

УДК 519.6

О ТРЕУГОЛЬНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВАРИАЦИОННОЙ ОПТИМИЗАЦИЕЙ ПАРАМЕТРОВ

Н. А. Гейдаров, Ю. Н. Захаров

В настоящей работе рассмотрены градиентные итерационные методы решения СЛАУ и СБАУ, которые в линейном случае являются градиентным аналогом SOR, а в нелинейном – именно методами последовательной верхней релаксации. В этих итерационных схемах постоянный итерационный параметр, как в методе SOR, заменяется диагональной матрицей параметров. Элементы этой матрицы выбираются из последовательных минимумов функционалов погрешности.

SOR method is used for solution of system linear algebraic equations successfully (SLAE). Cause: both simplicity of realization and high rate of convergence in case of precise assignment of optimal iteration parameter. Using of nonoptimal parameter appreciably decrease rate of convergence of SOR method.

Iteration methods of solution of SLAE and system bilinear algebraic equations (SBAE) have been considered in this paper. These methods are SOR in linear case and - successive over and block relaxation method in nonlinear case. Constant iteration parameter is replaced by diagonal matrix of parameters in these iteration schemes.

Ключевые слова: метод ПБР, численные методы, итерационные методы, решение систем нелинейных уравнений.

Одними из популярных методов решения СЛАУ с положительно определенной и симметричной матрицей являются методы релаксации (методы Зейделя, последовательной верхней релаксации (ПВР), попеременно-треугольный и т. п. [1]). Это обусловлено несколькими причинами. Во-первых, эти методы фактически являются явными, т. е. для их реализации требуется обращение треугольных матриц. Во-вторых, при точном задании итерационного параметра эти методы сходятся достаточно быстро. Например, метод ПВР может сходиться со скоростью чебышевского итерационного метода [2]. К сожалению, не всегда удается получить точное значение оптимального итерационного параметра, а использование приближенного значения этого параметра может приводить к существенному снижению скорости сходимости. Поэтому и область применимости треугольных методов, несмотря на все их достоинства, недостаточно широка. При этом существует класс итерационных методов, не требующих знаний априорной информации, например о границах спектра матрицы решаемой системы. Это, например, – схемы с вариационной оптимизацией параметров, когда оптимальные итерационные параметры вычисляются на каждом итерационном шаге из условия минимума квадратичного функционала. К сожалению, выбор итерационного параметра в методах релаксации из условия минимума квадратичного функционала, как в градиентных методах, крайне затруднителен из-за его нелинейного вхождения в итерационную схему. Настоящая работа посвящена градиентному обобщению метода последовательной верхней релаксации, в

случае решения СЛАУ, и построению метода ПБР для решения систем билинейных уравнений.

1. В вещественном евклидовом пространстве H_m размерности m рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений: $Au = f$, (1) где $A = (a_{ij})$ – квадратная положительно определенная симметричная матрица размерности m , $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ – неизвестный и известный векторы пространства H_m .

Представим матрицу в виде $A = \Lambda + L + U$, где $\Lambda = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{mm})$,

L – строго нижнетреугольная матрица,

U – строго верхнетреугольная матрица.

Для решения системы (1) рассмотрим следующий итерационный метод:

$$\Lambda u^{n+1} = \Lambda u^{n+k/m} - \tau_{k+1} z_{k+1}^{n+(k+1)/m} - \dots - \tau_m z_m^{n+1},$$

$$k = 1, \dots, m; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

$$\Lambda u^{n+k/m} = \Lambda u^n - \tau_1 z_1^{n+1/m} - \tau_2 z_2^{n+2/m} - \dots - \tau_k z_k^{n+k/m},$$

где u^0 – заданный произвольный вектор,

$$z_k^{n+k/m} = (0, \dots, 0, r_k^{n+k/m}, 0, \dots, 0)^T,$$

$$r_k^{n+k/m} = (Au^{n+k/m} - f)_k - k\text{-я компонента вектора } r^{n+k/m} = Au^{n+k/m} - f.$$

Покомпонентно схема (2) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_{11}u_1^{n+1} &= a_{11}u_1^n - \tau_1(a_{11}u_1^n + a_{22}u_2^n \dots a_{1m}u_m^n - f_1) \\
a_{22}u_2^{n+1} &= a_{22}u_2^n - \tau_2(a_{21}u_1^{n+1} + a_{22}u_2^n + \dots + a_{2m}u_m^n - f_2) \\
&\vdots \\
a_{kk}u_k^{n+1} &= a_{kk}u_k^n - \tau_k(a_{k1}u_1^{n+1} + \dots + a_{k,k-1}u_{k-1}^{n+1} + a_{kk}u_k^n + \dots + a_{km}u_m^n - f_k) \\
&\vdots \\
a_{mm}u_m^{n+1} &= a_{mm}u_m^n - \tau_m(a_{m1}u_1^{n+1} + \dots + a_{m,m-1}u_{m-1}^{n+1} + a_{mm}u_m^n - f_m).
\end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, итерационный метод можно записать в матричном виде:

$$\tau^{-1}(\Lambda + \tau L)(u^{n+1} - u^n) + Au^n = f, \tag{4}$$

где $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tau_m \end{pmatrix}$ – диагональная матрица.

Если все элементы матрицы τ равны, то (4) является схемой последовательной верхней релаксации, если же нет – схемой ПВР с переменным итерационным шагом.

Пусть $D = D^* > O$ – квадратная самосопряженная положительно определенная матрица размерности m . Введем пространство H_D со скалярным произведением $(x, y)_D = (Dx, y)$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(Dx, x)}$.

Если u – точное решение системы (1), то погрешность $v^n = D^{1/2}(u^n - u)$ схемы (2) имеет вид:

$$v^{n+1} = v^n - \sum_{k=1}^m \tau D^{1/2} \Lambda^{-1} z_k^{n+k/m}.$$

Введем следующие обозначения:

$$v^{n+k/m} = v^n - \sum_j^k \tau_j D^{1/2} \Lambda^{-1} z_j^{n+j/m},$$

$$k = 1, \dots, m.$$

Выберем τ_1 из условия минимума $\|v^{n+1/m}\|$.

Тогда имеем:

$$\min_{\tau_1} \|v^{n+1/m}\|^2 = \min_{\tau_1} \|v^n - \tau_1 D^{1/2} \Lambda^{-1} z_1^{n+1/m}\|^2$$

достигается при $\tau_1 = \frac{(v^n, D^{1/2} \Lambda^{-1} z_1^{n+1/m})}{\|D^{1/2} \Lambda^{-1} z_1^{n+1/m}\|}$, и в

этом случае:

$$\begin{aligned}
\|v^{n+1/m}\|^2 &= \\
&= \left(1 - \frac{(v^n, D^{1/2} \Lambda^{-1} z_1^{n+1/m})^2}{\|D^{1/2} \Lambda^{-1} z_1^{n+1/m}\|^2 \|v^n\|^2} \right) \|v^n\|^2 = \rho_{1n}^2 \|v^n\|^2,
\end{aligned}$$

где $\rho_{1n}^2 < 1$. Таким же образом выбираем τ_2 из условия минимума:

$$\|v^{n+2/m}\|^2 = \|v^{n+1/m} - \tau_2 D^{1/2} \Lambda^{-1} z_2^{n+2/m}\|^2.$$

Получим:

$$\begin{aligned}
\|v^{n+2/m}\| &= \rho_{2n}^2 \|v^{n+1/m}\| = \rho_{2n}^2 \rho_{1n}^2 \|v^n\|, \\
\text{где } \rho_{2n}^2 &= 1 - \frac{(v^{n+1/m}, D^{1/2} \Lambda^{-1} z_2^{n+2/m})^2}{\|D^{1/2} \Lambda^{-1} z_2^{n+2/m}\|^2 \|v^{n+1/m}\|^2} < 1.
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляются $\tau_3, \dots, \tau_m$, и окончательно будем иметь:

$$\tau_i = \frac{(v^{n+(i-1)/m}, D^{1/2} \Lambda^{-1} z_i^{n+i/m})}{\|D^{1/2} \Lambda^{-1} z_i^{n+i/m}\|}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{5}$$

$$\|v^{n+1}\|^2 = \rho_n^2 \|v^n\|^2, \quad \rho_n = \prod_{i=1}^m \rho_{in}, \tag{6}$$

где

$$\rho_{in}^2 = 1 - \frac{(v^{n+(i-1)/m}, D^{1/2} \Lambda^{-1} z_i^{n+i/m})^2}{\|D^{1/2} \Lambda^{-1} z_i^{n+i/m}\|^2 \|v^{n+(i-1)/m}\|^2} < 1, \tag{7}$$

$$i = 1, \dots, n.$$

2. Оказалось, что, аналогично предыдущему пункту, можно построить градиентную схему последовательной верхней релаксации для решения систем билинейных уравнений.

Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
a_{11}(u)u_1 + a_{12}(u)u_2 + \dots + a_{1m}(u)u_m &= f_1 \\
a_{21}(u)u_1 + a_{22}(u)u_2 + \dots + a_{2m}(u)u_m &= f_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$a_{m1}(u)u_1 + a_{m2}(u)u_2 + \dots + a_{mm}(u)u_m = f_m, \tag{8}$$

которая в матричном виде записывается $A(u)u = f$. Далее будем полагать, что

$$a_{ii}(u) \neq 0 \tag{9}$$

для всех u . Пусть элементы матрицы этой системы зависят от неизвестного линейно, т.е. представляют собой линейные комбинации компонент вектора u :

$$a_{ij}(u) = \sum_p a_{ij}^p u_{k_{ij}^p} + a_{ij}^0, \quad (10)$$

причем

$$A_1(u) = (a_{ij}^I(u)), \quad a_{ij}^I(u) = \sum_p a_{ij}^p u_{k_{ij}^p}; \quad (11)$$

$$A_2 = (a_{ij}^0), \quad a_{ij}^0 = a_{ij}^0; A(u) = A_1(u) + A_2,$$

где $u_{k_{ij}^p}$ – одна из компонент вектора

$$u = (u_1, \dots, u_m)^T,$$

$$1 \leq k_{ij}^p \leq m, 1 \leq i, j, p \leq m,$$

$$a_{ij}^p, a_{ij}^0 \text{ – некоторые числа.}$$

Запишем матрицу $A(u)$ системы (8) как сумму двух матриц $A(u) = S(u) + T(u)$ таким образом, что:

$$S(u) = (s_{ij}(u)) \quad s_{ij}(u) = \sum_l a_{ij}^l u_{k_{ij}^l} |k_{ij}^l \geq j$$

$$T(u) = (t_{ij}(u)) \quad t_{ij}(u) = \sum_r a_{ij}^r u_{k_{ij}^r} |k_{ij}^r < j$$

$$a_{ij}(u) = s_{ij}(u) + t_{ij}(u).$$

Выпишем разложение матриц $S(u)$ и $T(u)$ на нижнетреугольную, верхнетреугольную и диагональную части.

$$S(u) = S_L(u) + S_\Lambda(u) + S_U(u).$$

$$T(u) = T_L(u) + T_\Lambda(u) + T_U(u).$$

Очевидно:

$$L(u) = S_L(u) + T_L(u),$$

$$\Lambda(u) = S_\Lambda(u) + T_\Lambda(u),$$

$$U(u) = S_U(u) + T_U(u).$$

Получим:

$$A(u) = L(u) + \Lambda(u) + U(u) =$$

$$= S_L(u) + T_L(u) + S_\Lambda(u) +$$

$$+ T_\Lambda(u) + S_U(u) + T_U(u).$$

Аналогично пункту 1 для решения системы (8) рассмотрим итерационный метод:

$$\begin{aligned} [S_\Lambda(u^n) + T_\Lambda(u^{n+1})]u^{n+1} &= \\ &= [S_\Lambda(u^n) + T_\Lambda(u^{n+1})]u^{n+k/m} - \\ &- \tau_{k+1}z_{k+1}^{n+(k+1)/m} - \dots - \tau_m z_m^{n+1}, \\ k &= 1, \dots, m; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ [S_\Lambda(u^n) + T_\Lambda(u^{n+1})]u^{n+k/m} &= \\ &= [S_\Lambda(u^n) + T_\Lambda(u^{n+1})]u^n - \\ &- \tau_1 z_1^{n+1/m} - \tau_2 z_2^{n+2/m} - \dots - \tau_k z_k^{n+k/m}, \end{aligned} \quad (12)$$

где u^0 – заданный произвольный вектор,

$$z_k^{n+k/m} = (0, \dots, 0, r_k^{n+k/m}, 0, \dots, 0)^T,$$

$r_k^{n+k/m}$ – k -я компонента вектора.

$$\begin{aligned} r^{n+k/m} &= [S_L(u^n) + \\ &+ T_L(u^{n+1}) + S_\Lambda(u^n) + T_\Lambda(u^{n+1}) + \\ &+ S_U(u^n) + T_U(u^{n+1})]u^{n+k/m} - f, \end{aligned} \quad (13)$$

который является вектором невязки на промежуточном шаге $n + k/m$.

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$L(u^n, u^{n+1}) = S_L(u^n) + T_L(u^{n+1}),$$

$$\Lambda(u^n, u^{n+1}) = S_\Lambda(u^n) + T_\Lambda(u^{n+1}),$$

$$U(u^n, u^{n+1}) = S_U(u^n) + T_U(u^{n+1}),$$

$$A(u^n, u^{n+1}) = L(u^n, u^{n+1}) +$$

$$+ \Lambda(u^n, u^{n+1}) + U(u^n, u^{n+1}).$$

Зависимость матриц от двух параметров показывает, что некоторые компоненты данных матриц содержат u^n , а другие u^{n+1} . Как следует из обозначений:

$$L(u^n, u^n) = L(u^n), \quad \Lambda(u^n, u^n) = \Lambda(u^n),$$

$$U(u^n, u^n) = U(u^n), \quad A(u^n, u^n) = A(u^n).$$

Также, из соображений простоты записи, обозначим $a(u^n, u^{n+1}) = s(u^n) + t(u^{n+1})$,

$$a(u^n, u^n) = a(u^n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda(u^n, u^{n+1})u^{n+1} &= \Lambda(u^n, u^{n+1})u^n - \\ &- \tau \left(L(u^n, u^{n+1})u^{n+1} + \right. \\ &\left. + (\Lambda(u^n, u^{n+1}) + U(u^n, u^{n+1}))u^n - f \right), \end{aligned}$$

где $\tau = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_m)$.

Имеем далее:

$$\begin{aligned} (\Lambda(u^n, u^{n+1}) + \tau L(u^n, u^{n+1}))u^{n+1} &= \\ &= \Lambda(u^n, u^{n+1})u^n - \\ &- \tau((\Lambda(u^n, u^{n+1}) + U(u^n, u^{n+1}))u^n - f); \\ (\Lambda(u^n, u^{n+1}) + \tau L(u^n, u^{n+1}))(u^{n+1} - u^n) &= \\ &= -\tau(L(u^n, u^{n+1}) + \Lambda(u^n, u^{n+1}) + U(u^n, u^{n+1}) - f)u^n. \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} (\Lambda(u^n, u^{n+1}) + \tau L(u^n, u^{n+1}))(u^{n+1} - u^n) &+ \\ &+ \tau(A(u^n, u^{n+1})u^n - f) = 0. \end{aligned}$$

Или окончательно:

