

КРИТЕРИЙ ИНТЕГРАЛЬНОСТИ ПУТИ НА БАНАХОВОМ МНОГООБРАЗИИ ГЛАДКИХ КРИВЫХ

В. Н. Черненко

Система Пфаффа на гладком конечномерном многообразии порождает некоторое распределение на бесконечномерном банаховом многообразии кривых этого гладкого многообразия. В данной работе найден критерий интегральности пути на банаховом многообразии для этого распределения.

The Pfaffian system on the smooth finitedimensional manifold generate a certain distribution on the Banach infinite dimensional manifold of curves of this smooth manifold. In this paper are found a criterion of integrality of the path on the Banach manifold for this distribution.

Ключевые слова: система Пфаффа, многообразие кривых.

Пусть M – гладкое паракомпактное n – мерное C^s – многообразие без края, $s \geq 4$. Напомним, что системой Пфаффа ранга r на многообразии M называется r -мерное C^{s-1} -подрасслоение σ кокасательного расслоения T^*M . Локальным сечением системы σ на открытом подмножестве $U \subset M$ называется дифференциальная 1-форма $\omega \in \Gamma(\sigma|_U)$ класса C^{s-1} . Для всякой точки $p \in M$ существует открытая окрестность $U \subset M$ и r локальных сечений ω_j , $j=1,2,\dots,r$, системы σ на U , такие, что $\omega_j(q)$ образуют базис векторного пространства $\sigma_q = \sigma \cap T_q^*M$ для любого $q \in U$. Систему форм ω_j будем в этом случае называть локальным базисом системы Пфаффа σ на множестве U . Если для локального базиса ω_j системы σ выполняется равенство $U=M$, то этот базис называется глобальным, а сама система σ в этом случае называется вполне параллелизуемой.

Обозначим через $\Omega(M)=C^1([\alpha,\beta],M)$ – множество C^1 -кривых на M . Кривая $c \in \Omega(M)$ называется интегральной кривой системы σ , если $\dot{c}(t) \in (\text{Ann } \sigma)(c(t))$ для любого $t \in [\alpha,\beta]$. Другими словами, кривая c является интегральной кривой системы σ , если $\omega|_{c(t)}(\dot{c}(t))=0$ для любого локального сечения ω на подмножестве $U \subset M$ и любой точки $t \in [\alpha,\beta]$, такой, что $c(t) \in U$.

Для произвольного отображения $F: [\alpha,\beta] \times [0,\varepsilon] \rightarrow M$ и чисел $t \in [\alpha,\beta]$, $\tau \in [0,\varepsilon]$ обозначим через $F_\tau: [\alpha,\beta] \rightarrow M$ и $F^t: [0,\varepsilon] \rightarrow M$ кривые, определенные соответственно формулами $F_\tau(t) = F(t, \tau)$ и $F^t(\tau) = F(t, \tau)$.

Определение 1. Вариацией кривой $c \in \Omega(M)$ называется C^1 -отображение $F: [\alpha,\beta] \times [0,\varepsilon] \rightarrow M$, $\varepsilon > 0$, такое, что $F_0 = c$. Вариацию F будем называть $C^{1,1}$ -вариацией, если для любого $\tau \in [0,\varepsilon]$ векторное поле $X_\tau: [\alpha,\beta] \rightarrow TM$ вдоль F_τ , определенное формулой $X_\tau(t) = \dot{F}^t(\tau)$, принадлежит классу C^1 [1].

Каждую вариацию F кривой c можно рассматривать как путь $F^*: [0,\varepsilon] \rightarrow \Omega(M)$, определенный формулой $F^*(\tau) = F_\tau$. При этом $F^*(0) = c$. Множество $\Omega(M)$ является банаховым C^{s-3} -многообразием [2]. Если вариация F является $C^{1,1}$ -вариацией, то путь F^* явля-

ется C^1 -путём [1]. В дальнейшем любая вариация F предполагается $C^{1,1}$ -вариацией.

Определение 2. Вариация F интегральной кривой c системы Пфаффа σ называется интегральной вариацией, если для любого $\tau \in [0,\varepsilon]$ кривая F_τ является интегральной кривой системы σ .

Определение 3. Пусть F – вариация кривой $c \in \Omega(M)$ и $X: [\alpha,\beta] \rightarrow TM$ – векторное поле вдоль c . Будем говорить, что F является вариацией в направлении поля X , если $X_0 = X$.

Предложение 1 [3]. Пусть $c \in \Omega(M)$ – интегральная кривая системы Пфаффа σ и $X: [\alpha,\beta] \rightarrow TM$ – векторное C^1 -поле вдоль c . Интегральная вариация кривой c в направлении поля X существует тогда и только тогда, когда поле X удовлетворяет условию:

$$\frac{d}{dt}(\omega|_c(X)) - (d\omega)|_c(\dot{c}, X) = 0 \quad (1)$$

для любого локального сечения ω системы σ на открытом подмножестве $U \subset M$ и любой точки $t \in [\alpha,\beta]$, такой, что $c(t) \in U$.

Доказательство. Пусть $F: [\alpha,\beta] \times [0,\varepsilon] \rightarrow M$ – интегральная вариация кривой c в направлении поля X . Пусть ω – локальное сечение системы σ на открытом подмножестве $U \subset M$ и $t \in [\alpha,\beta]$ таково, что $c(t) \in U$.

Выберем в окрестности $U' \subset U$ точки $c(t)$ локальную карту многообразия M и обозначим через F_i , c_i , X_i , $i=1,2,\dots,n$, координатные функции соответственно вариации F , кривой c и поля X в этой карте. Тогда по определению вариации F кривой c в направлении поля X имеем: $F_i(t,0) = c_i(t)$, $\frac{\partial F_i}{\partial \tau}(t,0) = X_i(t)$. (2)

$$F_i(t,0) = c_i(t), \quad \frac{\partial F_i}{\partial \tau}(t,0) = X_i(t). \quad (2)$$

Обозначим $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x_m) dx_i$. Тогда из интегральности вариации F следует тождество:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(F_m(t, \tau)) \frac{\partial F_i}{\partial t}(t, \tau) = 0.$$

Дифференцируя его по τ при $\tau=0$ и учитывая (2), получаем:

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}(c_m(t)) X_k(t) c'_i(t) + \sum_{i=1}^n \omega_i(c_m(t)) X'_i(t) = 0.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\omega|_{c(t)}(X(t))) - (d\omega)|_{c(t)}(\dot{c}(t), X(t)) = \\ & = \left(\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}(c_m(t)) c'_k(t) X_i(t) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n \omega_i(c_m(t)) X'_i(t) - \left. \left(\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}(c_m(t)) c'_k(t) X_i(t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}(c_m(t)) X_k(t) c'_i(t) \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Лемма. Пусть в $\mathbf{R}^n$ задана вполне параллелизуемая система Пфаффа ранга r , определённая глобальным базисом:

$$v_j(x_m) = \sum_{l=1}^{n-r} v_{jl}(x_m) dx_l - dx_{n-r+j}, \quad j=1,2,\dots,r. \quad (3)$$

Пусть $c: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ – интегральная C^1 -кривая системы θ , $X: [a,b] \rightarrow \mathbf{TR}^n$ – векторное C^1 -поле вдоль c , $\varphi: [0,\varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}^n$ – C^1 -кривая в $\mathbf{R}^n$, $Y: [0,\varepsilon] \rightarrow \mathbf{TR}^n$ – векторное C^1 -поле вдоль φ . Предположим, что выполнены условия:

$$\begin{aligned} c(a) &= \varphi(0), \quad c'(a) = Y(0), \\ X(a) &= \varphi'(0), \quad X'(a) = Y'(0); \end{aligned} \quad (4)$$

$$v_j|_{\varphi}(Y) = 0, \quad j=1,2,\dots,r; \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}(v_j|_c(X)) - (dv_j)|_c(\dot{c}, X) = 0, \quad j=1,2,\dots,r. \quad (6)$$

Тогда существует интегральная вариация $F: [a,b] \times [0,\varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}^n$ кривой c в направлении поля X , такая, что:

$$F^a = \varphi, \quad \frac{dF}{dt}(\tau)(a) = Y(\tau), \quad \tau \in [0,\varepsilon]. \quad (7)$$

Доказательство леммы. Обозначим через c_i , φ_i , X_i , Y_i – координатные функции соответственно отображений c , φ , X , Y ; $i=1,2,\dots,n$. Определим отображение $\tilde{F}: [a,b] \times [0,\varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}^n$ при помощи координатных функций $\tilde{F}_i$, полагая:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(t, \tau) &= c_i(t) + \varphi_i(\tau) + \tau(X_i(t) - X_i(a)) + \\ &+ (t-a)(Y_i(\tau) - Y_i(0)) - \tau(t-a)X'_i(a) - c_i(a). \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что из условий (4) вытекают равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(a, \tau) &= \varphi(\tau), \quad \tilde{F}(t, 0) = c(t), \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(a, \tau) &= Y(\tau), \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau}(t, 0) = X(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Будем искать интегральную вариацию F кривой c , определённую координатными функциями:

$$\begin{cases} F_l(t, \tau) = \tilde{F}_l(t, \tau), & l=1,2,\dots,n-r; \\ F_{n-r+j}(t, \tau) = \tilde{F}_{n-r+j}(t, \tau) + f_j(t, \tau), & j=1,2,\dots,r, \end{cases} \quad (9)$$

где функции $f_j(t, \tau)$ пока неизвестны. Для их определения подставим в систему $v_j(x_m) = 0$ функции $x_m = F_m(t, \tau)$, $m=1,2,\dots,n$, беря дифференциалы только по t . В результате получим выражения вида:

$$(G_j(t, \tau, f_q(t, \tau)) - \frac{\partial f_j}{\partial t}(t, \tau)) dt = 0,$$

или, сокращая на dt :

$$\frac{\partial f_j}{\partial t}(t, \tau) = G_j(t, \tau, f_q(t, \tau)) \quad j,q=1,2,\dots,r. \quad (10)$$

Легко проверяется, что из равенств (5), (6), (8) вытекают тождества:

$$G_j(a, \tau, 0) = 0, \quad G_j(t, 0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial G_j}{\partial \tau}(t, 0, 0) = 0, \quad j=1,2,\dots,r. \quad (11)$$

Будем теперь считать, что функции $f_j = f_j(t, \tau)$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10), зависящей от параметра τ , при начальных условиях:

$$f_j(a, \tau) = 0. \quad (12)$$

Заметим, что при $\tau = 0$, в силу (11), набор из r нулевых функций является решением системы (10), удовлетворяющим условию (12), и, в силу единственности решения [4], имеем тождество:

$$f_j(t, 0) = 0. \quad (13)$$

Решение (13) определено на компактном интервале $[a,b]$, поэтому, уменьшая, если это необходимо, число ε , можно считать, что все решения $f_j(t, \tau)$ определены на интервале $[a,b]$ для любого значения параметра $\tau \in [0,\varepsilon]$. Более того, при малом ε все эти решения C^1 -близки на $[a,b]$ к нулевому решению $f_j(t, 0)$.

Подставляя в (10) значение $t=a$ и используя (11) и (12), убеждаемся, что:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t}(a, \tau) = 0. \quad (14)$$

Далее замечаем, что, в силу (10), функции $\partial f_j / \partial \tau$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_j}{\partial t}(t, \tau) &= \frac{\partial G_j}{\partial \tau}(t, \tau, f_q(t, \tau)) + \\ &+ \sum_{m=1}^r \frac{\partial G_j}{\partial f_m}(t, \tau, f_q(t, \tau)) h_m(t, \tau), \\ j,q &= 1,2,\dots,r. \end{aligned} \quad (15)$$

с неизвестными функциями $h_j(t, \tau)$ при начальном условии $h_j(a, \tau) = 0$. Набор из r нулевых функций является решением системы (15) при $\tau = 0$ и поэтому, в силу единственности решения, имеем:

$$\partial f_j / \partial \tau(t, 0) = 0. \quad (16)$$

Равенства (8), (9), (12)-(14), (16) показывают, что F – искомая вариация. Лемма доказана.

Окончание доказательства предложения 1.

Пусть векторное C^1 -поле $X: [\alpha, \beta] \rightarrow TM$ вдоль интегральной C^1 -кривой $c: [\alpha, \beta] \rightarrow M$ системы Пфаффа σ удовлетворяет условию (1) для любого локального сечения ω системы σ на открытом подмножестве $U \subset M$ и любой точки $t \in [\alpha, \beta]$, такой, что $c(t) \in U$. Покроем компактное множество $c([\alpha, \beta]) \subset M$ конеч-

ным числом координатных областей $U_1, U_2, \dots, U_m$ так, чтобы существовало разбиение $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, такое, что $c([\alpha_{q-1}, \alpha_q]) \subset U_q$, $q=1, 2, \dots, m$, и система σ определялась в каждой области U_q локальным базисом вида (3). В области U_1 определим кривую $\varphi: [0, \varepsilon] \rightarrow U_1$ с помощью координатных функций $\varphi_i(\tau) = c_i(\alpha) + \tau X_i(\alpha)$, $i=1, 2, \dots, n$, где c_i и X_i – координатные функции соответственно кривой c и поля X .

Далее определим векторное поле $Y: [0, \varepsilon] \rightarrow TU_1$ вдоль φ координатными функциями:

$$\begin{cases} Y_l(\tau) = c_l'(\alpha) + \tau X_l'(\alpha), & l=1, 2, \dots, n-r; \\ Y_{n-r+j}(\tau) = \sum_{l=1}^{n-r} v_{jl}(\varphi_i(\tau))(c_l'(\alpha) + \tau X_l'(\alpha)), & j=1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

Тогда выполнены условия леммы, которая доставляет нам интегральную вариацию

$F_{(1)}: [\alpha_0, \alpha_1] \times [0, \varepsilon] \rightarrow U_1$ кривой $c|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$.

Далее по индукции, предполагая, что мы построили вариацию $F_{(h)}: [\alpha_{h-1}, \alpha_h] \times [0, \varepsilon] \rightarrow U_h$, $h=1, 2, \dots, m-1$, кривой $c|_{[\alpha_{h-1}, \alpha_h]}$, полагаем $\varphi(\tau) = F_{(h)}(\alpha_h, \tau)$, $Y(\tau) = (\partial F_{(h)} / \partial t)(\alpha_h, \tau)$, и, применяя лемму, получаем интегральную вариацию $F_{(h+1)}: [\alpha_h, \alpha_{h+1}] \times [0, \varepsilon] \rightarrow U_{h+1}$ кривой $c|_{[\alpha_h, \alpha_{h+1}]}$.

Таким образом, мы получаем интегральные вариации $F_{(q)}$ кривых $c|_{[\alpha_{q-1}, \alpha_q]}$, $q=1, 2, \dots, m$, очевидная склейка которых даёт нам искомую интегральную вариацию кривой c . Предложение 1 доказано.

Касательное пространство $T_c \Omega(M)$ естественным образом отождествляется со множеством векторных C^1 -полей вдоль c [2]. Формула (1) линейна относительно X и поэтому, в силу указанного отождествления, определяет в пространстве $T_c \Omega(M)$ подпространство D_c . Множество $D = \bigcup_{c \in \Omega(M)} D_c$ является под-расслоением касательного расслоения $T\Omega(M)$, то есть распределением на $\Omega(M)$.

Предложение 2. Пусть F – вариация кривой $c \in \Omega(M)$. Путь $F^*: [0, \varepsilon] \rightarrow \Omega(M)$ является интегральным путём распределения D тогда и только то-

$$\text{гда, когда: } \frac{\partial}{\partial \tau}(\omega|_{F_\tau}(\dot{F}_\tau)) = 0 \quad (17)$$

для любого локального сечения ω системы σ на открытом подмножестве $U \subset M$ и любых $t \in [\alpha, \beta]$, $\tau \in [0, \varepsilon]$, таких, что $F(t, \tau) \in U$.

Доказательство. Интегральность пути F^* означает, что для любого $\tau \in [0, \varepsilon]$ касательный вектор X_τ пути F^* в точке τ принадлежит D_{F_τ} . Это, в свою очередь, означает, что для любого локального сечения ω системы σ на открытом подмножестве $U \subset M$ и любого $t \in [\alpha, \beta]$, такого, что $F(t, \tau) \in U$, должно удовлетворяться соотношение (1), то есть:

$$\frac{d}{dt}(\omega|_{F_\tau}(X_\tau)) - (d\omega)|_{F_\tau}(\dot{F}_\tau, X_\tau) = 0. \quad (18)$$

Остаётся доказать эквивалентность (17) и (18). Для этого выберем в окрестности точки $F(t, \tau)$ локальную карту многообразия M , в которой F определяется координатными функциями F_i , $i=1, 2, \dots, n$, и $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x_m) dx^i$. Тогда (18) в координатах после очевидных сокращений примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}(F_m(t, \tau)) \frac{\partial F_k}{\partial \tau}(t, \tau) \frac{\partial F_i}{\partial t}(t, \tau) + \\ + \sum_{i=1}^n \omega_i(F_m(t, \tau)) \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial \tau}(t, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Но точно такой же вид в координатах принимает и соотношение (17). Предложение доказано.

Литература

1. Бурбаки, Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1975.
 2. Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – М.: Мир, 1967.
 3. Черненко, В. Н. Критерий существования интегральной вариации для интегральной кривой системы Пфаффа / В. Н. Черненко // Вестник КемГУ. – Кемерово, 2005. – № 4 (24). – С. 189 – 191.
 4. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1974.
- Рецензент – Н. К. Смоленцев, ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет».