УДК 539.3

ОСЕВОЕ СЖАТИЕ ОРЕБРЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Т. В. Бурнышева

В статье рассматривается задача расчетно-теоретического анализа напряжений в оребренных оболочечных конструкциях с учетом обшивки. Предложена двухуровневая математическая модель, основанная на аналитическом решении идеализированной задачи и получении поправок путем полного дискретного моделирования оребрения конструкции и обшивки. Практическая значимость полученных результатов заключается в построении методики расчета напряжений в конструкциях типа ферм, состоящих из коротких стержней из композиционных материалов.

The problem of settlement and theoretical analysis of background stress in the ribbed shell structures with the presence of plating. We propose a two-level mathematical model based on analytical solution of the idealized problem and obtaining the amendments by the full discrete simulation finned construction. The practical significance of the results is to construct a methodology for calculating the stresses in structures such as trusses, consisting of short rods of composite materials.

Ключевые слова: ферменные конструкции, композиционные материалы, фоновые напряжения, напряженно-деформированное состояние, концентрация напряжений, дискретная модель.

Статическое деформирование композиционных оребренных конструкций с регулярной системой спиральных и кольцевых ребер наиболее точно описывается моделями, учитывающими дискретность системы ребер. В работах [1, 2] рассматривалось однородное напряженное состояние оребренных структур без обшивки; в [2] полученные численные результаты подтверждены данными экспериментальных измерений, в [3] получены аппроксимирующие аналитические оценки напряжений и деформаций и поправочные коэффициенты. Однако наличие обшивки, даже весьма тонкой, существенно изменяет напряженно-деформированное состояние ребер сетчатой оболочки. В настоящей статье оценивается степень влияния обшивки на напряженно-деформированное состояние системы ребер и конструкций в целом.

Учет жесткости обшивки в безмоментном приближении: аналитические результаты

Для получения аналитических оценок напряжений и деформаций оребренной оболочки с обшивкой рассмотрим структурный элемент оребренной оболочки, состоящий из отрезка спирального ребра, половины отрезка кольцевого ребра и прямоугольника обшивки (рис. 1).

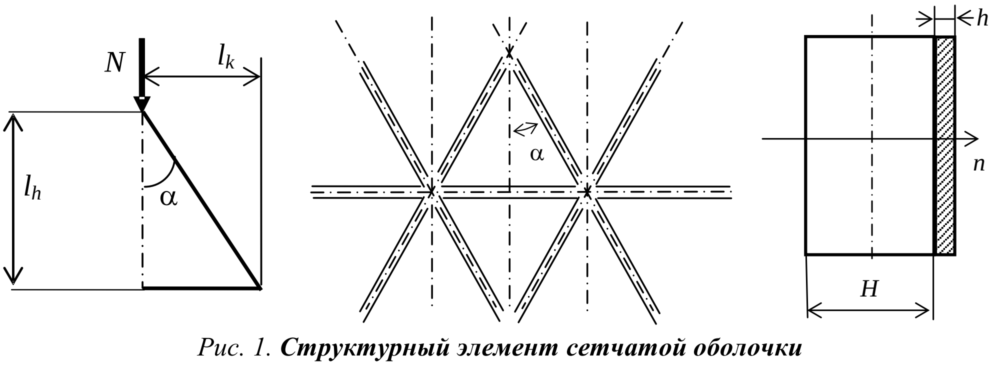

Рис. 1. ***Структурный элемент сетчатой оболочки***

Энергия деформации растяжения-сжатия ребер в безмоментном приближении может быть найдена интегрированием работы продольных сил в сечениях ребер по их длине. Поскольку каждое ребро примыкает к двум соседним треугольникам, будем включать в энергию деформации ячейки работу продольной силы только в половине сечения ребра. Тогда энергия деформации ячейки

$$W_{эя} = W_{обш} + W_c + \frac{1}{2} W_к, \qquad (1)$$

где W_c – энергия деформации спирального ребра, $W_к$ – энергия деформации кольцевого ребра, $W_{обш}$ – энергия деформации обшивки.

