УДК 519.86

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ В МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ РЕГИОНА, ПОСТРОЕННОЙ В ФОРМЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛИ «МИР-3»

Е. С. Чернова

Работа посвящена построению математической модели устойчивого развития региона на основе глобальной модели «Мир-3», формализации его основных факторов с учетом теоретических предпосылок. Доказывается необходимый и достаточный признак оптимальности для построенной модели, приводится метод вычисления оптимальных траекторий.

The work is devoted to the building of the mathematical model of sustainable development of region based on the global model "World 3" and to the formalization of its major factors taking into consideration the theoretical preconditions. Necessary and sufficient optimality condition for the built model is proved, method of calculation of optimal trajectories is given.

Ключевые слова: устойчивое развитие, принцип Максима Понтрягина, глобальная модель Медоуза «Мир-3».

В данной статье приводится краткое описание модели устойчивого развития региона, построенной на основе глобальной модели Медоуза «Мир-3» [1, 2], а также дается алгоритм вычисления оптимальной траектории полученной модели.

Построение модели устойчивого развития региона проводилось исходя из необходимой предпосылки стабильности экономики во времени. Кроме того, считалось, что найдено такое начальное состояние системы, из которого можно осуществить ее перевод на «рельсы» устойчивого развития.

Модифицированную модель «Мир-3» будем записывать в конечно-разностной форме. Пусть $[0, T]$ – рассматриваемый (планируемый) период времени. Шаг по времени Δt примем равным одному году.

Для дальнейшего построения и исследования модели введем следующие упрощающие предположения.

1) Годовой выпуск продукции $I(t)$ в год t, население во втором и четвертом диапазонах возрастов $P_2(t)$ и $P_4(t)$, а также величины $B_2(t) = c_1 B_L(t)$ предельной фертильности и $B_1(t)$ желаемой фертильности будем считать известными и определяемыми из статистических данных путем прогнозирования.

2) Величины W_A стоимости ввода в эксплуатацию 1 га земли, I_X доли сельскохозяйственных инвестиций, идущей на разработку новых площадей, M_Z скорости деградации плодородия почвы, T_W времени регенерации плодородия почвы, Z_{IA} скорости генерации загрязнения, $T_Z^0 = c_Z T_Z$ характерного времени абсорбции загрязнения, смертности D_{Li}, $i = 1,\ldots,4$, ($D_{Li} \le 4/15$) в различных диапазонах возрастов будем принимать постоянными. В исходной модели [1-2] все они представлялись табличными функциями (за исключением Z_{IA}, в аргумент которой входили табличные функции), значения которых были получены в результате обработки статистических данных по развитым странам и отражали исторически сложившиеся, существующие на тот момент тенденции. В модели устойчивого развития неправомерно станет использование полученных для модели «Мир-3» зависимостей.

3) Будем считать, что скорость увеличения ранее возделанных земель, разрушенных почвенной эрозией, прямо пропорциональна количеству уже имеющихся таких земель с коэффициентом $\alpha = const$ ($\alpha \ge 0$), аналогично невосполнимые природные ресурсы убывают с постоянным темпом β ($0 \le \beta \le 1$), а темп урбанизации составляет γ.

4) Введем некоторый показатель здоровья населения σ, который будет прямо пропорционален уровню сервиса и обратно пропорционален уровню загрязнения, т. е. будет выражаться по формуле $\sigma = c\dfrac{x_2}{p x_6}$, где $\dfrac{x_2}{p}$ – уровень сервиса на душу населения, x_6 – уровень загрязнения.

При анализе проблематики устойчивого развития на гуманитарном уровне были выделены следующие основные требования к математической модели устойчивого развития [3]:

1) наличие социального, экономического, экологического секторов;

2) управляемость модели;

3) наличие векторного критерия качества.

В соответствии с этими требованиями будем преобразовывать глобальную модель «Мир-3». Наиболее простым и естественным механизмом управления развитием социально-экономической системы является распределение капиталовложений [3]. Поэтому в качестве управляющих воздействий будем брать доли инвестиций в различные отрасли, которые в модели Медоуза задавались либо в виде табличных функций (что заранее исключает возможность сознательного вмешательства человека в функционирование системы), либо не были учтены вообще. Это доли конечного продукта, распределяемые в промышленность, производство услуг, в производство пищи, на восстановление почвы, разрушенной эрозией, на восстановление невозобновляемых ресурсов, на ликвидацию загрязнений и на контроль за рождаемостью.

