УДК 514.763.43

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА $SU(2)\times SU(2)$

Н. А. Даурцева

На пространстве SU(2)×SU(2) с римановой метрикой Киллинга-Картана g рассматриваются левоинвариантные ортогональные почти комплексные структуры I. Пусть ω_I фундаментальная форма почти эрмитовой структуры (g, I). В работе найдено условие, при котором 3-форма $d\omega_I$ является невырожденной и определяет почти комплексную структуру J_I. Изучены свойства почти комплексной структуры J_I.

The leftinvariant ortogonal almost complex structures I on the SU(2)×SU(2) with Killng-Cartan metric g are reseached. Let ω_I is degined by $\omega_I(X, Y)=g(IX, Y)$, for each leftinvariant almost Hermitian structure (g, I). Condition for I to define almost complex structure J_I by $d\omega_I$ is obtained. Properties of J_I are researched.

Ключевые слова: 3-формы, приблизительно келерова структура, произведение сфер.

Введение

Пусть M – 6-мерное многообразие, на котором задана дифференциальная 3-форма $\psi \in \Lambda^3(M)$. С формой $\psi \in \Lambda^3(M)$ можно связать [5] эндоморфизм $K \in \mathrm{End}(TM) \otimes \Lambda^6(M)$ по формуле:

$$K(X) = A(i_X\psi \wedge \psi),$$

где $A:\Lambda^5 \to TM \otimes \Lambda^6$ – изоморфизм, индуцированный внешним произведением.

Если на M зафиксирована форма объема Vol, то K – эндоморфизм касательного расслоения TM, определяемый равенством $i_X\psi \wedge \psi = i_{K(X)}\mathbf{Vol}$. Пусть $\tau(\psi) = \frac{1}{6}\mathrm{tr}\left(K^2\right)$. В работе [5] показано, что $K^2 = \tau(\psi)\mathrm{Id}$. На пространстве 3-форм $\Lambda^3(R^6)$ группа $GL(6, \mathbf{R})$ имеет две открытые орбиты $\boldsymbol{O}_1$ и $\boldsymbol{O}_2$. Стабилизатором форм первой орбиты является группа $SL(3, \mathbf{C})$. Известно [5], что $\tau\left(\psi\right) < 0$ в том и только том случае, если $\psi \in O_1$. Таким образом, если 3-форма $\psi \in O_1$, то она определяет почти комплексную структуру:

$$J_\psi = \frac{1}{\sqrt{-\tau(\psi)}}K.$$

Рассмотрим теперь случай

$M = S^3 \times S^3 = SU(2)\times SU(2)$ с римановой метрикой g, определенной формой Киллинга-Картана. Нас будут интересовать левоинвариантные структуры на $SU(2)\times SU(2)$. В этом случае вычисления могут быть сведены к вычислениям на алгебре Ли $su(2)\times su(2)$ группы Ли $SU(2)\times SU(2)$. Обозначим $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ ортонормированный базис алгебры Ли $su(2)\times su(2) = \mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ со скобками Ли $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_4, e_5] = e_6$, $[e_4, e_6] = -e_5$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_i, e_j] = 0$, для остальных комбинаций значений i, j; $e_i \in su(2)\times 0$, $i = 1,2,3$; $e_i \in 0\times su(2)$, $i = 4, 5, 6$). Зафиксируем на M ориентацию, определяемую набором векторов $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$.

Введем следующие обозначения:

A^+ – пространство всех левоинвариантных почти комплексных структур, сохраняющих заданную ориентацию;

AO^+ – пространство всех ортогональных (относительно g) левоинвариантных почти комплексных структур, сохраняющих заданную ориентацию;

$A_\omega{}^+ = \{J\in A^+: \omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ и $\omega(X, JX) > 0$ $\forall X, Y$ на M, $X \neq 0\}$ – пространство всех левоинвариантных почти комплексных структур, положительно ассоциированных с 2-формой ω и сохраняющих заданную ориентацию.