Выразим каждую из составляющих энергии деформации ребер через осевую деформацию оболочки:

$$W_c = l_c E F_c \frac{1}{2} \varepsilon_c^2 =$$
$$= l_c E F_c \frac{1}{2} \cos^4\alpha \left(1 - \frac{\cos\alpha \cdot \left(\bar{E}_{SK} + \sin\alpha\cos\alpha \right)}{\bar{F}_K + \sin^3\alpha + \bar{E}_K \cos\alpha} tg^2\alpha \right)^2 \varepsilon_S^2, \qquad (2)$$

$$W_\kappa = l_\kappa E F_\kappa \frac{1}{2}\varepsilon_\kappa^2 =$$

$$= \frac{1}{2} E F_\kappa l_c \sin\alpha \left(\frac{\cos\alpha \cdot \left(\overline{E}_{s\kappa} + \sin\alpha\cos\alpha\right)}{\overline{F}_\kappa + \sin^3\alpha + \overline{E}_\kappa \cos\alpha} \right)^2 \varepsilon_s^2. \quad (3)$$

Энергию деформации ортотропной обшивки найдем, учитывая, что ее деформации вдоль образующей и окружности постоянны по ячейке и равны деформациям ячейки ε_s и ε_κ соответственно, а деформация сдвига отсутствует:

$$W_{обш} = (\sigma_S \varepsilon_S + \sigma_K \varepsilon_K) h \frac{l_C \cos\alpha \cdot l_K}{2}. \quad (4)$$

При плоском напряженном состоянии напряжения в обшивке:

$$\sigma_S = \frac{E_S \varepsilon_S + \nu_S \ E_K \varepsilon_K}{1 - \nu_{SK} \nu_{KS}}, \quad (5)$$

$$\sigma_K = \frac{\nu_{KS} E_S \varepsilon_S + E_K \varepsilon_K}{1 - \nu_{SK} \nu_{KS}}. \quad (6)$$

Условия минимума потенциальной энергии структурной ячейки в этом случае принимают вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_s} = E F_c l_c \begin{bmatrix} \varepsilon_s \left(\overline{E}_s \sin\alpha\cos\alpha + \cos^4\alpha \right) + \\ + \varepsilon_\kappa \left(\overline{E}_{s\kappa} \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha \right) \end{bmatrix} + l_c \cos\alpha \cdot \frac{N}{2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_K} = E F_C l_C \Big[\varepsilon_S \left(\overline{E}_{SK} \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha \right) +$$

$$+ \varepsilon_\kappa \left(\overline{E}_{s\kappa} \sin\alpha\cos\alpha + \sin^4\alpha + \sin\alpha \cdot \overline{F}_\kappa \right) \Big] = 0, \quad (8)$$

где обозначено:

$$\overline{E}_s = \frac{E_s h \cdot l_c}{(1 - \nu_{s\kappa}\nu_{\kappa s}) E F_c},$$

$$\overline{E}_\kappa = \frac{E_\kappa h \cdot l_c}{(1 - \nu_{s\kappa}\nu_{\kappa s}) E F_c},$$

$$\overline{E}_{s\kappa} = \frac{\nu_{\kappa s} E_s h \cdot l_c}{(1 - \nu_{s\kappa}\nu_{\kappa s}) E F_c} = \frac{\nu_{s\kappa} E_\kappa h \cdot l_c}{(1 - \nu_{s\kappa}\nu_{\kappa s}) E F_c},$$

$$\overline{F}_\kappa = \frac{E F_\kappa}{E F_c}. \quad (9)$$

Из уравнения (8) получаем:

$$\varepsilon_\kappa = -\varepsilon_s \frac{\cos\alpha \left(\overline{E}_{s\kappa} + \sin\alpha\cos\alpha \right)}{\overline{F}_\kappa + \sin^3\alpha + \overline{E}_\kappa \cos\alpha}. \quad (10)$$

Подставляя в уравнение (7), находим:

$$\varepsilon_S \left(\cos^3\alpha + \overline{E}_S \sin\alpha - \frac{\left(\overline{E}_{s\kappa} + \sin\alpha\cos\alpha \right)^2}{\overline{F}_\kappa + \sin^3\alpha + \overline{E}_\kappa \cos\alpha} \cdot \sin\alpha\cos\alpha \right) = -\frac{N}{2 E F_c} \quad (11)$$

или после приведения к общему знаменателю:

$$\varepsilon_S \left(\frac{\left(\cos^3\alpha + \overline{E}_S \sin\alpha \right)\left(\overline{F}_\kappa + \sin^3\alpha + \overline{E}_\kappa \cos\alpha \right) - \sin\alpha\cos\alpha \left(\overline{E}_{s\kappa} + \sin\alpha\cos\alpha \right)^2}{\overline{F}_\kappa + \sin^3\alpha + \overline{E}_\kappa \cos\alpha} \right) = -\frac{N}{2 E F_c}. \quad (12)$$