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(\Lambda(u^n, u^{n+1}) + \tau L(u^n, u^{n+1}))(u^{n+1} - u^n) &+ \\ &+ (A(u^n, u^{n+1})u^n - f) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Покомпонентно запись (13) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_{11}(u^n)u_1^{n+1} &= a_{11}(u^n)u_1^n - \tau_1(a_{11}(u^n)u_1^n + \dots + a_{1m}(u^n)u_m^n - f_1) \\
 a_{22}(u^n, u^{n+1})u_2^{n+1} &= a_{22}(u^n, u^{n+1})u_2^n - \tau_2(a_{21}(u^n, u^{n+1})u_1^{n+1} + \\
 &\quad + a_{22}(u^n, u^{n+1})u_2^n + \dots + a_{2m}(u^n, u^{n+1})u_m^n - f_2) \\
 a_{33}(u^n, u^{n+1})u_3^{n+1} &= a_{33}(u^n, u^{n+1})u_3^n - \tau_3(a_{31}(u^n, u^{n+1})u_1^{n+1} + \\
 &\quad + a_{32}(u^n, u^{n+1})u_2^{n+1} + a_{33}(u^n, u^{n+1})u_3^n + \dots + a_{3m}(u^n, u^{n+1})u_m^n - f_3) \\
 &\vdots \\
 a_{mm}(u^n, u^{n+1})u_m^{n+1} &= a_{mm}(u^n, u^{n+1})u_m^n - \tau_m(a_{m1}(u^n, u^{n+1})u_1^{n+1} + \dots + \\
 &\quad + a_{m,m-1}(u^n, u^{n+1})u_{m-1}^{n+1} + a_{mm}(u^n, u^{n+1})u_m^n - f_m).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Определим матрицу оптимального параметра τ в схеме (12). Формулу (13) можно выписать в виде:

$$r^{n+k/m} = A(u^n, u^{n+1})u^{n+k/m} - f.$$

На k -м промежуточном шаге зависимость матриц A, L, Λ, U от двух параметров u^n, u^{n+1} эквивалентна зависимости от $u^{n+k/m}$:

$$r^{n+k/m} = A(u^{n+k/m})u^{n+k/m} - f.$$

Также

$$\begin{aligned}
 \Lambda(u^{n+k/m})u^{n+k/m} &= \\
 &= \Lambda(u^{n+k/m})u^{n+(k-1)/m} + \tau_k z_k^{n+k/m},
 \end{aligned}$$

откуда

$$u^{n+k/m} = u^{n+(k-1)/m} + \tau_k \Lambda^{-1}(u^{n+k/m})z_k^{n+k/m},$$

что имеет смысл в силу (9).

$$\begin{aligned}
 r^{n+i/m} &= A(u^{n+(i-1)/m} + \\
 &+ \tau_k \Lambda^{-1}(u^{n+i/m})z_i^{n+i/m})(u^{n+(i-1)/m} + \\
 &+ \tau_k \Lambda^{-1}(u^{n+i/m})z_k^{n+i/m}) - f, \quad i=1, 2, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$r^{n+m/m} = r^{n+1} = A(u^{n+1})u^{n+1} - f \quad - \text{ невязка}$$

схемы (12).

Далее, используя (11):

$$r^{n+i/m} = r^{n+(i-1)/m} + \tau_i F_{1n}^{(i)} + (\tau_i)^2 F_{2n}^{(i)}, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_{1n}^{(i)} &= A(u^{n+(i-1)/m})\Lambda^{-1}(u^{n+i/m})z_i^{n+i/m} + \\
 &+ A_1(\Lambda^{-1}(u^{n+i/m})z_i^{n+i/m})u^{n+(i-1)/m},
 \end{aligned}$$

$$F_{2n}^{(i)} = A_1(\Lambda^{-1}(u^{n+i/m})z_i^{n+i/m})\Lambda^{-1}(u^{n+i/m})z_i^{n+i/m}.$$

Из (16) имеем:

$$\begin{aligned}
 \|r^{n+i/m}\|^2 &= \|r^{n+(i-1)/m}\|^2 + \sum_{S=1}^4 (\tau_i)^S \theta_{sn}^{(i)} = \\
 &= \|r^{n+(i-1)/m}\|^2 - \Phi_{n+1}(\tau_i), \quad i=1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь:

$$\theta_{1n}^{(i)} = 2(r^{n+(i-1)/m}, F_{1n}^{(i)}),$$

$$\theta_{2n}^{(i)} = \|F_{1n}^{(i)}\|^2 + 2(r^{n+(i-1)/m}, F_{2n}^{(i)}),$$

$$\theta_{3n}^{(i)} = 2(F_{1n}^{(i)}, F_{2n}^{(i)}),$$

$$\theta_{4n}^{(i)} = \|F_{2n}^{(i)}\|^2.$$

Так как $\theta_{4n}^{(i)} \geq 0$, то график зависимости

$\|r^{n+i/m}\|^2$ от τ_i имеет вид, показанный на рис. 1.

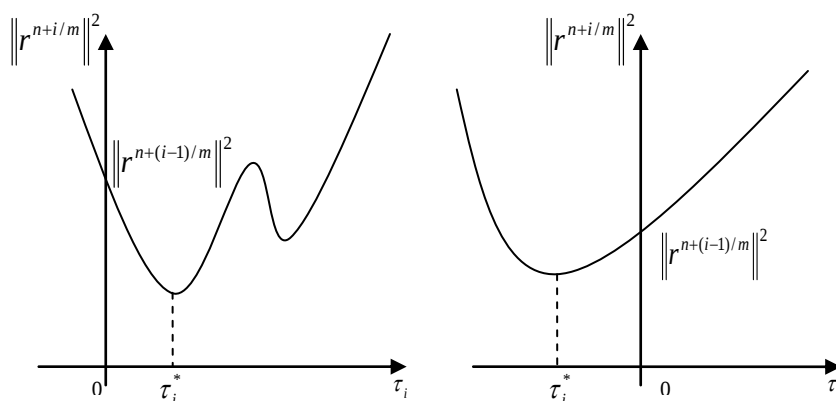


Рис. 1.

Таким образом, у полинома (17) или два, или один минимум. При этом глобальный минимум величины $r^{n+i/m}$ не превосходит $r^{n+(i-1)/m}$.

Выберем τ_i из условия минимума нормы вектора невязки $\|r^{n+i/m}\|$. Тогда τ_i находится как решение уравнения:

$$\sum_{q=1}^4 q(\tau_i)^{q-1} \theta_{qn}^{(i)} = 0 \quad (18)$$

по явным формулам Кардано. Пусть τ_i^* – решение (18), отвечающее глобальному минимуму (17). Подставив этот корень в (17), получим:

$$\begin{aligned} \|r^{n+i/m}\|^2 &= \|r^{n+(i-1)/m}\|^2 - \\ &- \Phi_{n+1}^{(i)} = \rho_{(i)}^2 \|r^{n+(i-1)/m}\|^2, \\ \rho_{(i)}^2 &= 1 - \Phi_{n+1}^{(i)} / \|r^{n+(i-1)/m}\|^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Phi_{n+1}^{(i)} = \Phi_{n+1}(\tau_i^*) \geq 0$.

Таким образом,

$$\|r^{n+i/m}\| \leq \|r^{n+(i-1)/m}\| \leq \dots \leq \|r^{n+0/m}\| = \|r^n\|,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и, в силу ограниченности $\|r^0\|$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|r^n\| = \|r^\infty\| < \infty.$$

Следует отметить, что $\Phi_{n+1}^{(i)} = 0$ только в случае $\tau_i^* = 0$, а это возможно, если:

$$\theta_{1n}^{(i)} = 2(r^{n+(i-1)/m}, F_{1n}^{(i)}) = 0. \quad (20)$$

Подробнее о методе и других способах выбора элементов матрицы τ см. [3].

Литература

1. Вазов, В. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных / В. Вазов, Дж. Форсайт – М.: Иностранная литература, 1963. – 488 с.
2. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
3. Захаров, Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики / Ю. Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.

Рецензент – Е. Л. Счастливцев, Институт усовершенствования учителей СО РАН.