В работе [1] определено расслоение $\pi : A^+ \to AO^+$, слоем которого над ортогональной почти комплексной структурой $I\in AO^+$ является пространство $A^+_{\omega_I}$ почти комплексных структур, положительно ассоциированных с фундаментальной формой $\omega_I(X, Y) = g(IX, Y)$. Напомним, что для $J \in A^+$ проекция расслоения π строится следующим образом:

$$\pi(J) = \left(-B^2\right)^{-\frac{1}{2}} B, \text{ где } \omega(X,Y) = g(BX,Y),$$

$$\omega(X,Y) = \frac{1}{2}(g(JX,Y) - g(X,JY)).$$

Двойственные почти комплексные структуры

Каждой левоинвариантной ортогональной почти комплексной структуре $I\in AO^+$ соответствует левоинвариантная 2-форма $\omega_I(X, Y) = g(X, IY)$. Как известно, на $\boldsymbol{SU(2)\times SU(2)}$ не существует замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формы, а значит, $d\omega_I \neq 0$. Форма $d\omega_I$ определяет эндоморфизм $K_I \in \mathrm{End}(su(2)\times su(2))$. Таким образом, определено отображение:

$$I \in AO^+{}_g \to d\omega_I \to K_I \in \mathrm{End}(su(2)\times su(2)).$$

При выполнении условия $\tau\left(\psi\right) = \mathrm{tr}(K^2) < 0$, каждая почти комплексная структура $I\in AO^+$ определяет почти комплексную структуру $J_I \in A^+$. Такую почти комплексную структуру J_I будем называть двойственной к I. Рассмотрим, для каких $I \in AO^+$ выполняется $\tau(d\omega_I) < 0$, и какими свойствами обладают двойственные почти комплексные структуры $J_I \in A^+$. Возьмем почти комплексную структуру $I \in AO^+$. В стандартном базисе она задается кососимметрической матрицей $I = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & C \end{pmatrix}$,

где $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ -c_1 & 0 & c_3 \\ -c_2 & -c_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Параметры a_i, b_j, c_k, i, k = 1,2,3, j = 1,..,6 связаны друг с другом условиями $I^2 = -1$. Из этого условия вытекают, в частности, следующие соотношения:

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2$$

и $\sum_{i=1}^{9} b_i^2 = 3 - 2\sum_{i=1}^{3} a_i^2$.

Теорема 1. *Условие* τ $(d\omega_I) < 0$ *выполняется в том и только том случае, если*

$$\| A \|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + < 3/2.$$

Доказательство. Поскольку ω_I $(X, Y) = g(IX, Y)$, то в базисе (e) матрица формы ω_I равна транспонированной матрице соответствующей почти комплексной структуры I. Для вычисления внешнего дифференциала $d\omega_\mathrm{I}$ используем формулы Маурера-Картана: $d\theta^k = -\sum_{i<j} C_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j$,

где $C^{\,k}_{\,ij}$ – структурные константы,

$\theta^{\,i}$ – базис в пространстве левоинвариантных 1 форм на M, i, j, k = 1..6.

Пусть $(e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6)$ – кобазис, соответствующий $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. Тогда $de^1 = -e^2 \wedge e^3$, $de^2 = -e^3 \wedge e^1$, $de^3 = -e^1 \wedge e^2$, $de^4 = -e^5 \wedge e^6$, $de^5 = -e^6 \wedge e^4$, $de^6 = -e^4 \wedge e^5$ и мы получаем:

$$\psi = d\omega_I = b_1\left(e^{234} + e^{156}\right) + b_2\left(e^{235} + e^{164}\right) +$$
$$+ b_3\left(e^{236} + e^{145}\right) + b_4\left(e^{314} + e^{256}\right) +$$
$$+ b_5\left(e^{315} + e^{264}\right) + b_6\left(e^{316} + e^{245}\right) +$$
$$+ b_7\left(e^{124} + e^{356}\right) + b_8\left(e^{125} + e^{364}\right) +$$
$$+ b_9\left(e^{126} + e^{345}\right),$$

где e^{ijk} обозначает 3-форму $e^i \wedge e^j \wedge e^k$

$$i_{e_1}\psi \wedge \psi = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 - b_5^2 - b_6^2 - b_7^2 - b_8^2 - b_9^2)e^{23456} +$$
$$+ 2(-b_1b_4 - b_2b_5 - b_3b_6)e^{13456} + 2(b_1b_7 + b_2b_8 + b_3b_9)e^{12456} +$$
$$+ 2(b_6b_8 - b_5b_9)e^{12356} + 2(b_6b_7 - b_4b_9)e^{12346} +$$
$$+ 2(b_5b_7 - b_4b_8)e^{12345}.$$

Из условия $I^2 = -1$ следуют равенства:

1) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1;$

2) $b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + a_1^2 + a_3^2 = 1;$

3) $b_7^2 + b_8^2 + b_9^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1;$

4) $a_2a_3 + b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 = 0;$

5) $-a_1a_3 + b_1b_7 + b_2b_8 + b_3b_9 = 0.$

Тогда:

$$i_{e_1}\psi \wedge \psi = (-1 + 2a_3^2)e^{23456} + 2a_2a_3e^{13456} + 2a_1a_3e^{12456} + 2(b_6b_8 - b_5b_9)e^{12356} +$$
$$+ 2(b_6b_7 - b_4b_9)e^{12346} + 2(b_5b_7 - b_4b_8)e^{12345}.$$

Аналогично:

$$i_{e_2}\psi \wedge \psi = -2a_2a_3e^{23456} + (1 - 2a_2^2)e^{13456} - 2a_1a_2e^{12456} + 2(b_2b_9 - b_3b_8)e^{12356} + 2(b_1b_9 - b_3b_7)e^{12346} + 2(b_1b_8 - b_2b_7)e^{12345};$$

$$i_{e_3}\psi \wedge \psi = 2a_1a_3e^{23456} + 2a_1a_2e^{13456} + (-1 + 2a_1^2)e^{12456} + 2(b_3b_5 - b_2b_6)e^{12356} + 2(b_3b_4 - b_1b_6)e^{12346} + 2(b_2b_4 - b_1b_5)e^{12345};$$

$$i_{e_4}\psi \wedge \psi = 2(b_6b_8 - b_5b_9)e^{23456} + 2(b_3b_8 - b_2b_9)e^{13456} + 2(b_3b_5 - b_2b_6)e^{12456} + (-1 + 2c_3^2)e^{12356} - 2c_2c_3e^{12346} + 2c_1c_3e^{12345};$$

$$i_{e_5}\psi \wedge \psi = 2(b_4b_9 - b_6b_7)e^{23456} + 2(b_2b_9 - b_3b_7)e^{13456} + 2(b_1b_6 - b_3b_4)e^{12456} - 2c_2c_3e^{12356} + (1 - 2c_2^2)e^{12346} - 2c_1c_2e^{12345};$$

$$i_{e_6}\psi \wedge \psi = 2(b_5b_7 - b_4b_8)e^{23456} + 2(b_2b_7 - b_1b_8)e^{13456} + 2(b_2b_4 - b_1b_5)e^{12456} + 2c_1c_3e^{12356} + 2c_1c_2e^{12346} + (-1 + 2c_1^2)e^{12345}.$$

Поскольку $i_{K(X)}Vol = i_X\psi \wedge \psi$ и

$$i_Y\mathrm{Vol} = Y^1e^{23456} - Y^2e^{13456} + Y^3e^{12456} - Y^4e^{12356} + Y^5e^{12346} - Y^6e^{12345},$$

где $\mathrm{Vol} = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \wedge e^5 \wedge e^6$, то матрица K в стандартном базисе имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} -1+2a_3^2 & -2a_2a_3 & 2a_1a_3 & -2(b_5b_9-b_6b_8) & -2(b_6b_7-b_4b_9) & -2(b_4b_8-b_5b_7) \\ -2a_2a_3 & -1+2a_2^2 & -2a_1a_2 & -2(b_3b_8-b_2b_9) & -2(b_1b_9-b_3b_7) & -2(b_2b_7-b_1b_8) \\ 2a_1a_3 & -2a_1a_2 & -1+2a_1^2 & -2(b_2b_6-b_3b_5) & -2(b_3b_4-b_1b_6) & -2(b_1b_5-b_2b_4) \\ 2(b_5b_9-b_6b_8) & 2(b_3b_8-b_2b_9) & 2(b_2b_6-b_3b_5) & 1-2c_3^2 & 2c_2c_3 & -2c_1c_3 \\ 2(b_6b_7-b_4b_9) & 2(b_1b_9-b_3b_7) & 2(b_3b_4-b_1b_6) & 2c_2c_3 & 1-2c_2^2 & 2c_1c_2 \\ 2(b_4b_8-b_5b_7) & 2(b_2b_7-b_1b_8) & 2(b_1b_5-b_2b_4) & -2c_1c_3 & 2c_1c_2 & 1-2c_1^2 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\tau(\psi) = \frac{1}{6}trK^2 = 1 + 4a_3^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2-1) - 4(b_5^2b_9^2 - 2b_5b_6b_8b_9 + b_6^2b_8^2) - 4(b_6^2b_7^2 - 2b_4b_5b_7b_9 + b_4^2b_9^2) -$$

$$- 4(b_4^2b_8^2 - 2b_4b_5b_7b_8 + b_5^2b_7^2) = 1 + 4a_3^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2-1) - 4(b_7^2+b_8^2+b_9^2)(b_4^2+b_5^2+b_6^2) + 4(b_4b_7+b_5b_8+b_6b_9)^2.$$

Поскольку при условии $I^2 = -1$ выполняются равенства 2) и 3), а также

$b_4b_7 + b_5b_8 + b_6b_9 + a_1a_2 = 0$, то

$$\tau(\psi) = 4(a_1^2+a_2^2+a_3^2) - 3.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Оператор K может быть представлен в следующем виде:

$$K = \begin{pmatrix} -1+2A^* & -2B^* \\ 2B^{*T} & 1-2C^* \end{pmatrix},$$

где A^*, B^* – матрицы алгебраических дополнений к матрицам A и B соответственно.

Следствие. *Если* $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < \frac{3}{4}$, *то двойственная к* $I \in AO^+$ *почти комплексная структура* J_I *имеет вид:*

$$J_I = \frac{1}{\sqrt{3-2\|A\|^2}}\begin{pmatrix} -1+2A^* & -2B^* \\ 2B^{*T} & 1-2C^* \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Так как

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ и

$\sum_{i=1}^{9} b_i^2 = 3 - 2\sum_{i=1}^{3} a_i^2$ в силу требования $I^2 = -1$, то следующие условия эквивалентны:

$\tau(d\omega_I) < 0$, $\|C\|^2 < 3/2$, $\|A\|^2 < 3/2$, $\|B\|^2 > 3/2$.

Замечание 3. Известно [2], что почти комплексная структура I_0, определенная формулами $I_0(e_1) = e_4$, $I_0(e_2) = e_3$, $I_0(e_5) = e_6$, является интегрируемой. Для такой структуры $\|A\|^2 = 2$, то есть $\tau(d\omega_I) > 0$, поэтому она не определяет двойственную почти комплексную структуру. Если же, наоборот, взять класс максимально неинтегрируемых структур [4] вида $I_B = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix}$, $B \in SO(3)$, то они определяют двойственные почти комплексные структуры $J_I = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 & -2B^* \\ 2B^{*T} & 1 \end{pmatrix}$.

Так как матрица B ортогональная, то существует базис

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6) = $$
$$= (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B^{*T} \end{pmatrix},$$

полученный из стандартного изометричным преобразованием $SU(2) \times SU(2)$, в котором почти комплексная структура принимает вид:

$$J_I = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В работе J. B. Butruille [3] показано, что класс таких почти комплексных структур I_B имеет одну двойственную почти комплексную структуру, которая с 3-симметрической метрикой на $SU(2)\times SU(2)$ задает приблизительно келерову структуру.

Лемма 1. *Для почти комплексных структур* $I \in AO^+$, *удовлетворяющих условию* $\tau(d\omega_I) < 0$ *выполняется* $\det(B) < 0$.