Отсюда находится осевая деформация:

$$\varepsilon_s = -\frac{N}{2EF_c}\frac{\overline{F}_\kappa + \sin^3\alpha + \overline{E}_\kappa\cos\alpha}{\left(\cos^3\alpha + \overline{E}_{s\kappa}\sin\alpha\right)\left(\overline{F}\ \ +\sin^3\alpha + \overline{E}\ \ \cos\alpha\right) - \sin\alpha\cos\alpha\left(\overline{E}\ \ +\sin\alpha\cos\alpha\right)^2}. \tag{13}$$

Далее, используя физический закон, получим остальные деформации и напряжения. Соответствующие выражения приведены в таблице 1.

Рассмотрим изгибные напряжения в спиральных ребрах, которые могут быть выражены через угол поворота сечения:

$$\theta = (\varepsilon_{s\kappa} - \varepsilon\ )\sin\alpha\cos\alpha, \tag{14}$$

что дает верхнюю оценку прогиба:

$$w = \theta\left(-\frac{12l^2}{l_c^2} + \frac{3l}{l_c} - 1\right)l, \tag{15}$$

кривизны:

$$\frac{d^2w}{dl^2} = \left(-\frac{12l}{l_c^2} + \frac{6}{l_c} - 1\right)\cdot\theta = \frac{6l_c - 12l}{l_c^2}\cdot\theta, \tag{16}$$

и добавочных изгибных напряжений в ребрах:

$$\sigma_c^{изг} = \frac{E_c B_c}{2}\cdot\frac{l_c - 2l}{l_c^2}6\theta. \tag{17}$$

Однако эта оценка не учитывает влияние обшивки на моментные эффекты и поэтому является завышенной. Напряжение, обусловленное изгибом кольцевого ребра:

$$\sigma_\kappa^{изг} = \frac{2\sigma_\kappa l_\kappa^2}{Rh_\kappa} = \frac{2E_\kappa\varepsilon_\kappa l_c^2\sin^2\alpha}{Rh_\kappa}, \tag{18}$$

также представляет собой верхнюю оценку.

Следует обратить внимание, что окружные напряжения в обшивке зависят от соотношения окружных и осевых деформаций, которое, в свою очередь, существенно зависит от угла между спиральными ребрами. Поскольку знаки этих деформаций различны, окружное напряжение в обшивке может обращаться в нуль и даже менять знак при изменении угла между ребрами.

Учитывая приближенность формул 17-18, для практических расчетов, в них необходимо ввести поправочные коэффициенты, которые в дальнейшем будут определены численно.

Полученные аналитические оценки напряжений в оребренной структуре с учетом обшивки приведены в таблице 1.

Таблица 1

Сводка аналитических результатов

Безразмерные параметры конструкции	
$\cos\alpha = \frac{l_h}{l_c},\ \sin\alpha = \frac{l_k}{l_c}$	Функции угла между спиральными ребрами и образующей
$\overline{E}_S = \frac{E_S h\cdot l_C}{(1-\nu_{SK}\nu_{KS})EF_C}$	Безразмерные комплексы, характеризующие жесткость
$\overline{E}_K = \frac{E_K h\cdot l_C}{(1-\nu_{SK}\nu_{KS})EF_C}$	
$\overline{E}_{SK} = \frac{\nu_{KS}E_S h\cdot l_C}{(1-\nu_{SK}\nu_{KS})EF_C} = \frac{\nu_{SK}E_K h\cdot l_C}{(1-\nu_{SK}\nu_{KS})EF_C}$	
$\overline{F}_K = \frac{EF_K}{EF_C}$	
Деформации	
$\varepsilon_s = -\frac{N}{2EF_c}\frac{\overline{F}_\kappa+\sin^3\alpha+\overline{E}_\kappa\cos\alpha}{\left(\cos^3\alpha+\overline{E}_s\sin\alpha\right)\left(\overline{F}_\kappa+\sin^3\alpha+\overline{E}_\kappa\cos\alpha\right)-\sin\alpha\cos\alpha\left(\overline{E}_{s\kappa}+\sin\alpha\cos\alpha\right)^2}$	Осевая деформация оребренной структуры
$\varepsilon_K = -\varepsilon_S\frac{\cos\alpha\cdot\left(\overline{E}_{s\kappa}+\sin\alpha\cos\alpha\right)}{\overline{F}_\kappa+\sin^3\alpha+\overline{E}_\kappa\cos\alpha}$	Деформация растяжения кольцевого ребра

Продолжение таблицы 1

$\varepsilon_C = \varepsilon_S\cos^2\alpha + \varepsilon_K\sin^2\alpha$	Деформация сжатия спирального ребра

$\theta = (\varepsilon_S - \varepsilon_K)\sin\alpha\cos\alpha$	Угол поворота опорного сечения спирального ребра
Напряжения	
$\sigma_C = E_C(\varepsilon_S\cos^2\alpha + \varepsilon_K\sin^2\alpha)\cdot k_C^5$	Напряжение в спиральном ребре
$\sigma_K = E_K\varepsilon_K\cdot k_K^5$	Напряжение в кольцевом ребре
$\sigma_{c\,к}^{изг} = \frac{E_c B_c}{2}\cdot\frac{l_c - 2l}{l_c^2}6(\varepsilon_s - \varepsilon\ )\sin\alpha\cos\alpha\cdot k_C^{изг}$	Максимальное напряжение изгиба в спиральных ребрах
$\sigma_K^{изг} = \frac{2E_K\varepsilon_K l_C^2\sin^2\alpha}{Rh_K}\cdot k_K^{изг}$	Максимальное напряжение изгиба в кольцевых ребрах
$\sigma_S = \frac{E_S\varepsilon_S + \nu_{SK}E_K\varepsilon_K}{1-\nu_{SK}\nu_{KS}}\cdot k_S^{обш}$	Продольные напряжения в обшивке
$\sigma_K = \frac{\nu_{KS}E_S\varepsilon_S + E_K\varepsilon_K}{1-\nu_{SK}\nu_{KS}}\cdot k_t^{обш}$	Окружные напряжения в обшивке

Влияние угла между спиральными ребрами и отношения площадей поперечных сечений кольцевых и спиральных ребер

Для изучения влияния обшивки на напряженно-деформированное состояние ребер оребренной оболочки был проведен полный факторный вычислительный эксперимент, в котором варьируемыми факторами являлись угол между спиральным ребром и образующей α и отношение площадей поперечного сечения кольцевого и спирального ребер $\overline{F}_k = \frac{F_k}{F_c}$.

Рассматривалась цилиндрическая оболочка оребренной структуры с приложенной к верхней кромке сжимающей силой. Расчетная модель содержала 128 пар спиральных ребер. Интенсивность нагрузки на одну пару спиральных ребер бралась из условия $\sigma_0 = \frac{N}{2F_c} = 1$. Толщина однослойной обшивки и радиус оболочки, отнесенные к полудлине кольцевого ребра, составляли $h/L_k = 0{,}05$ и $R/L_k = 20{,}8$ соответственно, что обеспечивало малость влияния кривизны оболочки на напряженное состояние. Обшивка, спиральные и кольцевые ребра изготовлены из одного и того же материала со следующими физико-механическими характеристиками: $E_1 = E_2 = E_3 = 30000$ МПа, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5000$ МПа, $\nu = 0{,}2$.

Варьирование α производилось за счет изменения высоты элементарной ячейки L_h при фиксированной ширине L_k. Варьирование безразмерного комплекса $\overline{F}_k$ производилось за счет изменения ширины сечения кольцевого ребра B_k при фиксированной ширине спирального ребра B_c.

В качестве функции отклика в факторном эксперименте рассчитывался безразмерный поправочный коэффициент:

$$\kappa = \frac{\sigma_{чис}}{\sigma_{теор}}, \qquad (19)$$

где

$\sigma_{чис}$ – напряжения, рассчитанные численно,

$\sigma_{теор}$ – напряжения, вычисленные аналитически.

При расчете средних напряжений σ_s в спиральных и кольцевых ребрах в качестве расчетных точек выбирались центры средних поперечных сечений элементов ребер: точка 5, сечение 2 (рис. 2). Для оценки изгибных напряжений дополнительно использовались значения напряжений, рассчитанные в точках 6 и 8 этого же сечения, а также сечения 1, что позволяло получить распределение напряжений как по длине, так и по сечению ребра [1].

Результаты факторного эксперимента представлены в виде графиков зависимости поправочных коэффициентов k^n (верхний индекс указывает номер точки в сечении соответственно рисунку 2) от параметров конструкции. Коэффициенты k^5 для средних напряжений в спиральных и кольцевых ребрах в зависимости от соотношения размеров ячейки представлены на рисунке 3.

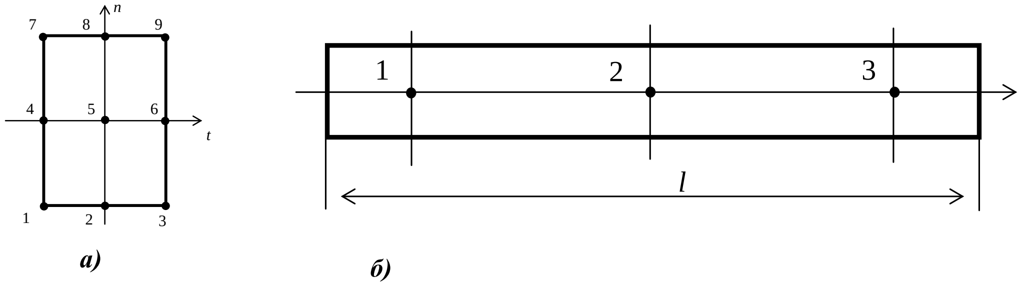

Рис. 2. ***Схема расчетных точек балки: а) в поперечном сечении, б) в продольном сечении***

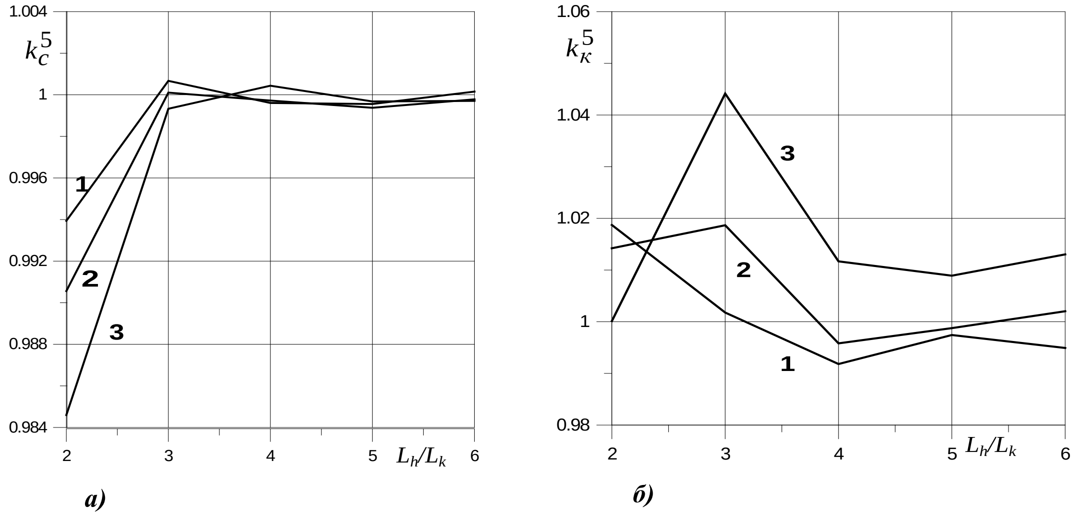

Рис. 3. ***Поправочные коэффициенты для σ_s : а) спиральные ребра, б) кольцевые ребра***

Отношение B_k/L_k : 1 – 0,1875; 2 – 0,125; 3 –0,0625.

Если отношение высоты к ширине ячейки составляет два и более ($\dfrac{L_h}{L_k} > 2$), поправочные коэффициенты для σ_s в спиральных ребрах отличаются от единицы менее чем на 0,016, независимо от ширины кольцевых ребер. При $\dfrac{L_h}{L_k} > 3$ отклонение поправочного коэффициента от единицы составляет менее 0,004.

Поправочные коэффициенты для σ_s в кольцевых ребрах зависят от угла между спиральным ребром и образующей и от отношения площадей сечений кольцевого и спирального ребер. Как видно из рисунка 2б, при $2 < \dfrac{L_h}{L_k} < 6$ отклонение поправочных коэффициентов от единицы не превосходит 4,5 %.

На рисунке 4 представлены поправочные коэффициенты для осевых и окружных напряжений в обшивке. При высоте ячейки, превышающей её ширину втрое и более ($\dfrac{L_h}{L_k} \geq 3$), поправочные коэффициенты для осевых напряжений σ_s отличаются от единицы не более чем на 1 %, а при $\dfrac{L_h}{L_k} = 2$ – на 6 %. Поправочные коэффициенты для окружных напряжений σ_t в обшивке в большей степени зависят от изменения $\dfrac{L_h}{L_k}$ и $\overline{F}_к$ (рис. 4б).

Отношение B_k/L_k : 1 – 0,1875; 2 – 0,125; 3 – 0,0625.

При проведении полного факторного вычислительного эксперимента рассчитывались также поправочные коэффициенты для изгибающих напряжений в кольцевых и спиральных ребрах модели. Напряжения от изгиба относительно оси большей жесткости (из плоскости сетки) и относительно оси меньшей жесткости (в касательной к оболочке плоскости) поперечного сечения в точке соединения ребер определялись с учетом расположения сечений и вида интерполяционных функций по длине конечного элемента, по формулам:

$$\sigma^{изг} = \sigma_2^8 + \frac{5}{3}\left(\sigma_3^8 - \sigma_2^8\right), \quad (20)$$

$$\sigma^{изг} = \sigma_2^6 + \frac{5}{3}\left(\sigma_3^6 - \sigma_2^6\right), \quad (21)$$

соответственно, где нижний индекс указывает на номер поперечного сечения конечного элемента, верхний – на точку в сечении в соответствии с рисунком 2.

Графики рассчитанных поправочных коэффициентов напряжений изгиба в ребрах в плоскостях большей и меньшей жесткости представлены на рисунке 5.

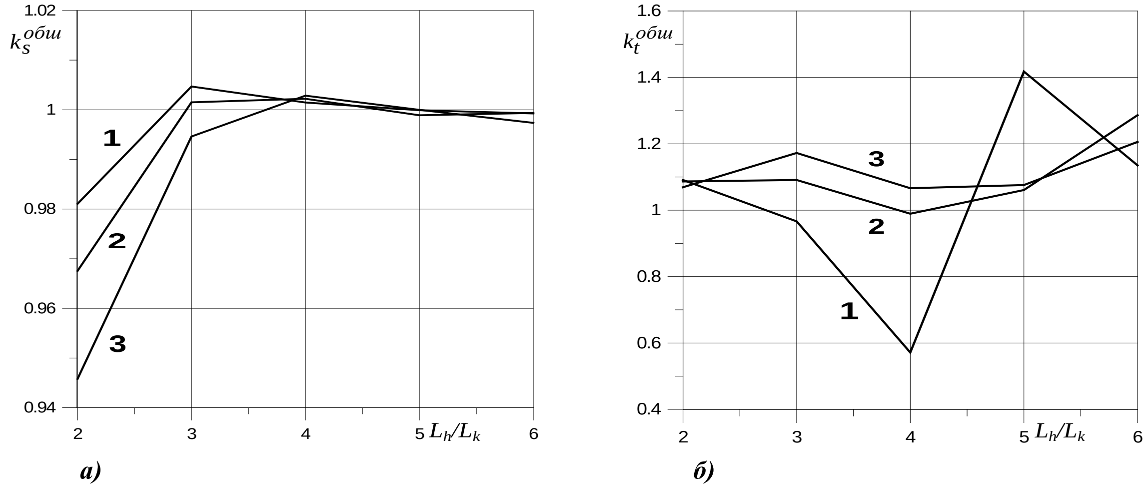

Рис. 4. ***Поправочные коэффициенты для напряжений в обшивке: а) осевые напряжения σ_s, б) окружные напряжения σ_t***

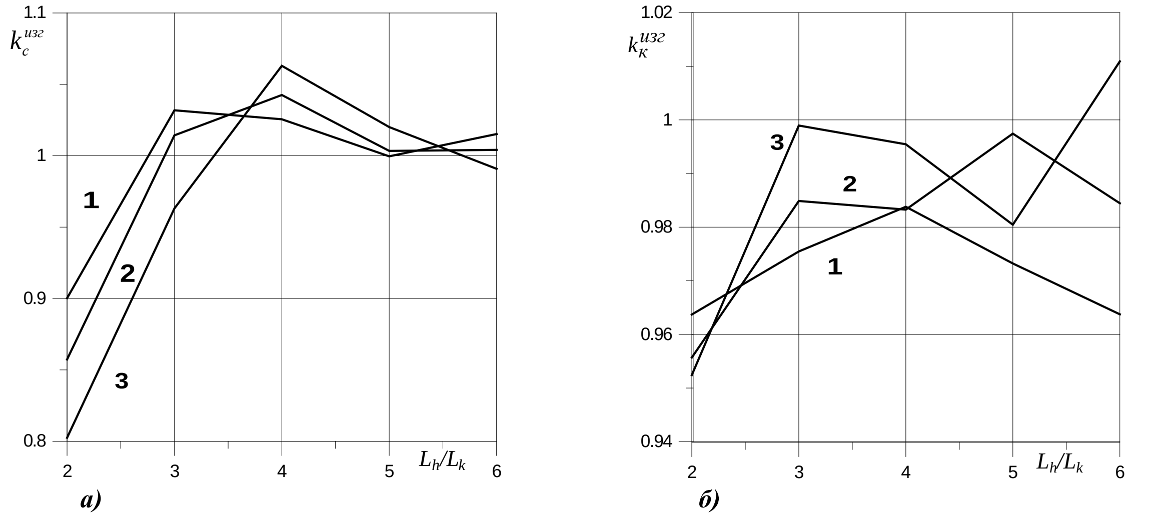

Рис. 5. ***Поправочные коэффициенты для: а) напряжений изгиба спиральных ребер в нормальной плоскости, б) напряжений изгиба кольцевых ребер в касательной плоскости***

Отношение B_k / L_k : 1 – 0,1875; 2 – 0,125; 3 – 0,0625.

Как видно из рисунка 5а, поправочные коэффициенты для напряжений изгиба спиральных ребер в нормальной плоскости мало отличаются от единичного значения (менее чем на 0,05) при соотношении $\frac{L_h}{L_k} > 4$ (т. е. высота ячейки в четыре раза больше её ширины). При $\frac{L_h}{L_k} < 4$ коэффициенты уменьшаются, при $\frac{L_h}{L_k} = 2$ достигают значения 0,81 и 0,9 при отношении ширины кольцевого ребра к его длине 0,125 и 0,0625 соответственно.

Поправочные коэффициенты для напряжений изгиба по ширине в поперечном сечении спиральных ребер мало подвержены влиянию изменения угла между спиральным ребром и образующей и изменения отношения площадей кольцевого и спирального ребер отличаются от значения $k_c^{изг}$ = 1 по абсолютной величине менее чем на 0,05 (рис. 5б).

Выводы

Получены упрощенные аналитические оценки напряжений в оребренной оболочке с обшивкой в безмоментном приближении и вычислены поправочные коэффициенты, учитывающие изгиб оребреной структуры.

Показано, что окружные напряжения в обшивке зависят от соотношения окружных и осевых деформаций, которое, в свою очередь, существенно зависит от угла между спиральными ребрами. Изменяя угол между ребрами, можно уменьшить окружные напряжения в обшивке до нуля и даже изменить их знак.

Литература

1. Бурнышева, Т. В. Исследование концентрации напряжений в окрестности вырезов сетчатых оболочек из полимерных композиционных материалов [Текст] / Т. В. Бурнышева, В. О. Каледин, Е. В. Решетникова // Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии: сб. науч. тр. – Кемерово: ИНТ, 2007. – С. 273 – 275.

2. Васильев, В. В. Исследование влияния формы ячейки на напряженное состояние композитной сетчатой конструкции при локальном нагружении [Текст] / В. В. Васильев, М. В. Никитин, А. Ф. Разин // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – М.: НТЦ «Информтехника». – 2008. – Вып. 1(138) – 2(139). – 90 с.

3. Каледин, В. О. Математическое моделирование статики сетчатой оболочки с учетом концентрации напряжений [Текст] / В. О. Каледин, Ю. В. Аникина, Т. В. Бурнышева, Е. В. Решетникова // Вестник ТГУ. – 2006. – № 19. – С. 233 – 237.

4. Бурнышева, Т. В. Дискретное моделирование напряжений в сетчатых оболочках [Текст] / Т. В. Бурнышева, В. О. Каледин, Е. В. Решетникова // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. тр. 8-й Всероссийской науч. конф. В 2-х т. – Новокузнецк: НФИ КемГУ. – 2006. – Т. 2. – С. 16 – 19.

5. Спиридонов, А. А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов [Текст] / А. А. Спиридонов. – М.: Машиностроение, 1981. – 184 с.

Рецензент – В. И. Базайкин, ГОУ ВПО «Сибирский государственный индустриальный университет».