Что касается наличия трех подмоделей, то секторы капитала и сельского хозяйства модели «Мир-

3» мы будем относить к экономической подмодели, невозобновляемых ресурсов и загрязнения – к экологической, а демографии – к социальной.

Обозначим через u_1 и u_2 доли инвестиций соответственно в промышленность и производство услуг. Тогда уравнения для индустриального и сервисного капиталов запишутся в виде:

$$x_1(t+1) = x_1(t)\left(1 - \frac{1}{T_I}\right) + I(t)u_1(t), \tag{1}$$

$$x_2(t+1) = x_2(t)\left(1 - \frac{1}{T_S}\right) + I(t)u_2(t), \tag{2}$$

где $I(t)$ – выпуск промышленной продукции в год t, T_I – заданное постоянное время износа основных фондов промышленных предприятий, T_S – аналогичное постоянное время износа фондов сервисных предприятий.

В секторе сельского хозяйства обозначим через u_3 долю инвестиций в производство пищи и введем дополнительное управление u_4 – долю инвестиций на восстановление почвы, разрушенной эрозией. Тогда уравнения для уменьшения запаса невозделанных, но пригодных к обработке земель, и для разрушенных почвенной эрозией площадей соответственно примут вид:

$$x_3(t+1) = x_3(t) - \frac{I(t)u_3(t)I_X}{W_A}, \tag{3}$$

$$x_4(t+1) = x_4(t)(1+\alpha) - \frac{u_4(t)I(t)}{q_Э}, \tag{4}$$

где $q_Э = const$ – стоимость восстановления 1 га земли, I_X – доля от всех сельскохозяйственных инвестиций, идущая на разработку новых площадей, W_A – стоимость разработки 1 га земли.

В уравнениях для уровня невозобновляемых ресурсов и уровня загрязнений введем по одному дополнительному слагаемому, которые будут отвечать за восстановление ресурсов и ликвидацию загрязнений. Получим:

$$x_5(t+1) = x_5(t)(1-\beta) + \frac{I(t)u_5(t)}{q_R}, \tag{5}$$

$$x_6(t+1) = x_6(t)\left(1 - \frac{1}{T_Z^0}\right) + Z_{IA} - \frac{I(t)u_6(t)}{q_Z}, \tag{6}$$

где u_5 – доля инвестиций на восстановление ресурсов, u_6 – доля инвестиций на борьбу с загрязнениями, $q_R = const$ – стоимость восстановления единицы ресурса, $q_Z = const$ – стоимость очистки единицы загрязнения, Z_{IA} – скорость генерации загрязнения, T_Z^0 – характерное время абсорбции загрязнения.

И, наконец, в сектор демографии добавим одно управляющее воздействие u_7, которое будет обозначать долю инвестиций на контроль за рождаемостью. Тогда уравнение для населения в первом диапазоне возрастов запишется в виде:

$$x_7(t+1) = x_7(t)\left(1 - D_{L1} - \frac{1}{15}\right) + \frac{p_2(t)}{2\cdot 30}\left(B_2(t) + \frac{I(t)}{q_P}u_7(t)\left(B_1(t) - B_2(t)\right)\right), \tag{7}$$

где $q_P = const$ – максимальное количество средств, выделяемых на контроль за рождаемостью, D_{L1} – вероятность умереть индивидууму в первом диапазоне возрастов, множитель $\frac{I}{q_P}U_P \in [0,1]$ заменит множитель эффективности контроля над рождаемостью модели «Мир-3».

Вспомогательные уравнения модели будут содержать соответственно уравнение для естественного плодородия земель, для урбанизованной части ранее возделанных земель, для приносящих урожай возделанных площадей земли, для доли населения в третьем диапазоне возрастов, а также уравнение для населения:

$$y(t+1) = y(t)\left(1 - \frac{1}{T_W} - M_Z\right) + \frac{c_Y}{T_W}, \tag{8}$$

$$a_U(t+1) = a_U(t)(1-\gamma), \tag{9}$$

$$a(t+1) = a(t) - a_U(t) - x_3(t) - x_4(t), \tag{10}$$

$$p_3(t+1) = p_3(t)\left(1 - D_{L3} - \frac{1}{20}\right) + \frac{p_2(t)}{30}, \tag{11}$$

$$p(t) = x_7(t) + \sum_{i=2}^{4} p_i(t), \tag{12}$$

где T_W – время регенерации плодородия почвы,
M_Z – скорость деградации плодородия почвы,
c_Y – плодородие целинной земли.

Рассмотрим ограничения модели. Очевидно выполнение условия: $\sum_{j=1}^{7} u_j(t) + G_C \le 1$. (13)

Доли инвестиций ограничим снизу некоторой величиной $\mu_j(t) > 0$, обозначающей минимально возможную долю конечного продукта, направляемую в определенный сектор в каждый момент времени t. Также следует добавить очевидные условия неотрицательности загрязнения, площади земель, потенциально пригодных для обработки, и неположительности производной от R (т. е. восстановление ресурсов не заходит столь далеко, что дает их больше, чем природа). Таким образом, в модели будут присутствовать следующие ограничения:

$$u_j(t) \ge \mu_j(t),\ j = 1,...,7, \tag{14}$$

$$x_3(t) \ge 0,\ x_6(t) \ge 0,\ x_5(t+1) - x_5(t) \le 0, \tag{15}$$

$t = 0,...,T-1$.

Критериев качества в полученной задаче, на наш взгляд, должно быть, по крайней мере, три: в области экологии наиболее логичной является минимизация уровня загрязнений, в области экономики – минимизация затрат, а в области социологии в качестве функционала качества можно взять введенный показатель здоровья населения, который подлежит максимизации как совокупный показатель уровня сервиса и загрязнения. Таким образом, получаем три критерия:

$$\begin{cases} F_1 = \sum_{t=0}^{T-1} x_6(t) \to \min, \\ F_2 = \sum_{t=0}^{T-1} I(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{7} u_j(t) - G_C\right) \to \min, \\ F_3 = \sum_{t=0}^{T-1} c\dfrac{x_2(t)}{p(t)x_6(t)} \to \max. \end{cases} \tag{16}$$

Состояние системы в начальный момент времени задается соотношениями:

$$x_j(0) = x_j^0,\ j = 1,...,7,$$
$$a_U(0) = a_U^0,\ a(0) = a^0,\ \ y(0) = y^0, \tag{17}$$
$$p_i(0) = p_i^0, i = 2,3,4.$$

Пусть конечные состояния в момент времени T также определены:

$$x_j(T) = x_j^T,\ j = 1,...,7. \tag{18}$$

Полученная модель (1) – (18) является задачей оптимального управления со многими критериями качества (см. [4]). Здесь $x = (x_1,..., x_7)$ – вектор фазового состояния, (1) – (7) – уравнения движения, (8) – (12) – вспомогательные уравнения, (13) – (15) – ограничения на переменные и управляющие параметры, (16) – функционалы, характеризующие качество достижения цели управления, (17) – состояние системы в начальный момент времени, (18) – планируемое конечное состояние системы.

Для того чтобы получить необходимый признак оптимальности траектории в задаче (1) – (18), воспользуемся принципом максимума Понтрягина.

Обозначим

$$f^0 = \lambda_1 x_6(t) + \lambda_2 I(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{7} u_j(t) - G_C\right) - \\ -\lambda_3 c\frac{x_2(t)}{p(t)x_6(t)}, \tag{19}$$

$\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_7)^T$, $\beta = (\beta_1,...,\beta_7)^T$, $\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_7)^T$.

Построим множество $\varphi(U)$, являющиеся аналогом множества обобщенных скоростей (вектограммой) в задаче (1) – (18):

$$\varphi(U) = \{y : y = \beta u + \gamma, u \in U\}.$$

Поскольку множества $\varphi(U)$ выпуклы, функция $f^0(x,u)$ линейна по u, то оптимальное управление $u^*(\cdot)$ будет доставлять максимум функции Понтрягина:

$$H(x^*(t),\psi^*(t),u(t)) = -f^0(x^*(t),u(t)) + \\ +\langle \psi^*(t), \beta(t)u(t) + \gamma(t)\rangle \tag{20}$$

по $u(t) \in U(t)$ при $t = 0,...,T-1$, где $\langle \psi^*(t), \beta(t)u(t) + \gamma(t)\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $\psi^*(t)$ и $\beta(t)u(t) + \gamma(t)$.

Подставляя конкретный вид функции f^0 из (19) в (20), получим:

$$H = -\lambda_1 x^*_6 - \lambda_2 I\left(1 - \sum_{j=1}^{7} u_j - G_C\right) + \\ +\lambda_3 c\frac{x^*_2}{p^* x^*_6} + \sum_{j=1}^{7} \psi^*_j(\beta_j u_j + \gamma_j), \tag{21}$$

где значения $\psi^*(t)$ будут определяться из сопряженной системы:

$$\psi(t-1) = -\frac{\partial f^0(x(t),u^*(x(t),\psi(t)))}{\partial x(t-1)} + \\ +\alpha^T \psi(t),$$

$t = T, T-1,...,1$, $\psi(T) = 0$

по следующим формулам:

$$\psi^*_2(\tau) = -\lambda_3 c\sum_{t=\tau}^{T-1} \frac{\alpha_2^{t-\tau}}{p(t)x_6(t)},$$

$$\psi^*_6(\tau) = -\sum_{t=\tau}^{T-1} \alpha_6^{t-\tau}\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_3 c}{p(t)x_6^2(t)}\right),$$

$$\psi^*_7(\tau) = -\lambda_3 c\sum_{t=\tau}^{T-1} \frac{\alpha_7^{t-\tau} x_2(t)}{p^2(t)x_6(t)},$$

а $\psi^*_j \equiv 0$ при $j = 1,3,4,5$.

Функция H будет линейна по $u(t) = u(x(t),\psi(t))$, $t = 0,...,T-1$, поэтому максимума она будет достигать на границе множества $U(t)$. Конкретные значения управлений $u_j^*(t)$ можно найти путем перебора вершин множества $U(t)$ при помощи симплекс-метода, причем введение в базис то или иной вершины на каждом шаге будет зависеть от значений величин $\lambda_2 I(t)$, $\lambda_2 I(t) + \psi_2(t)\beta_2(t)$, $\lambda_2 I(t) + \psi_6(t)\beta_6(t)$, $\lambda_2 I(t) + \psi_7(t)\beta_7(t)$.

Поскольку знаки величин $\psi_2\beta_2$ и $\psi_6\beta_6$ определены исходя из смысла задачи ($\psi_2\beta_2 \le 0$, $\psi_6\beta_6 \ge 0$), а знак $\psi_7\beta_7$ будет зависеть от значений предельной и желаемой фертильности в каждый момент $t = 0,...,T-1$, оптимальные значения управляющих параметров будут выбираться в соответствии с одним из следующих случаев:

1) $\psi_7\beta_7 < \psi_2\beta_2 < \psi_6\beta_6$, $\lambda_2 I > -\psi_2\beta_2$;
2) $\psi_7\beta_7 < \psi_2\beta_2 < \psi_6\beta_6$, $\lambda_2 I < -\psi_2\beta_2$;
3) $\psi_2\beta_2 < \psi_6\beta_6 < \psi_7\beta_7$, $\lambda_2 I > -\psi_2\beta_2$;
4) $\psi_2\beta_2 < \psi_6\beta_6 < \psi_7\beta_7$, $\lambda_2 I < -\psi_2\beta_2$; (22)
5) $\psi_2\beta_2 < \psi_7\beta_7 < \psi_6\beta_6$, $\lambda_2 I < -\psi_2\beta_2$, $\psi_7\beta_7 > 0$;
6) $\psi_2\beta_2 < \psi_7\beta_7 < \psi_6\beta_6$, $\lambda_2 I < -\psi_2\beta_2$, $\psi_7\beta_7 < 0$;
7) $\psi_2\beta_2 < \psi_7\beta_7 < \psi_6\beta_6$, $\lambda_2 I > -\psi_2\beta_2$, $\psi_7\beta_7 > 0$;
8) $\psi_2\beta_2 < \psi_7\beta_7 < \psi_6\beta_6$, $\lambda_2 I > -\psi_2\beta_2$, $\psi_7\beta_7 < 0$.

Ввиду громоздкости выкладок при вычислении оптимального управления они в данной статье приводиться не будут. Проведя все итерации, найдем оптимальные значения управляющих параметров $u^*(t)$. В результате выполнения всех вычислений будет найдено оптимальное распределение капиталовложений в каждый сектор. Очевидно, это вектор $u^* = (u^*_1,...,u^*_7)$, являющийся вершиной многогранника допустимых решений.