Доказательство. Предположим, что среди структур $I \in AO^+$, удовлетворяющих условию $\tau(d\omega_I) < 0$ существует такая, для которой $\det(B) = 0$. Тогда найдется ненулевой вектор $v \in R^3$, такой, что $B^Tv = 0$. Пусть теперь вектор $V \in su(2)\times su(2)$, такой, что его проекция на первый сомножитель совпадает с вектором v ($\pi_1(V) = v$), а проекция на второй сомножитель равна нулю ($\pi_2(V) = 0$), т. е. $V^T = (v^T, 0)$. Тогда:

$$(I^2V)^T = (v^T A^2, v^T AB) = (-v^T, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 v = -v; \\ B^T A v = 0. \end{cases}$$

Но условие $A^2v = -v$ выполняется в том и только том случае, если $\det(A^2+1) = 0$, т. е. $a_1^2+ a_2^2+ a_3^2 = 1$, что противоречит условию $a_1^2+ a_2^2+ a_3^2 < 3/4$.

Так как $\det B \neq 0$, то векторы базиса (e_1, e_2, e_3) являются I-линейно независимыми. Тогда:

$$\left(e_1, e_2, e_3, Ie_1, Ie_2, Ie_3\right) = \\ = \left(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\right)\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & -B^T \end{pmatrix}.$$

То есть I сохраняет [2] заданную ориентацию при условии $\det B < 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Двойственная почти комплексная структура J_I определяет ту же ориентацию, что и исходная структура I, т.е. $J_I \in A^+$.*

Доказательство. Так как $\det B \neq 0$, то векторы базиса (e_1, e_2, e_3) являются J_I – линейно независимыми. Определитель матрицы перехода от базиса $\left(e_1, e_2, e_3, J_I e_1, J_I e_2, J_I e_3\right)$ к стандартному:

$$\det\begin{pmatrix} E & -1+2A^* \\ 0 & 2B^{*T} \end{pmatrix} = 8\det{}^2 B > 0.$$

Лемма доказана.

Символом $AO^+(3/2)$ обозначим множество ортогональных почти комплексных структур вида:

$I = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & C \end{pmatrix}$, для которых:

$\| A\|^2 = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) < 3/2$.

В этом случае мы получаем отображение:

$$H: AO^+(3/2) \to A^+, \quad H(I) = J_I.$$

Найдем проекцию $J_I \in A^+$ на базу расслоения $\pi : A^+ \to AO^+$ используя результаты [1].

Теорема 2. *Почти комплексная структура J_I является положительно ассоциированной с 2-формой ω_J, матрица которой в стандартном базисе имеет вид:*

$$\omega_J = \begin{pmatrix} 0 & (1+yA^*)B^* \\ -(1+yC^*)B^{*T} & 0 \end{pmatrix},$$

где $y = \dfrac{1-\sqrt{1-a_1^2-a_2^2-a_3^2}}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\sqrt{1-a_1^2-a_2^2-a_3^2}}$.

Проекция $\pi(J_I) \in AO^+$ почти комплексной структуры J_I на AO^+ определяется формулой:

$$\pi(J_I) = \frac{2}{\sqrt{1-a_1^2-a_2^2-a_3^2}}\begin{pmatrix} 0 & -(1+yA^*)B^* \\ (1+yC^*)B^{*T} & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Структуре J_I соответствует кососимметрическая форма:

$$\omega(X,Y) = \frac{1}{2} g(JX,Y) - g(X,JY).$$

Матрица формы ω в стандартном базисе имеет вид:

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{-\tau}}\begin{pmatrix} 0 & B^* \\ -B^{*T} & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий кососимметрический оператор D, такой, что $\omega(X, Y) = g(DX, Y)$ имеет вид:

$$D = \frac{2}{\sqrt{-\tau}}\begin{pmatrix} 0 & -B^* \\ B^{*T} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left(-D^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{4B^*B^{*T}}{-\tau}\right)^{-1/2} & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{4B^{*T}B^*}{-\tau}\right)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Найдем $\left(\dfrac{4B^*B^{*T}}{-\tau}\right)^{-1/2}$ и $\left(\dfrac{4B^{*T}B^*}{-\tau}\right)^{-1/2}$.

Воспользуемся условием $J_I^2 = -1$. Очевидно, что оно равносильно системе:

$$\begin{cases} \left(1-2A^*\right)^2 - 4B^*B^{*T} = \tau E, \\ \left(1-2C^*\right)^2 - 4B^{*T}B^* = \tau E, \\ B^*C^* = A^*B^*. \end{cases}$$

Тогда $\left(-\dfrac{4B^*B^{*T}}{\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\dfrac{1-2A^*}{-\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}$

и $\left(-\dfrac{4B^{*T}B^*}{\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\dfrac{1-2C^*}{-\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Посредством прямых вычислений можно показать, что $A^{*\,2} = xA^*$, где $x = a_1^2+ a_2^2+ a_3^2$. Тогда:

$$1+\frac{\left(1-2A^*\right)^2}{-\tau}=1+\frac{\left(1+4(x-1)A^*\right)}{-\tau}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{-\tau}\right)(1-A^*),$$

$$\left(1+\frac{\left(1-2A^*\right)^2}{-\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-1/\tau}}\left(1-A^*\right)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-1/\tau}}\left(1+\frac{1}{2}A^*+\frac{3}{2^2}A^{*2}+\frac{15}{2^3}A^{*3}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-1/\tau}}\left(1+\frac{1}{2}A^*+\frac{3}{2^2}xA^*+\frac{15}{2^3}x^2A^*+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{x\sqrt{1-1/\tau}}\left(x-A^*+A^*\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2^2}x^2+\frac{15}{2^3}x^3+\ldots\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{x\sqrt{1-1/\tau}}\left(x+A^*(1-x)^{-1/2}-1\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-1/\tau}}\left(1+\frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}A^*\right).$$

Проекция почти комплексной структуры J_I на AO^+ теперь может быть вычислена:

$$\pi\left(J_I\right)=\left(-D^2\right)^{-1/2}$$
$$D=\frac{2}{\sqrt{1-\tau}}\begin{pmatrix}0 & -\left(1+yA^*\right)B^*\\ \left(1+yC^*\right)B^{*T} & 0\end{pmatrix},$$

а значит:

$$\omega_J=\frac{2}{\sqrt{1-\tau}}\begin{pmatrix}0 & \left(1+yA^*\right)B^*\\ -\left(1+yC^*\right)B^{*T} & 0\end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Повторное применение операции H перехода к дуальной почти комплексной структуре*

$$\left\{I\in AO^+:\|A\|^2<\frac{3}{2}\right\}\xrightarrow{H}$$
$$\xrightarrow{H}J_I\xrightarrow{\pi}\pi(J_I)\xrightarrow{H}J_{\pi(J_I)}$$

дает почти комплексную структуру, которая вместе с 3-симметрической метрикой задает приблизительно келерову структуру на $SU(2)\times SU(2)$.

Доказательство. Так как $\pi\left(J_I\right)\in AO^+$, то матрица $X=\frac{2}{\sqrt{1-\tau}}\left(1+yA^*\right)B^*\in SO(3)$. Доказательство следует из рассуждений замечания 3.

Литература

1. Даурцева, Н. А. О многообразии почти комплексных структур / Н. А. Даурцева // Математические заметки. – 2005. – № 78:1. – С. 66 – 71.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2.
3. Butruille, J. B. Homogeneous nearly Kähler manifolds / J. B. Butruille // Preprint. – arXiv:math.DG/0612655v1.
4. Daurtseva, N. A. Left-invariant almost nearly Kähler structures on $SU(2)\times SU(2)$ in the tetrahedron visualization for CP^3 / N. A. Daurtseva // Preprint.– arXiv:math.DG/0608704v2.
5. Hitchin, N. The geometry of three-forms in six and seven dimensions / N. Hitchin // Preprint. –arXiv: math.DG/0010054v1.

Рецензент – С. Н. Астраков, Кемеровский институт (филиал) Российского государственного торгово-экономического университета.