УДК 517.9

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Д. А. Прокудин, О. С. Трофимова

В работе изучается модель, описывающая установившееся движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками.

In the paper, we are dealing with a model for mixtures of the steady incompressible viscous fluids between two parallel walls.

Ключевые слова: динамика смесей, несжимаемые жидкости, решение уравнений Навье-Стокса

В данной работе рассматривается модель механики сплошной среды, описывающая изотермическое движение двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками. В стационарном случае балансовые соотношения массы и импульса для каждой составляющей такой смеси имеют следующий вид [1-3]:

$$div\left(\rho_i \vec{u}^{(i)}\right) = 0, \quad i = 1,2, \qquad (1)$$

$$div\left(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}\right) = div\, P^{(i)} + \vec{J}^{(i)}, \quad i = 1,2, \qquad (2)$$

где $\rho_i = const > 0$ – плотность, $\vec{u}^{(i)}$ – поле скоростей i-ой составляющей смеси, $P^{(i)}$ – тензор напряжений i-ой компоненты смеси, $\vec{J}^{(i)}$ – интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси.

В качестве $P^{(i)}$ примем:

$$P^{(i)} = -p_i I + \sum_{j=1}^{2}\left(2\mu_{ij} D\left(\vec{u}^{(j)}\right) + \lambda_{ij} div \vec{u}^{(j)} I\right),$$
$$i = 1,2. \qquad (3)$$

Здесь p_i – давление i-ой компоненты смеси, D - тензор скоростей деформаций, I – единичный тензор, λ_{ij} и μ_{ij} – коэффициенты вязкости (заданные постоянные) такие, что:

$$\begin{gathered}\mu_{11} > 0,\ \mu_{22} > 0,\ 2\mu_{11} + \lambda_{11} > 0,\ 2\mu_{22} + \lambda_{22} > 0,\\ 4\mu_{11}\mu_{22} - \left(\mu_{12} + \mu_{21}\right)^2 > 0,\\ 4\left(2\mu_{11} + \lambda_{11}\right)\left(2\mu_{22} + \lambda_{22}\right) -\\ -\left(2\mu_{12} + \lambda_{12} + 2\mu_{21} + \lambda_{21}\right)^2 > 0.\end{gathered} \qquad (4)$$

Будем предполагать, что интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси:

$$\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a\,(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}), \quad a = const > 0, \quad i = 1,2. \qquad (5)$$

Зачастую в моделях механики сплошных сред гипотеза о геометрии линий тока (см., например, [4-6]) позволяет получить решения рассматриваемых задач в аналитической форме. Ниже в данной работе показывается, что аналогичное положение дел имеет место и в рассматриваемой модели смесей вязких несжимаемых сред.

Рассмотрим прямолинейно-параллельное движение смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками, простирающимися в направлении осей x_1 и x_3 до бесконечности (рис. 1).

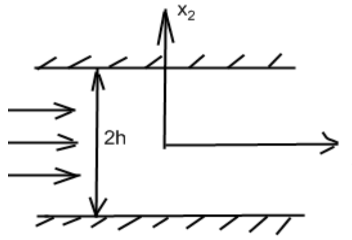


Рис. 1. ***К течению смесей вязких жидкостей между параллельными стенками***

Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Начало оси x_2 возьмем на средней линии между стенками. Из предположения о плоско-параллельности движения и из уравнений (1) следует, что

$$\vec{u}^{(i)} = \left(u^{(i)}, 0, 0\right), \quad \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_1} = 0, \quad i = 1,2. \qquad (6)$$

В этом случае уравнения (2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1} = \mu_{i1}\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_3^2}\right) + \mu_{i2}\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_3^2}\right) +$$
$$+\left(-1\right)^{i+1} a\left(u^{(2)} - u^{(1)}\right), \quad i = 1,2,$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial x_2} = \frac{\partial p_i}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1,2. \qquad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) непосредственно вытекает, что

$$u^{(i)} = u^{(i)}\left(x_2, x_3\right), \quad p_i = p_i\left(x_1\right), \quad i = 1,2. \qquad (8)$$

Ясно, что равенства (7) могут иметь место тогда и только тогда, когда обе части уравнений:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1} = \mu_{i1}\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_3^2}\right) + \mu_{i2}\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_3^2}\right) +$$
$$+\left(-1\right)^{i+1} a\left(u^{(2)} - u^{(1)}\right), \quad i = 1,2,$$

являются постоянной величиной, которую обозначим через $k_i,\ i = 1,2$.

Из равенств $\dfrac{\partial p_i}{\partial x_1} = k_i$ получаем, что

$$p_i = k_i\, x_1 + C_i, \quad i = 1,2. \qquad (9)$$

Для полного определения вида прямой (9), характеризующей изменение давления вдоль оси x_1 для i-ой составляющей смеси, т. е. для определения постоянных k_i и C_i, достаточно задать значения давлений p_i^1 и p_i^2 в каких-либо двух сечениях объема, занимаемого смесью (например, при $x_1 = 0$ и $x_1 = l$).

Рассмотрим теперь задачу об определении скорости движения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ каждой из рассматриваемых компонент смеси жидкостей между двумя параллельными стенками при условии, что постоянные k_i заданы. Для простоты примем, что $k_1 = k_2 = k$.

Для определения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ на основании (7) и (9) имеем следующую систему уравнений:

$$\mu_{i1}\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_3^2}\right)+\mu_{i2}\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_3^2}\right)+ +\left(-1\right)^{i+1} a\left(u^{(2)}-u^{(1)}\right)=k, \quad i=1,2. \tag{10}$$

Уравнения (10) необходимо дополнить граничными условиями. Предположим, что нижняя граница (стенка) перемещается с постоянной скоростью V_1, а верхняя - со скоростью V_2. Тогда мы приходим к следующим условиям на границе:

$$u^{(i)}\big|_{x_2=-h}=V_1, \quad u^{(i)}\big|_{x_2=h}=V_2, \quad i=1,2. \tag{11}$$

Решение задачи (10)-(11) сводится к рассмотрению следующих двух случаев:

I). Если $\mu_{12}+\mu_{22}\neq 0$, то сначала определим функцию $u^{(1)}$ как решение обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2}-a\frac{\delta}{2h}u^{(1)}=\frac{k}{\Delta}(\mu_{22}-\mu_{12})-\frac{a}{\Delta}\psi-\frac{ak}{\Delta}x_2^2, \quad \psi=\frac{\delta}{2h}(V_2-V_1)x_2+\frac{\delta}{2}(V_1+V_2)-kh^2 \tag{12}$$

при граничных условиях:

$$u^{(1)}\Big|_{x_2=-h}=V_1 \ , \ u^{(1)}\Big|_{x_2=h}=V_2. \tag{13}$$

Здесь $\delta=\mu_{11}+\mu_{12}+\mu_{21}+\mu_{22}>0$,
$\Delta=\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21}>0$.

Краевая задача (12)-(13) имеет единственное решение, определяемое формулой:

$$u^{(1)}=C_1 e^{\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}x_2}+C_2 e^{-\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}x_2}+Ax_2^2+Bx_2+C, \tag{14}$$

где:

$$A=\frac{k}{\delta}, \quad B=\frac{1}{2h}\left(V_2-V_1\right),$$

$$C=\frac{2k\Delta}{a\delta^2}-\frac{k}{a\delta}\left(\mu_{22}-\mu_{12}\right)+\frac{1}{2}\left(V_1+V_2\right)-\frac{kh^2}{\delta},$$

$$C_1=e^{\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}h}F_1-e^{3\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}h}\frac{F_2-e^{2\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}h}F_1}{1-e^{4\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}h}},$$

$$C_2=e^{\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}h}\frac{F_2-e^{2\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}h}F_1}{1-e^{4\sqrt{a\frac{\delta}{\Delta}}h}},$$

$$F_1=V_1-Ah^2+Bh-C, \quad F_2=V_2-Ah^2-Bh-C.$$

Зная теперь $u^{(1)}$, найдем $u^{(2)}$ из следующего выражения:

$$u^{(2)}=\frac{1}{\mu_{12}+\mu_{22}}(\psi+kx_2^2)-\frac{\mu_{11}-\mu_{21}}{\mu_{12}+\mu_{22}}u^{(1)}. \tag{15}$$

II). Если $\mu_{12}+\mu_{22}=0$, то для определения $u^{(1)}$, мы приходим к следующей краевой задаче:

$$(\mu_{11}+\mu_{21})\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2}=2k, \quad u^{(1)}\Big|_{x_2=-h}=V_1, \ u^{(1)}\Big|_{x_2=h}=V_2. \tag{16}$$

Так как в этом случае $\mu_{12}+\mu_{21}\neq 0$, то решение задачи (16) единственно и имеет вид:

$$u^{(1)}=\frac{k}{\mu_{11}+\mu_{21}}x_2^2+C_1x_2+C_2, \tag{17}$$

где

$$C_1=\frac{1}{2h}(V_2-V_1), \quad C_2=\frac{1}{2}(V_1+V_2)-\frac{kh_2^2}{\mu_{11}+\mu_{21}}.$$

Далее, определим функцию $u^{(2)}$ как решение краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2}-\frac{a}{\mu_{22}}u^{(2)}=\frac{k}{\mu_{22}}\frac{\mu_{11}-\mu_{21}}{\mu_{11}+\mu_{21}}-\frac{ak}{\mu_{22}}\frac{x_2^2}{\mu_{11}+\mu_{21}}- -\frac{a}{2\mu_{22}h}(V_2-V_1)x_2-\frac{a}{2\mu_{22}}(V_1+V_2)+\frac{akh^2}{\mu_{22}(\mu_{11}+\mu_{21})},$$
$$u^{(2)}\Big|_{x_2=-h}=V_1, \ u^{(2)}\Big|_{x_2=h}=V_2, \tag{18}$$

общее решение которой представляется в виде:

$$u^{(2)}=C_1 e^{\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}x_2}+C_2 e^{-\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}x_2}+Ax^2+Bx+C, \tag{19}$$

где

$$A=\frac{k}{\mu_{11}+\mu_{21}}, \quad B=\frac{1}{2h}(V_2-V_1),$$

$$C=\frac{2k}{a}\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}+\mu_{21}}+\frac{1}{2}(V_1+V_2)-\frac{kh^2}{\mu_{11}+\mu_{21}}-\frac{k}{a}\frac{\mu_{11}-\mu_{21}}{\mu_{11}+\mu_{21}},$$

$$C_1=e^{\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}h}F_1-e^{3\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}h}\frac{F_2-e^{2\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}h}F_1}{1-e^{4\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}h}},$$

$$C_2=e^{\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}h}\frac{F_2-e^{2\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}h}F_1}{1-e^{4\sqrt{\frac{a}{\mu_{22}}}h}},$$

$$F_1=V_1-Ah^2+Bh-C, \ F_2=V_2-Ah^2-Bh-C.$$

Заметим, что если в уравнениях (2) мы не будем брать в расчет слагаемые, отвечающие за обмен импульсом между различными составляющими смеси (т. е. слагаемые $(-1)^{i+1}a(\vec{u}^{(2)}-\vec{u}^{(1)})$), то решение задачи (10)-(11) в этом случае имеет следующий вид:

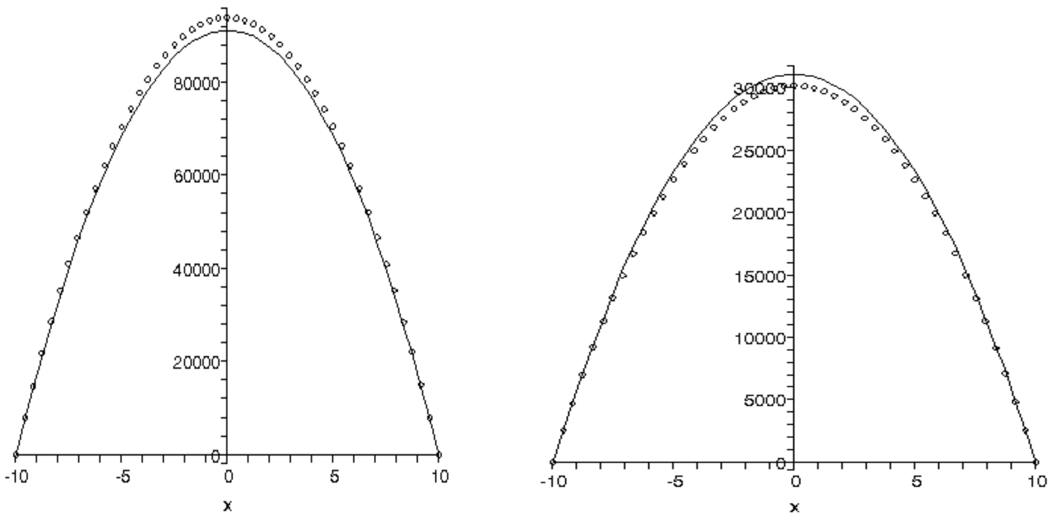
$$\overline{u}^{(1)}=-\frac{k}{2\Delta}(\mu_{22}-\mu_{12})(h^2-x_2^2)+ +\frac{1}{2h}(V_2-V_1)x_2+\frac{1}{2}(V_1+V_2),$$
$$\overline{u}^{(2)}=-\frac{k}{2\Delta}(\mu_{11}-\mu_{21})(h^2-x_2^2)+ +\frac{1}{2h}(V_2-V_1)x_2+\frac{1}{2}(V_1+V_2). \tag{20}$$

Проведем сравнительный анализ результатов доставляемых предположенной моделью смеси и классической моделью, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками. Предположим, что обе компоненты смеси физически неразличимы, т. е. $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu, \quad \mu_{12} = \mu_{21} = 0$. Тогда, из (14), (15) и (20) следует, что

$$u^{(1)} = u^{(2)} = \overline{u}^{(1)} = \overline{u}^{(2)} = -\frac{k}{2\mu}(h^2 - x_2^2) + \\ + \frac{1}{2h}\left(V_2 - V_1\right)x_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2). \tag{21}$$

Ясно, что картина движения такой смеси ничем не отличается от течения вязкой несжимаемой жидкости с теми же свойствами (см. [4]). Также сохраняются все качественные зависимости (расход, средняя и максимальная скорость движения, коэффициент сопротивления и др.) присущие классической модели, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками.

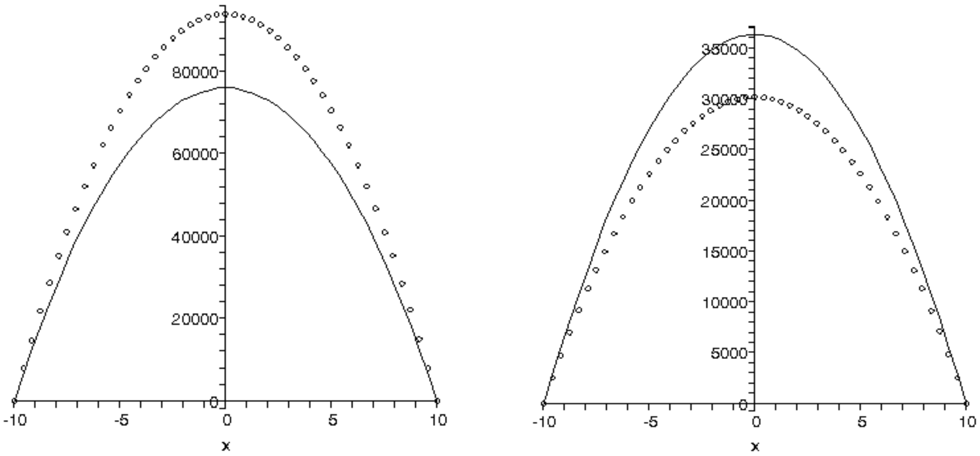
Теперь выясним вопрос о влиянии на физическую картину течения смеси слагаемых, ответственных за обмен импульсом между ее составляющими. В соответствии с этим зададим значения коэффициентов вязкости $\mu_{11} = 0.1,\ \mu_{12} = 0.02,\ \mu_{21} = 0.01,$ $\mu_{22} = 0.3$; значения перепада давления - $k = 200$; расстояние между стенками - $h = 10$; стенки будем считать неподвижными, т. е. $V_1 = 0, \quad V_2 = 0$. Построим графики функций $u^{(i)}, \overline{u}^{(i)}, \quad i = 1, 2$, изменяя значения параметра a в пределах от 0.0001 до 0.1.



— - $u^{(1)}$, ⋯ - $\overline{u}^{(1)}$ — - $u^{(2)}$, ⋯ - $\overline{u}^{(2)}$

$\max\limits_{[-10;10]}\left|u^{(1)} - \overline{u}^{(1)}\right| = 2694.6$ $\max\limits_{[-10;10]}\left|u^{(2)} - \overline{u}^{(2)}\right| = 926.3$

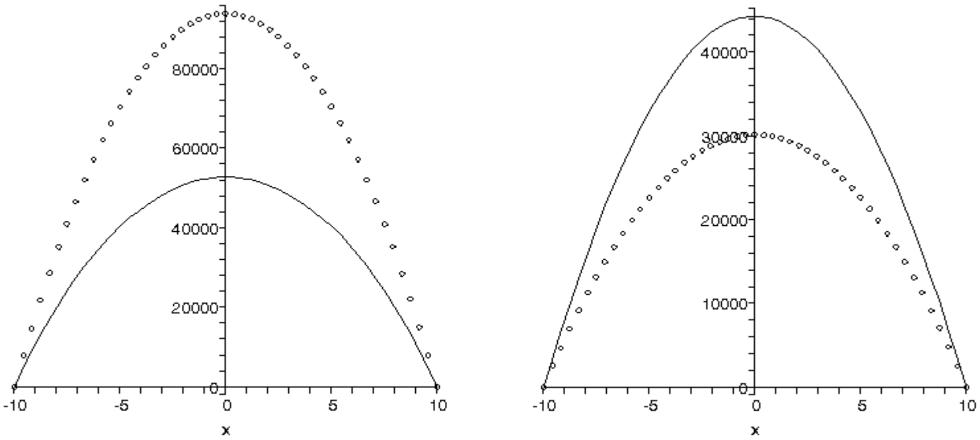
Рис. 2. ***a = 0.0001***



— - $u^{(1)}$, ⋯ - $\overline{u}^{(1)}$ — - $u^{(2)}$, ⋯ - $\overline{u}^{(2)}$

$\max\limits_{[-10;10]}\left|u^{(1)} - \overline{u}^{(1)}\right| = 17966.9$ $\max\limits_{[-10;10]}\left|u^{(2)} - \overline{u}^{(2)}\right| = 6176.1$

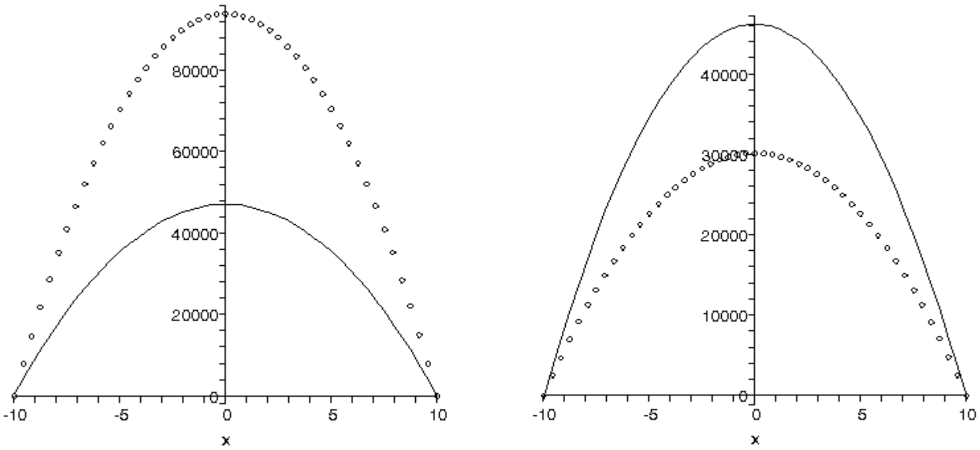
Рис. 3. ***a = 0.001***



— - $u^{(1)}$, ··· - $\overline{u}^{(1)}$ — - $u^{(2)}$, ··· - $\overline{u}^{(2)}$

$\max\limits_{[-10;10]}\left|u^{(1)}-\overline{u}^{(1)}\right| = 41166.1$ $\max\limits_{[-10;10]}\left|u^{(2)}-\overline{u}^{(2)}\right| = 14150.8$

Рис. 4. ***a = 0.01***



— - $u^{(1)}$, ··· - $\overline{u}^{(1)}$ — - $u^{(2)}$, ··· - $\overline{u}^{(2)}$

$\max\limits_{[-10;10]}\left|u^{(1)}-\overline{u}^{(1)}\right| = 46790.5$ $\max\limits_{[-10;10]}\left|u^{(2)}-\overline{u}^{(2)}\right| = 16084.2$

Рис. 5. ***a = 0.1***

Из данных графиков видно, что при увеличении параметра a, максимум разности по модулю между $u^{(i)}$ и $\overline{u}^{(i)}$ возрастает. Когда a достигает значения 1, то эта разница имеет порядок 10^{27}. Таким образом, в рассматриваемой модели смеси слагаемые, ответственные за обмен импульсом между ее составляющими, способны существенно влиять на физическую картину течения.

Литература

1. Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. Ч. 1. – М.: Наука, 1987.
2. Rajagopal, K. R. Mechanics of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. – London: World Scientific Publishing, 1995.
3. Кучер, Н. А. О существовании стационарных решений уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Вестник Кемеровского государственного университета. Выпуск 4 (36). - Кемерово, 2008. – С. 16 – 20.
4. Кучер, Н. А. Об установившемся течении смеси вязких несжимаемых жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин // Вестник Кемеровского государственного университета. Выпуск 4 (32). – Кемерово, 2007. – С. 13 – 18.
5. Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.
6. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М.: Наука,1970.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой дифференциальных уравнений КемГУ Н. А. Кучер.

Рецензент – В. И. Полтавцев, ФГОУ ВПО «Кемеровский государственный сельскохозяйственный институт».