeta_k)$. Так как отсчеты мешающего шума независимы, то:

$$D(\zeta_k) = D\left\{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2}\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\} = \\ = \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} D\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\},$$

$$D\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\} = M\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\}^2 - \\ -M^2\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\}.$$

Проводя вычисления, аналогичные тем, что были сделаны при нахождении $M\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\}$, можно при $c >> 1$ получить:

$$M\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\}^2 = \\ = p\left[\ln\left(\ln(s_i+c)\right)\right]^2+q\left[\ln\left(\ln(s_i+A+c)\right)\right]^2. \qquad (16)$$

Используя тогда (14), (16), находим:

$$D\left\{\ln\left(\ln(x_i+c)\right)\right\} = \\ = pq\left[\ln\left(\ln(s_i+c)\right)-\ln\left(\ln(s_i+A+c)\right)\right]^2,$$

$$\sigma_k^2 = (n+1)pq\left[\ln\left(\ln(s_i+c)\right)-\ln\left(\ln(s_i+A+c)\right)\right]^2. \qquad (17)$$

Таким образом, сигнал на выходе фильтра (3) имеет плотность распределения (8), где параметры m_k, σ_k^2 определяются соотношениями (15), (17).

Найдем математическое ожидание сигнала на выходе фильтра. Имеем:

$$M(y_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{y_k}(x)dx = \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\int_{1-c}^{\infty}\frac{x}{(x+c)\ln(x+c)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left[(n+1)\ln\left(\ln(x+c)\right)-m_k\right]^2\right\}dx.$$

Сделаем замену переменной интегрирования:

$$\frac{(n+1)\ln\left(\ln(x+c)\right)-m_k}{\sigma_k} = t$$

и учтем, что тогда:

$$\ln(x+c) = \exp\left\{\frac{\sigma_k t+m_k}{n+1}\right\},$$

$$x+c = \exp\left\{\exp\left(\frac{\sigma_k t+m_k}{n+1}\right)\right\},$$

$$dx = \exp\left\{\exp\left(\frac{\sigma_k t+m_k}{n+1}\right)\right\}\exp\left\{\frac{\sigma_k t+m_k}{n+1}\right\}\frac{\sigma_k}{n+1}dt.$$

В результате получим:

$$M(y_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\exp\left(\frac{\sigma_k t+m_k}{n+1}\right)\right\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-c\,. \quad (18)$$

В общем случае интеграл (18) в элементарных функциях не выражается. В частном случае при отсутствии импульсного шума, когда $A\equiv 0$, из (15), (17) находим:

$\sigma_k=0$, $m_k=(n+1)\ln\left(\ln(s_k+c)\right)$.

Тогда:

$$M(y_k)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\exp\left(\ln\left(\ln(s_k+c)\right)\right)\right\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-c=s_k \quad (19)$$

При A>*0* $M\left(y_k\right)>s_k$.

Найдем дисперсию выходного сигнала (3): $D(y_k)=M(y_k^2)-M^2(y_k)$.

Очевидно:

$$M(y_k^2)=\int_{1-c}^{\infty}x^2 p_{y_k}(x)dx=\frac{n+1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\int_{1-c}^{\infty}\frac{x^2}{(x+c)\ln(x+c)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left[(n+1)\ln\left(\ln(x+c)\right)-m_k\right]^2\right\}dx\,.$$

Используя ту же замену переменной интегрирования, что и при вычислении $M(y_k)$, учитывая (18), для дисперсии $D(y_k)$ можно получить:

$$D(y_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{2\exp\left(\frac{\sigma_k t+m_k}{n+1}\right)\right\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\exp\left(\frac{\sigma_k t+m_k}{n+1}\right)\right\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2. \quad (20)$$

В случае, когда $A\equiv 0$, то есть когда $\sigma_k=0$, $m_k=(n+1)\ln\left(\ln(s_k+c)\right)$, из (20) находим: $D(y_k)=0$.

Фильтр (3) был промоделирован численно для случая, когда c = 10000, среднее квадратическое отклонение гауссовского шума σ = 40, а импульсный шум принимает три значения: *-A,0, A* с вероятностями соответственно $p_1,p_2,1-\ p_1\ p_2$. Причем было выбрано $p_1=\ p_2$=0,1, A =150. На рис. 1 показан входной сигнал при заданных параметрах шумов, полезный сигнал в виде прямоугольного импульса с величиной скачка 80 и выход фильтра (3). Для сравнения на рис. 2 при тех же входных сигналах показан выход классического медианного фильтра [3].

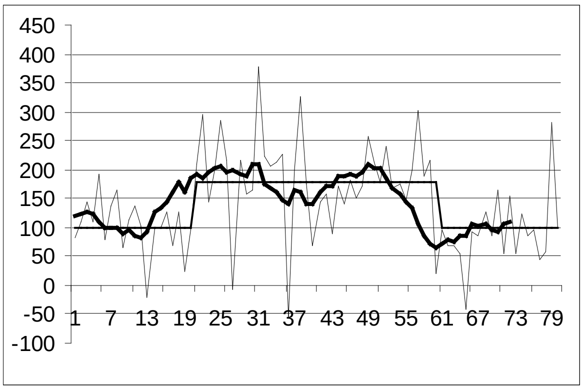

Рис. 1.

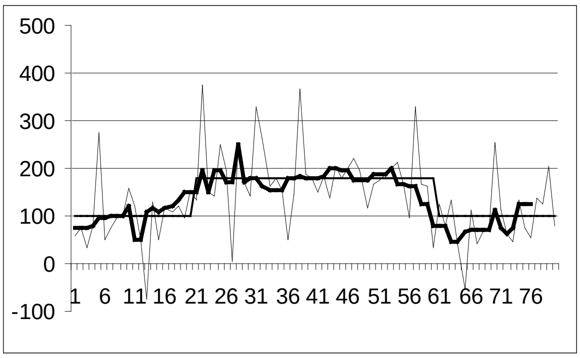

Рис. 2.

Литература

1. Толстунов, В. А. Нелинейная фильтрация с помощью обобщенного сглаживающего фильтра / В. А. Толстунов // Вестник КемГУ: журнал теоретических и прикладных исследований. Серия «Математика». – Кемерово: ЮНИТИ, 2000. – № 4. – С. 165 – 171.

2. Боровков, А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

3. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / под ред. Т. С. Хуанга. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.