Перепишем систему уравнений (1) – (7) в унифицированном виде:

$$x_j(t+1) = \alpha_j x_j(t) + \beta_j(t) u_j(t) + \gamma_j(t),\ j = 1,...,7 . \quad (23)$$

Вектор x найдем из уравнения (23), подставляя полученные $u^*(t)$:

$$x_j(\tau) = (\alpha_j)^\tau x_j^0 + \sum_{t=0}^{\tau-1} \left[(\alpha_j)^{\tau-t-1} (\beta_j(t) u_j(t) + \gamma_j(t)) \right] \quad (24)$$

Обозначив, $\alpha_8 = 1 - D_{L3} - \frac{1}{20}$, $\gamma_8 = \frac{1}{30}$, найдем выражение для p_3:

$$p_3(\tau) = (\alpha_8)^\tau p_3^0 + \gamma_8 \sum_{t=0}^{\tau-1} (\alpha_8)^{\tau-t-1} p_2(t) , \quad (25)$$

откуда сможем получить значение p по формуле (12).

Поскольку рассматриваемая система (1) – (7) является линейной (как по x, так и по u), для нее дискретный принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности [5]. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Для того чтобы управление $u^*(t)$ было оптимальным в задаче (1) – (18), необходимо и достаточно, чтобы оно доставляло максимум функции Понтрягина (21):

$$-\lambda_1 x^*_6(t) - \lambda_2 I(t) \left(1 - \sum_{j=1}^{7} u^*_j(t) - G_C \right) +$$
$$+ \lambda_3 c \frac{x^*_2(t)}{p^*(t) x^*_6(t)} + \sum_{j=1}^{7} \psi^*_j(t)(\beta_j(t) u^*_j(t) + \gamma_j(t)) =$$
$$= \max_{u \in U(t)} \left(-\lambda_1 x^*_6(t) - \lambda_2 I(t) \left(1 - \sum_{j=1}^{7} u_j(t) - G_C \right) + \right.$$
$$\left. + \lambda_3 c \frac{x^*_2(t)}{p^*(t) x^*_6(t)} + \sum_{j=1}^{7} \psi^*_j(t)(\beta_j(t) u_j(t) + \gamma_j(t)) \right)$$

при $t = 0,...,T-1$, где $\psi^*_j(t)$ определяются по формулам:

$$\psi^*_2(\tau) = -\lambda_3 c \sum_{t=\tau}^{T-1} \frac{\alpha_2^{t-\tau}}{p(t) x_6(t)} ,$$

$$\psi^*_6(\tau) = -\sum_{t=\tau}^{T-1} \alpha_6^{t-\tau} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_3 c}{p(t) x_6^2(t)} \right) ,$$

$$\psi^*_7(\tau) = -\lambda_3 c \sum_{t=\tau}^{T-1} \frac{\alpha_7^{t-\tau} x_2(t)}{p^2(t) x_6(t)} ,$$

$$\psi^*_j \equiv 0 ,\ j = 1,3,4,5 .$$

Исследования подвержены грантам «РФФИ - Кузбасс» № 07-01-96022.

Литература

1. Егоров, В. А. Математические модели глобального развития / В. А. Егоров, Ю. Н. Каллистов, В. Б. Митрофанов, А. А. Пионтковский – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 192 с.
2. Медоуз, Д. Х. Пределы роста [пер. с англ.] / Донелла Х. Медоуз, Деннис Л. Медоуз, Йорген Рэндерс, Вильям III Беренс / предисл. Г. А. Ягодина. – М.: изд-во МГУ. – 1991. – 208 с.
3. Данилов, Н. Н. Устойчивое развитие: методология математических исследований / Н. Н. Данилов // Вестник КемГУ «Математика». – Кемерово, 2000. – Вып. 4. – С. 5 – 15.
4. Матросов, В. М. Моделирование и прогнозирование показателей социально-экономического развития области / В. М. Матросов, В. Б. Головченко, С. И. Носков. – Новосибирск: Наука, 1991. – 144 с.
5. Громов, Ю. Ю. Системный анализ в информационных технологиях: учеб. пособие / Ю. Ю. Громов, Н. А. Земской, А. В. Лагутин, О. Г. Иванова, В. М. Тютюнник. – 2-е изд., стереотип. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 176 с.
6. Болтянский, В. Г. Оптимальное управление дискретными системами / В. Г. Болтянский. – М.: Наука, 1973. – 448 с.

Рецензент – В. В. Мешечкин – доцент кафедры математической кибернетики КемГУ, ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет».