УДК 336.748

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ НА РЕСУРСЫ ПРОИЗВОДСТВА С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

А. В. Чекменёв, Т. Д. Чекменёва

Рассматривается математическая постановка и решение задачи минимизации затрат на ресурсы при производстве некоторого вида товара с ограничением в виде производственной функции нескольких переменных, выражающим ограниченность спроса на данный товар.

It's considered mathematical statement and the decision of the problem of minimization of expenses for resources by manufacture of some kind of the goods with restriction in the form of production function of the several variables, expressing limitation of demand for the given goods.

Ключевые слова: ресурсы, производственная функция, минимизация, метод множителей Лагранжа, эконометрическое моделирование.

Постановка задачи. При планировании производства классической задачей является задача максимизации доходов от реализации продукции фирмы с учётом затрат на ресурсы. Её упрощённую математическую модель можно представить в виде:

$$\begin{cases} p_0 f(x_1,...,x_n) - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max \\ x_1 \ge 0,..., x_n \ge 0, \end{cases}$$

где p_0 – цена товара на рынке;

x_i – количество *i*-го ресурса;

p_i – цена *i*-го ресурса;

$f(x_1,...,x_n)$ – объём произведённого (поставленного на рынок) товара – производственная функция.

В настоящее время основной проблемой производства является нехватка (либо дороговизна) ресурсов. Поэтому всё чаще ставится задача максимизации дохода при условии минимизации затрат на ресурсы производства. При постановке такой задачи необходимо также определить оптимальный объём товара, поставляемого на рынок, рассматривая его как необходимое условие, выступающее в виде ограничения при минимизации объёма ресурсов. Другими словами, надо производить столько товара, сколько необходимо потребителю, т. е. согласно имеющемуся спросу на этот товар. Данное требование выражается в том, что оптимальный объём производства (поставки) не только требует минимизации ресурсов, но и должен соответствовать требованиям имеющегося спроса (y*). Таким образом, к поставленной задаче максимизации дохода необходимо добавить ограничение вида: $f(x_1,..., x_n) = y*$. Величина y* (по сути, план производства) может быть определена с помощью методов теории управления запасами как величина спроса, минимизирующего издержки. Тогда задача, в которой определяется минимальное количество ресурсов, необходимое для производства (поставки) заданного объёма товара y*, определяемого имеющимся спросом, может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ f(x_1,...,x_n) = y* \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0,..., x_n \ge 0 \ .$$

Решением задачи (1) является вектор $(x_1^*,...,x_n^*)$, обеспечивающий минимум затрат на ресурсы при заданном ограничении на производство рассматриваемого товара. Для решения данной задачи требуется задать функцию $f(x_1,...,x_n)$, представляющую собой зависимость количества произведённого товара от количества использованных ресурсов, т. е. производственную функцию.

В работе [1] был рассмотрен простой частный случай задачи (1), когда для производства используется два вида ресурсов. Получены формулы для определения оптимального количества x_1*, x_2* этих ресурсов с использованием оптимальной величины y*, определяемой моделью оптимизации поставок теории запасов. Очевидно, на реальных производствах количество видов используемых ресурсов значительно больше. Поэтому представляет интерес решение рассматриваемой задачи в более общем виде.

Решение задачи. Пусть производственная функция $y = f(x \ ,..., x_n)$ зависит от произвольного количества ресурсов *n*. Наиболее часто производственная функция задаётся в форме степенной функции вида:

$$y = K\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad (1)$$

где $K, \alpha_1,..., \alpha_n$ – известные параметры, характеризующие: $\alpha_1,..., \alpha_n$ – коэффициенты эластичности потребления ресурсов;

K – объём производства в условиях неизменности потребляемых ресурсов.

На практике, как правило, эти параметры заранее неизвестны. Однако их можно определить статистическим путём с помощью эконометрического моделирования зависимости (1) при имеющихся результатах наблюдения переменных $y, x_1, ..., x_n$ на определённом промежутке функционирования производства.

Тогда математическая формулировка задачи минимизации затрат ресурсов при ограничении на требуемый объём производства принимает вид:

$$\begin{cases} p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \to \min \\ K x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = y^* \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для преобразования задачи (2) в задачу минимизации без ограничений применяем метод множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda) = p_1 x_1 + \cdots p_n x_n + \\ + \lambda(K x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} - y^*) \to \min.$$

Используя необходимое условие экстремума, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 + \lambda K \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = 0 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = p_n + \lambda K \alpha_n x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = K x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} - y^* = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение данной системы позволяет определить искомые оптимальные объёмы ресурсов $x_1^*, ...,$ x_n^* для производства необходимого (соответствующего спросу) объёма продукции y^*. Данная система представляет собой нелинейную систему алгебраических уравнений, и её непосредственное решение является достаточно сложной проблемой. Для решения системы (3) приведём её к виду:

$$\begin{cases} \lambda K \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = -p_1 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \lambda K \alpha_n x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} = -p_n \\ K x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = y^*. \end{cases} \quad (4)$$

Разделив 2-е, …, n-е уравнения системы (4) на первое уравнение, затем выражая переменные $x_2, ..., x_n$ через x_1 и подставляя в последнее уравнение, найдём:

$$x_i^* = \frac{\alpha_i}{p_i} \left[\frac{y^*}{K} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \right]^{1/\alpha}, \ i = 1, ..., n, \quad (5)$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

При этом минимальный размер затрат на ресурсы составит:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\frac{y^*}{K} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \right]^{1/\alpha}.$$

Следует отметить, что данные выражения имеют экономический смысл лишь при условии:

$$\alpha_i > 0, i = 1, ..., n.$$

Ограничительную величину объёма производства y* как величину, соответствующую уровню спроса на продукцию, можно определить на основе теории управления запасами. Используя, например, известную модель Уилсона, получим:

$$y^* = \sqrt{2\beta \cdot I / h},$$

где I – организационные издержки,

β – интенсивность спроса,

h – издержки содержания запасов.

Тогда оптимальные объёмы ресурсов $x_1^*, ...,$ x_n^* будут равны:

$$x_i^* = \frac{\alpha_i}{p_i} \left[\frac{\sqrt{2\beta \cdot I / h}}{K} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \right]^{1/\alpha}, \ i = 1, ..., n,$$

а соответствующие им минимальные издержки производства составят:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\frac{\sqrt{2\beta \cdot I / h}}{K} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \right]^{1/\alpha}.$$

Если для производственной функции $y = K x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ выполняется условие:

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \alpha = 1$ (что достаточно часто имеет место), то полученные формулы значительно упрощаются.

Пример. Рассмотрим применение полученных формул для решения конкретной задачи оптимизации производственных затрат на примере производства мяса птицы на какой-либо птицефабрике. Перечень используемых ресурсов содержит несколько наименований: корма, медикаменты и витамины, затраты на оплату труда, ГСМ и др. По имеющимся отчётным данным о количестве использованных ресурсов и произведённой продукции ($x_1,...,x_n, y$) можно построить производственную функцию как уравнение регрессии. Пусть, например, отбирая наиболее значимые факторы x, получили следующий вид функции:

$$y = 39{,}6x_1^{0{,}6}x_2^{0{,}36}x_3^{0{,}04}.$$

Таким образом, известны параметры производственной функции $K, \alpha_1,...,\alpha_n$. Предположим, что цены на ресурсы $x_1,...,x_3$ составляют: $p_1 = 350,\ p_2 = 520,\ p_3 = 250$ руб. соответственно за единицу ресурса. Произведя оценку спроса на продукцию данной птицефабрики (например, с помощью модели Уилсона либо по имеющимся данным о реализации продукции), определим величину $y^* = 1300$ тонн. Теперь можем найти,согласно выражений (5), минимальные объёмы ресурсов, необходимые для производства продукции объёма y^*:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i = 0{,}6 + 0{,}36 + 0{,}04 = 1.$$

$$x_1^* = \frac{\alpha_1}{p_1}\left[\frac{y^*}{K}\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\right]^{1/\alpha} =$$

$$= \frac{0{,}6}{350}\left[\frac{1300}{39{,}6}\left(\frac{350}{0{,}6}\right)^{0{,}6}\left(\frac{520}{0{,}36}\right)^{0{,}36}\left(\frac{250}{0{,}04}\right)^{0{,}04}\right]^{1} =$$

$$= \frac{0{,}6}{350}\cdot 29182{,}72 = 50.03.$$

$$x_2^* = \frac{\alpha_2}{p_2}\frac{y^*}{K}\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} = \frac{0{,}36}{520}\cdot 29182{,}72 = 20{,}2$$

$$x_3^* = \frac{\alpha_3}{p_3}\frac{y^*}{K}\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} = \frac{0{,}04}{250}\cdot 29182{,}72 = 4{,}7.$$

Таким образом, для рационализации затрат на ресурсы предприятию следует закупить 50 ед. ресурса 1, 20 ед. ресурса 2 и 5 ед. ресурса 3. При этом минимальная величина затрат на ресурсы составит:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = 29182{,}72 \text{ руб.}$$

Литература

1. Чекменёв, А. В. Обратная задача логистики / Информац. технологии и матем. моделирование (ИТММ-2008): матер. VII Всерос. научно-практ. конф. с межд. участием. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 2008. – Ч. 1. – С. 214 – 216.

Рецензент – В. В. Мешечкин – канд. физ.-мат. наук, доцент, ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет».