

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НИЖШИХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ
СЛОИСТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
НАГРУЖЕННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ**

А. Н. Андреев, Е. В. Тайлакова

Исследованы собственные частоты круговой цилиндрической слоистой композитной оболочки, нагруженной статическим осесимметричным внешним давлением.

Eigen frequencies problem of a circular cylindrical multilayered composite shell loading external static axial symmetry pressure is investigated.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, краевая задача, оболочка, композит, устойчивость, колебания, частота, инвариантное погружение.

1. Общие соотношения

Рассмотрим слоистую цилиндрическую композитную оболочку радиуса R и толщины h , каждый слой которой армирован волокнами постоянного сечения либо в осевом, либо в окружном направлении. В качестве отсчетной поверхности принимаем внутреннюю поверхность оболочки. В теле оболочки вводим цилиндрическую систему координат x, φ, z , где x – расстояние, отсчитываемое вдоль образующей от края оболочки ($0 \leq x \leq l$), φ – угловая координата ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), z – поперечная координата ($0 \leq z \leq h$). Уравнения поверхностей раздела j -го и $(j+1)$ -го слоев ($j=1, 2, \dots, m-1$) запишутся в виде:

$$z = h_j \quad (0 = h_0 < h_1 < \dots < h_{m-1} < h_m = h). \quad (1.1)$$

Примем, что оболочка нагружена осесимметричным внешним давлением

$$\sigma_{zz}^h = -P_0 P(x), \quad (1.2)$$

где P_0 – постоянный множитель, имеющий размерность напряжения, $P(x)$ – функция осевой координаты. Для описания механического поведения оболочки под нагрузкой используем нелинейную неклассическую динамическую систему уравнений [1, 2], позволяющую учесть поперечные сдвиговые деформации и включающую в себя следующие группы зависимостей ($k=1, 2, \dots, m$ – порядковый номер слоя):

– соотношения упругости, записанные для k -го

слоя

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= a_{11}^k \varepsilon_{xx}^k + a_{12}^k \varepsilon_{\phi\phi}^k, \\ \sigma_{\phi\phi}^k &= a_{12}^k \varepsilon_{xx}^k + a_{22}^k \varepsilon_{\phi\phi}^k, \\ \sigma_{x\phi}^k &= \sigma_{\phi x}^k = a_{33}^k \gamma_{x\phi}^k, \\ \tau_{xz}^k &= G_{13}^k \gamma_{xz}^k, \quad \tau_{\phi z}^k = G_{23}^k \gamma_{\phi z}^k; \end{aligned} \quad (1.3)$$

– закон распределения физических составляющих вектора перемещений по толщине пакета слоев (здесь и всюду в дальнейшем отброшены слагаемые порядка h/R как величины, малые по сравнению с 1)

$$\begin{aligned} v_x^k &= u_x - z \frac{\partial w}{\partial x} + \mu_{11}^k(z) \pi_x, \\ v_\phi^k &= u_\phi - \frac{z}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \mu_{22}^k(z) \pi_{\phi x}, \\ v_z^k &= w(x, \phi); \end{aligned} \quad (1.4)$$

– соотношения деформации – перемещения

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^k &= \frac{f'(z) \pi_x}{G_{13}^k}, \quad \gamma_{\phi z}^k = \frac{f'(z) \pi_\phi}{G_{23}^k}, \quad \varepsilon_{zz}^k = 0, \\ \varepsilon_{xx}^k &= \frac{\partial u_x}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{11}^k(z) \frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_{\phi\phi}^k &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \mu_{22}^k(z) \frac{\partial \pi_\phi}{\partial \phi} + w \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x\phi}^k &= \frac{\partial u_\phi}{\partial x} - 2 \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} + \mu_{22}^k(z) \frac{\partial \pi_\phi}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \phi} + \mu_{11}^k(z) \frac{\partial \pi_x}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \phi}; \end{aligned}$$

– выражения физических составляющих обобщенных усилий и моментов в отсчетной поверхности оболочки через составляющие напряжений в ее слоях

$$\begin{aligned} [T_{xx}, M_{xx}, S_{xx}] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx}^k [1, z, \mu_{11}^k(z)] dz, \\ [T_{x\phi}, M_{x\phi}, S_{x\phi}] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{x\phi}^k [1, z, \mu_{22}^k(z)] dz, \\ [T_{\phi x}, M_{\phi x}, S_{\phi x}] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\phi x}^k [1, z, \mu_{11}^k(z)] dz, \\ [T_{\phi\phi}, M_{\phi\phi}, S_{\phi\phi}] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\phi\phi}^k [1, z, \mu_{22}^k(z)] dz, \\ [Q_x, Q_\phi] &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\frac{\tau_{xz}^k}{G_{13}^k}, \frac{\tau_{\phi z}^k}{G_{23}^k} \right] f'(z) dz; \end{aligned} \quad (1.6)$$

– представления интегральных характеристик даламберовых массовых сил инерции (точка – знак частного дифференцирования по времени t)

$$\begin{aligned} [\ddot{X}_x, \ddot{Y}_x, \ddot{Z}_x] &= \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \left(\ddot{u}_x - z \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + \mu_{11}^k(z) \ddot{\pi}_x \right) [1, z, \mu_{11}^k(z)] dz, \\ [\ddot{X}_\phi, \ddot{Y}_\phi, \ddot{Z}_\phi] &= \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \left(\ddot{u}_\phi - \frac{z}{R} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \phi} + \mu_{22}^k(z) \ddot{\pi}_\phi \right) [1, z, \mu_{22}^k(z)] dz, \\ \ddot{I} = \ddot{w} \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz; \end{aligned} \quad (1.7)$$

– выражения для величин $\mu_{\alpha\alpha}^k(z)$ ($\alpha=1, 2$)

$$\mu_{\alpha\alpha}^k(z) = \frac{f(z) - f(h_{k-1})}{G_{\alpha 3}^k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f(h_j) - f(h_{j-1})}{G_{\alpha 3}^j}; \quad (1.8)$$

– дифференциальные уравнения движения элемента оболочки

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\phi x}}{\partial \phi} - \ddot{X}_x = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\phi \phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{x\phi}}{\partial x} - \ddot{X}_\phi = 0, \quad (1.9) \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\phi}}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{\phi x} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\phi\phi}}{\partial \phi^2} - \frac{T_{\phi\phi}}{R} + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi\phi} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\ - \ddot{I} - \frac{\partial \ddot{Y}_x}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{Y}_\phi}{\partial \phi} = P_0 P(x), \\ \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\phi x}}{\partial \phi} - Q_x - \ddot{Z}_x = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial S_{x\phi}}{\partial x} - Q_\phi - \ddot{Z}_\phi = 0. \end{aligned}$$

Функциональный параметр $f(z)$ принимаем в виде:

$$f(z) = z^3 - \frac{3}{2} h z^2,$$

соответствующем [1] квадратичному закону изменения поперечных сдвиговых напряжений по толщине пакета слоев.

Итак, составлена неклассическая замкнутая система дифференциальных уравнений (1.3) – (1.9), описывающая процесс нелинейного динамического деформирования слоистой упругой цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью. Порядок этой системы равен 12 и от числа слоев не зависит. В корректно поставленной краевой задаче такой порядок требует задания на границе области шести краевых условий. В рассмотренном ниже случае

жесткого защемления краев эти условия сводятся к обращению в нуль на торцах оболочки обобщенных перемещений:

$$\text{при } x=0, l \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = u_x = u_\phi = \pi_x = \pi_\phi = 0 \quad (1.10)$$

и 2π – периодичности решения по угловой координате ϕ . В (1.4) – (1.10) w, u_x, u_ϕ – соответственно прогиб, осевая и угловая составляющие вектора перемещений отсчетной поверхности, π_x, π_ϕ – обобщенные перемещения, связанные с учетом поперечных сдвигов. Отметим, что в результате предельного перехода

$$G_{13}^k \rightarrow \infty, \quad G_{23}^k \rightarrow \infty$$

сформулированная система дифференциальных уравнений преобразуется в систему уравнений классической теории оболочек, базирующейся на кинематической модели недеформируемой нормали.

Эффективные жесткости и податливости материалов слоев, необходимые для выполнения конкретных расчетов, определялись на основе уравнений структурной модели армированного слоя [1].

2. Осесимметричный изгиб цилиндрической оболочки

Осесимметричное напряженно-деформированное состояние жестко защемленной ортотропной цилиндрической оболочки, несущей поперечную нагрузку (1.2), определяется путем решения линейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения получаются из (1.3) – (1.9), если опустить в последних динамические и нелинейные слагаемые. Кроме того, в этих уравнениях необходимо опустить слагаемые, содержащие частные производные по угловой переменной ϕ и принять во внимание обращение в нуль угловой составляющей вектора перемещений.

Сформулированная краевая задача приведена к матричной форме:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\text{при } \xi = 0, 1 \quad y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0 \quad (2.2)$$

и решена методом инвариантного погружения [1, 2]. В (2.1), (2.2) $\xi = x/l$, $\mathbf{y}$ – вектор безразмерных кинематических и силовых характеристик напряженно-деформированного состояния. Выражения для компонент 8-мерных векторов $\mathbf{y}, \mathbf{f}$ и 8×8 матрицы $\mathbf{A}$ ввиду их громоздкости здесь не приводятся. Подробно методика вывода уравнений (2.1), (2.2) изложена в [1].

3. Решение статической задачи устойчивости

Задача устойчивости жестко защемленной слоистой цилиндрической оболочки, нагруженной осесимметричным внешним давлением, решена в рамках концепции Эйлера о разветвлении форм равновесия. Неклассическая система линейных дифференциальных уравнений задачи устойчивости, записанная в вариациях, включает в себя следующие группы зависимостей:

– соотношения упругости (1.3);
 – закон распределения вариаций составляющих вектора перемещений по толщине пакета слоев (1.4);

– выражения вариаций физических составляющих усилий и моментов в отсчетной поверхности оболочки через вариации составляющих напряжений в ее слоях (1.6);

– соотношения вариации деформаций – вариации перемещений:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^k &= \frac{f'(z)\pi_x}{G_{13}^k}, \quad \gamma_{\varphi z}^k = \frac{f'(z)\pi_\varphi}{G_{23}^k}, \quad \varepsilon_{zz}^k = 0, \\ \varepsilon_{xx}^k &= \frac{\partial u_x}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{11}^k(z) \frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_{\phi\phi}^k &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \mu_{22}^k(z) \frac{\partial \pi_\phi}{\partial \phi} + w \right), \\ \gamma_{x\phi}^k &= \frac{\partial u_\phi}{\partial x} - 2 \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} + \mu_{22}^k(z) \frac{\partial \pi_\phi}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \phi} + \mu_{11}^k(z) \frac{\partial \pi_x}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \phi};\end{aligned}\quad (3.1)$$

(здесь и ниже знаком «0» отмечены характеристики основного состояния, найденные путем решения задачи осесимметричного изгиба оболочки);

– уравнения нейтрального равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi x}}{\partial \varphi} &= 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{x\varphi}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx}^0 \frac{\partial w^0}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\phi\phi}}{\partial \phi^2} - \frac{T_{\phi\phi}}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi\phi}^0 \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi x}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi x}^0 \frac{\partial w^0}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi x}}{\partial \varphi} - Q_x &= 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{x\varphi}}{\partial x} - Q_\varphi = 0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Перечисленные зависимости вместе составляют полную систему неклассических уравнений устойчивости цилиндрической оболочки и должны интегрироваться при соответствующих краевых условиях. В рассматриваемом здесь случае жесткого защемления краев эти условия заключаются в обращении в нуль на торцах $\xi = 0, \xi = 1$ вариаций составляющих вектора перемещений

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = u_x = u_\varphi = \pi_x = \pi_\varphi = 0 \quad (3.3)$$

и в 2π – периодичности решения по угловой координате φ . Спектр бифуркационных нагрузок и соответствующих им форм потери устойчивости определяется путем интегрирования линейной однородной краевой задачи на собственные значения для данной системы дифференциальных уравнений с частными производными. Коэффициенты

$T_{xx}^0, T_{\varphi\varphi}^0, \dots$ пропорциональны параметру P_0 и определяются в результате предварительного решения задачи изгиба (2.1), (2.2). Введя безразмерный параметр нагружения $\lambda = P_0/E_1^c$ и вектор $\mathbf{y}$ вариаций безразмерных кинематических и силовых параметров напряженно-деформированного состояния оболочки, представим задачу ее устойчивости в матричной форме ($\xi = x/l$):

$$\mathbf{A}(D_\varphi) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} = \mathbf{B}(D_\varphi) \mathbf{y} + \lambda \mathbf{C}(\xi, D_\varphi) \mathbf{y}, \quad (3.4)$$

$$\|\mathbf{E}_6, \mathbf{O}_6\| \mathbf{y}(0, \varphi) = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{E}_6, \mathbf{O}_6\| \mathbf{y}(1, \varphi) = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

Здесь $\mathbf{E}_6, \mathbf{O}_6$ – 6×6 единичная и нулевая матрицы соответственно, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – 12×12 матрицы, элементы которых – полиномы от дифференциального оператора D_φ ($D_\varphi = \partial/\partial\varphi$) с коэффициентами, зависящими от переменной ξ . Выражения для элементов этих матриц ввиду их громоздкости здесь не приводятся. Решение задачи устойчивости (3.4), (3.5) строим в форме ряда Фурье:

$$\mathbf{y}(\xi, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{y}_n(\xi) \exp(in\phi), \quad (3.6)$$

($i = \sqrt{-1}$) с векторными коэффициентами $\mathbf{y}_n(\xi)$. Ясно, что представление решения задачи устойчивости в форме (3.6) позволяет удовлетворить условию его 2π – периодичности по угловой координате. Подставляя (3.7) в (3.5), (3.6) и отделяя угловую координату, приходим к распадающимся по индексу n линейным краевым задачам на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{y}_n'(\xi) = \mathbf{A}_n^{-1}(\xi) \mathbf{B}_n(\xi) \mathbf{y}_n(\xi) + \lambda \mathbf{A}_n^{-1}(\xi) \mathbf{C}_n(\xi) \mathbf{y}_n(\xi), \quad (3.7)$$

$$\|\mathbf{E}_6, \mathbf{O}_6\| \mathbf{y}_n(0) = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{E}_6, \mathbf{O}_6\| \mathbf{y}_n(1) = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Элементы матриц $\mathbf{A}_n(\xi), \mathbf{B}_n(\xi), \mathbf{C}_n(\xi)$ получаются из соответствующих элементов матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ путем преобразования $D_\varphi \rightarrow n$.

Задача (3.7), (3.8) решена численным методом, изложенным в [1] при следующем выборе координатной системы:

$$\mathbf{w}_{kj}(\xi) = \sqrt{2k-1} \cdot P_{k-1}(2\xi-1) \mathbf{e}_j \quad (k=1, 2, \dots, L, \quad j \in J), \quad (3.9)$$

где $P_k(\xi)$ – ортогональные на $[-1, 1]$ многочлены Лежандра, $\mathbf{e}_j$ – векторы стандартного ортонормированного базиса в $\mathbf{R}^{12}$, J – множество номеров ненулевых столбцов матрицы $\mathbf{C}_n(\xi)$. Выполнен многопараметрический анализ критических интенсивностей давлений и соответствующих им форм потери устойчивости.

4. Собственные колебания оболочки, нагруженной осесимметричным внешним давлением

Пусть интенсивность внешнего давления остается меньше критической. В этом случае равновесное

состояние цилиндрической оболочки является устойчивым, и существует режим установившихся гармонических колебаний в окрестности этого состояния. Изучению таких колебаний посвящен настоящий раздел.

Дифференциальные уравнения задачи получим из общей системы нелинейных уравнений динамики (1.3) – (1.9), линеаризовав эту систему в окрестности основного состояния и выполнив преобразование

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2,$$

где ω – частотный параметр. Получающаяся в результате система уравнений включает в себя следующие группы зависимостей:

- соотношения упругости (1.3);
- закон распределения вариаций составляющих вектора перемещений по толщине пакета слоев (1.4);
- выражения вариаций физических составляющих обобщенных усилий и моментов в отсчетной поверхности оболочки через вариации составляющих напряжений в ее слоях (1.6);
- соотношения вариации деформаций – вариации перемещений (3.1)
- представления интегральных характеристик даламберовых массовых сил инерции (1.7)
- уравнения собственных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\phi x}}{\partial \phi} + \omega^2 X_x &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{x\phi}}{\partial x} + \omega^2 X_\phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\phi}}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial w^0}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{\phi x}^0 \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega^2 Y_x \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{x\phi} \frac{\partial w^0}{\partial \phi} \right) + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\phi\phi}}{\partial \phi^2} - \frac{T_{\phi\phi}}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi\phi}^0 \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi\phi} \frac{\partial w^0}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi x}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(T_{\phi x} \frac{\partial w^0}{\partial x} \right) + \frac{\omega^2}{R} \frac{\partial Y_\phi}{\partial \phi} + \omega^2 I &= 0, \\ \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\phi x}}{\partial \phi} - Q_x + \omega^2 Z_x &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial S_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial S_{x\phi}}{\partial x} - Q_\phi + \omega^2 Z_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Перечисленные зависимости вместе составляют полную систему дифференциальных уравнений задачи о собственных колебаниях нагруженной ци-

линдрической оболочки и должны интегрироваться при соответствующих краевых условиях. В рассматриваемом здесь случае жесткого заземления краев эти условия заключаются в обращении в нуль на торцах вариаций составляющих вектора перемещений ($\xi = x/l$):

при $\xi = 0, \xi = 1$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = u_x = u_\phi = \pi_x = \pi_\phi = 0 \quad (4.2)$$

и в 2π -периодичности решения по угловой координате ϕ . С математической точки зрения, задача заключается в отыскании значений частотного параметра ω , при которых данная линейная однородная краевая задача для системы уравнений с частными производными допускает нетривиальные решения. Матричная форма этой задачи такова:

$$\mathbf{A}(D_\phi) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} = \mathbf{B}(D_\phi) \mathbf{y} + \lambda \mathbf{C}(\xi, D_\phi) \mathbf{y} + \omega^2 \mathbf{F}(D_\phi), \quad (4.3)$$

$$\|\mathbf{E}_6, \mathbf{O}_6\| \mathbf{y}(0, \phi) = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{E}_6, \mathbf{O}_6\| \mathbf{y}(1, \phi) = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Здесь $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{F}$ – 12×12 матрицы, причем первые три из них тождественны одноименным матрицам из (3.4). В (4.3), (4.4) параметр λ рассматривается как известный и варьируется в пределах $0 \leq \lambda < \lambda_*$, где λ_* – безразмерная критическая нагрузка, найденная на предыдущем этапе. Таким образом, неизвестными величинами задачи (4.3), (4.4) служат собственные частоты и соответствующие им нетривиальные решения (собственные вектор-функции), определяющие формы собственных колебаний. Решение этой задачи получено тем же методом, каким было получено решение задачи устойчивости (3.4), (3.5) при использовании координатной системы (3.9).

В таблице 1 приведены данные, иллюстрирующие зависимость трех низших собственных частот от параметра λ . Расчет выполнен для двухслойной оболочки, первый слой которой армирован в окружном направлении, второй – в осевом, при следующих значениях геометрических

$$R/h = 20, \quad R/l = 1, \quad t_1 = t_2 = 0.5h,$$

механических

$$\nu_1^c = \nu_1^a = \nu_2^c = \nu_2^a = 0.3, \quad E_1^c = E_2^c,$$

$$E_1^a = E_2^a, \quad E_1^a/E_1^c = 20$$

и структурных $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{z1} = \omega_{z2} = 0.5$

параметров композитной оболочки (t_k – толщина k -го слоя, $E_k^{c(a)}, \nu_k^{c(a)}$ – соответственно модуль Юнга связующего (с) и армирующих элементов (а) k -го слоя, ω_k, ω_{zk} – интенсивности армирования в поверхности k -го слоя и по его высоте соответственно). При вычислениях использовалась структурная модель армированного слоя, уравнения которой приведены в [1]. Результаты получены для случая равномерно распределенного внешнего давления и при значении параметра волнообразования $n=6$

(образование именно такого числа окружных волн сопровождается потерю устойчивости оболочки при данных значениях параметров). Из таблицы 1 видно, что при увеличении параметра λ от $\lambda = 0$ до $\lambda = 0,6\lambda^*$ (т. е. при достижении интенсивности внешнего давления 60 % от критической) наименьшая собственная частота ω_1 уменьшается почти вдвое. Значения второй (ω_2) и третьей (ω_3) собственных частот также уменьшаются при возрастании интенсивности внешнего давления, но в несколько меньшей степени.

Литература

1. Андреев, А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
2. Механика – от дискретного к сплошному / А. Н. Андреев и др.; отв. редактор В. М. Фомин. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. – 344 с.

Рецензент – Ю. А. Фадеев – д-р физ.-мат. наук, профессор, ФГОУ ВПО «Кузбасский государственный технический университет».

Таблица 1

<i>Зависимость низших собственных частот от параметра λ</i>							
λ	0	$0,1\lambda^*$	$0,2\lambda^*$	$0,3\lambda^*$	$0,4\lambda^*$	$0,5\lambda^*$	$0,6\lambda^*$
ω_1	1.1988	1.1375	1.0726	1.0035	0.9293	0.8485	0.7590
ω_2	2.0198	1.9868	1.9531	1.9188	1.8839	1.8483	1.8119
ω_3	3.1856	3.1638	3.1419	3.1199	3.0977	3.0753	3.0538