

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин

В статье представлен результат существования обобщенных решений краевой задачи для системы уравнений, описывающих стационарное движение двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей.

We consider the equations for mixtures of compressible heat conducting viscous fluids in the steady three dimensional case and show the existence of a weak solution in the case of no-slip boundary condition for the velocity and Newton boundary condition for the temperature.

Ключевые слова: краевые задачи, динамика смесей, решение уравнений Навье-Стокса.

I. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

1. Постановка задачи

Кроме классических уравнений гидродинамики, при решении многих современных задач механики сплошных сред используются более сложные модели, точнее учитывающие неоднородный характер состава реальных жидкостей и газов. Одним из примеров таких моделей служит модель двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей. Вопрос о глобальной разрешимости краевых задач движения двухкомпонентных смесей сжимаемых теплопроводных жидкостей в настоящее время исследован в значительно меньшей степени, по сравнению с моделью Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа (см. [10, 7, 8] и указанную там библиографию), имеются лишь результаты в случае одномерного движения [21], [20].

В данной работе рассматривается задача об установившемся движении двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей в общем случае трехмерного движения.

Задача Б

Пусть смесь занимает ограниченную область $\Omega \subset R^3$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ граница $\partial\Omega$ которой принадлежит классу C^2 . Требуется найти векторные поля скоростей $\bar{u}^{(i)} : \Omega \rightarrow R^3$, $i = 1, 2$, скалярные поля плотностей $\rho_i : \Omega \rightarrow R^+$ и температур $\theta_i : \Omega \rightarrow R^+$, $i = 1, 2$ составляющих смеси, удовлетворяющие следующим уравнениям и краевым условиям [10], [18, 9, 4, 22]:

$$\operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^2 L_{ij} \bar{u}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}) + \nabla p_i = \bar{f}^{(i)} + \rho_i \bar{f}^{(i)} \quad \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \theta_i \bar{u}^{(i)}) + \operatorname{div} \bar{q}^{(i)} = \hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)} - \rho_i \theta_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} + \Gamma_i \quad \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (1.3)$$

$$\bar{u}^{(i)} = 0 \quad \text{в } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \quad (1.4)$$

$$k_i(\theta_i) \nabla \theta_i \cdot \bar{n} + L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) = 0 \quad \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \quad (1.5)$$

$$\int_{\Omega} \rho_i dx = M_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.6)$$

В уравнениях (1.2) операторы

$L_{ij} = -\mu_{ij} \Delta - (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \operatorname{div}$, $i, j = 1, 2$ определены так, что для некоторой постоянной $C_0 > 0$ выполняется неравенство:

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} L_{ij} \bar{u}^{(j)} \cdot \bar{u}^{(i)} dx \geq C_0 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}^{(i)}|^2 dx. \quad (1.7)$$

Кроме того, предполагаются выполненными следующие соотношения:

$$p_i = \rho_i^\gamma + \rho_i \theta_i, \quad i = 1, 2, \quad \gamma > 1$$

– давление i -ой составляющей смеси,

$$\bar{q}^{(i)} = -k_i(\theta_i) \nabla \theta_i, \quad i = 1, 2, \quad k_i(\theta_i) = 1 + \theta_i^m,$$

$$i = 1, 2, \quad m > 1$$

– вектор теплового потока i -ой компоненты смеси,

$$\bar{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}), \quad i = 1, 2, \quad a > 0$$

– интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси,

$$\Gamma_1 = b(\theta_2 - \theta_1), \quad \Gamma_2 = -b(\theta_2 - \theta_1) + a |\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(2)}|^2, \quad b > 0$$

– интенсивность обмена энергией между составляющими смеси,

$$\hat{\sigma}^{(i)} = 2\mu_{ii} D(\bar{u}^{(i)}) + \frac{\lambda_{ii}}{3} \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} I, \quad i = 1, 2,$$

$$L(\theta_i) = 1 + \theta_i^{m-1}, \quad i = 1, 2.$$

В краевых условиях (1.5) предполагается, что $\hat{\theta} > 0$ – известная достаточно гладкая функция. Массовые силы $\bar{f}^{(1)}$ и $\bar{f}^{(2)}$ в уравнениях (1.2) считаются заданными непрерывными векторными полями. Величины M_i , λ_{ij} , μ_{ij} , γ , a , m и b считаются заданными константами.

Определение 1. Обобщенным решением краевой задачи Б называются неотрицательные функции $\rho_i \in L^1(\Omega)$, $\theta_i \in W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$, $i = 1, 2$ и векторные поля $\bar{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $i = 1, 2$,

¹⁾ В работе используются общепринятые в литературе обозначения $L^p(W^{l,p})$ (см., например, [16], [12]) для пространств функций интегрируемых со степенью $p \geq 1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l \geq 0$). Через $C^l(\bar{\Omega})$ ($C_0^l(\bar{\Omega})$) обозначим банахово пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций (обращающихся в нуль на $\partial\Omega$), $l \geq 0$. Обозначения пространств для векторных

удовлетворяющие следующим условиям:

$$(B1) \quad \int_{\Omega} \rho_i dx = M_i, \quad \rho_i \theta_i \in L^2(\Omega), \quad \rho_i \bar{u}^{(i)} \in L^1(\Omega), \\ \theta_i^m \nabla \theta_i \in L^1(\Omega), \quad \theta_i^m \in L^1(\partial\Omega), \\ \rho_i^\gamma \in L^1_{loc}(\Omega), \quad \rho_i |\bar{u}^{(i)}|^2 \in L^1_{loc}(\Omega), \quad i = 1, 2;$$

(B2) для любых дифференцируемых функций G_i с ограниченными производными $G_i' \in C(R)$, $i = 1, 2$ и произвольных функций $\psi_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2$ выполняются интегральные тождества:

$$\int_{\Omega} \left(G_i(\rho_i) \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + (G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i) \rho_i) \psi_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} \right) dx = 0, \quad i = 1, 2;$$

(B3) для любых векторных полей $\bar{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$ выполняются интегральные тождества:

$$\sum_{j=1}^2 \left(\mu_{ij} \int_{\Omega} \nabla \bar{u}^{(j)} : \nabla \bar{\varphi}^{(i)} dx + (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}^{(j)} \operatorname{div} \bar{\varphi}^{(i)} dx \right) - \\ - \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)} : \nabla \bar{\varphi}^{(i)} dx = \\ = \int_{\Omega} \rho_i^\gamma \operatorname{div} \bar{\varphi}^{(i)} dx + \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \bar{\varphi}^{(i)} dx + \\ + \int_{\Omega} (\bar{J}^{(i)} + \rho_i \bar{f}^{(i)}) \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx, \quad i = 1, 2;$$

(B4) для любых функций $\eta_i \in C^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$ выполняются интегральные тождества:

$$- \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \eta_i dx + \int_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) \eta_i d\sigma + \\ + \int_{\Omega} k_i(\theta_i) \nabla \theta_i \cdot \nabla \eta_i dx = 2\mu_{ii} \int_{\Omega} |D(\bar{u}^{(i)})|^2 \eta_i dx + \\ + \frac{\lambda_{ii}}{3} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}^{(i)}|^2 \eta_i dx - \\ - \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} \eta_i dx + \int_{\Omega} \Gamma_i \eta_i dx, \quad i = 1, 2.$$

Основной результат данной работы состоит в доказательстве существования обобщенного решения задачи Б и формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Для любых $\bar{f}^{(i)} \in C(\Omega)$, $i = 1, 2$, $\hat{\theta} \in C(\partial\Omega)$, $\hat{\theta} > 0$, $m > 6(\gamma - 1)(2\gamma - 1)/(\gamma - 3)(6\gamma - 1)$, $\gamma > 3$ краевая задача Б имеет, по крайней мере, одно обобщенное решение.

Доказательству этого утверждения посвящена оставшаяся часть статьи. Ограниченный объем статьи позволяет лишь кратко охарактеризовать основные этапы доказательства. Обобщенное решение задачи $\hat{A}$ будет получено как предел решений следующей краевой задачи:

$$-\varepsilon \Delta \rho_i^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \bar{u}_\varepsilon^{(i)}) + \varepsilon \rho_i^\varepsilon = \varepsilon \frac{M_i}{|\Omega|} \hat{a} \quad \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (1.8)$$

функций будем использовать такие же, как и для скалярных функций, а принадлежность $\bar{u} \in X$ будем понимать как

$$u_i \in X, \quad i = 1, \dots, n, \quad \bar{u} = (u_1, \dots, u_n).$$

$$\sum_{j=1}^2 L_{ij} \bar{u}_\varepsilon^{(j)} + \frac{\varepsilon}{2} \rho_i^\varepsilon \bar{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{M_i}{|\Omega|} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{1}{2} \rho_i^\varepsilon (\bar{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla) \bar{u}_\varepsilon^{(i)} + \\ + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \bar{u}_\varepsilon^{(i)}) + \nabla p_i^\varepsilon = \\ = \bar{J}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon \bar{f}^{(i)} \quad \Omega, \quad i = 1, 2. \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon \bar{u}_\varepsilon^{(i)}) - \operatorname{div} \left(k_i(\theta_i^\varepsilon) \frac{\varepsilon + \theta_i^\varepsilon}{\theta_i^\varepsilon} \nabla \theta_i^\varepsilon \right) = \\ = \hat{\sigma}_\varepsilon^{(i)} : \nabla \bar{u}_\varepsilon^{(i)} - \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} + \Gamma_i^\varepsilon \quad \Omega, \quad i = 1, 2. \quad (1.10)$$

$$\bar{u}_\varepsilon^{(i)} \neq 0, \quad \nabla p_i^\varepsilon \cdot \bar{n} = 0 \quad \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \\ k_i(\theta_i^\varepsilon) \frac{\varepsilon + \theta_i^\varepsilon}{\theta_i^\varepsilon} \nabla \theta_i^\varepsilon \cdot \bar{n} + \\ + \varepsilon \ln \theta_i^\varepsilon + L(\theta_i^\varepsilon)(\theta_i^\varepsilon - \hat{\theta}) = 0 \quad \partial\Omega, \quad i = 1, 2. \quad (1.11)$$

$$\int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon dx = M_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.12)$$

которую условимся называть задачей B_ε . Здесь

$$p_i^\varepsilon = (\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon,$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^{(i)} = 2\mu_{ii} D(\bar{u}_\varepsilon^{(i)}) + \frac{\lambda_{ii}}{3} \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(i)},$$

$$\bar{J}_\varepsilon^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\bar{u}_\varepsilon^{(2)} - \bar{u}_\varepsilon^{(1)}), \quad i = 1, 2,$$

$$\Gamma_1^\varepsilon = b(\theta_2^\varepsilon - \theta_1^\varepsilon),$$

$$\Gamma_2^\varepsilon = -b(\theta_2^\varepsilon - \theta_1^\varepsilon) + a |\bar{u}_\varepsilon^{(1)} - \bar{u}_\varepsilon^{(2)}|^2,$$

$$|\Omega| = \operatorname{meas}(\Omega), \quad \varepsilon \in (0, 1].$$

Сначала мы докажем существование сильного обобщенного решения задачи $\hat{A}_\varepsilon$. Затем совершим предельный переход в слабом смысле в уравнениях (1.8)-(1.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Существование сильного обобщенного решения задачи $\hat{A}_\varepsilon$

Определение 2. Сильным обобщенным решением задачи $\hat{A}_\varepsilon$ называются неотрицательные функции

$$\rho_i^\varepsilon, \theta_i^\varepsilon \in W^{2,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty, \quad \int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon dx = M_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{и}$$

векторные поля $\bar{u}_\varepsilon^{(i)} \in W^{2,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, $i = 1, 2$ такие, что уравнения (1.8)-(1.10) выполнены п.в. в Ω и п.в. на $\partial\Omega$ - краевые условия (1.11).

Теорема 2. Для любых $\bar{f}^{(i)} \in C(\Omega)$, $i = 1, 2$, $\hat{\theta} \in C(\partial\Omega)$, $\hat{\theta} > 0$, $m > 6(\gamma - 1)(2\gamma - 1)/(\gamma - 3)(6\gamma - 1)$, $\gamma > 3$ краевая задача $\hat{A}_\varepsilon$ имеет, по крайней мере, одно сильное обобщенное решение, которое удовлетворяет неравенству:

$$\left(\begin{aligned} & \left\| \rho_i^\varepsilon \right\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \left\| \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \\ & \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \right\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} + \left\| \theta_i^\varepsilon \right\|_{L^{3m}(\Omega)} + \right. \\ & \left. + \left\| \nabla \theta_i^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} (e^{\hat{\sigma}_i^\varepsilon} + e^{-\hat{\sigma}_i^\varepsilon}) d\sigma + \left\| \nabla \hat{\sigma}_i^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned} \right) \leq C, \quad (2.1)$$

где $s_i^\varepsilon = \ln \theta_i^\varepsilon$, $i = 1, 2$, постоянная $C > 0$ зависит только от $\|\tilde{f}^{(i)}\|_{C(\bar{\Omega})}$, $\|\hat{\theta}\|_{C(\partial\Omega)}$, λ_{ij} , μ_{ij} , m , γ , $|\Omega|$, a , b , M_i и не зависит от параметра ε .

Доказательство теоремы 2 проведем, применяя принцип неподвижной точки Лере-Шаудера. С этой целью, рассмотрим следующее семейство краевых задач:

$$-\varepsilon \Delta \rho_i = -\operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)}) - \varepsilon \rho_i + \varepsilon \frac{tM_i}{|\Omega|} \quad \Omega, \\ \nabla \rho_i \cdot \bar{n} = 0 \quad \partial\Omega, \quad d \int_{\Omega} \rho_i tM = i, \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^2 L_{ij} \bar{u}^{(j)} = -\frac{\varepsilon}{2} \rho_i \bar{u}^{(i)} - \varepsilon \frac{tM_i}{2|\Omega|} \bar{u}^{(i)} - \frac{1}{2} \rho_i (\bar{u}^{(i)} \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)} - \\ - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}) - \nabla \rho_i^\gamma - t \nabla (\rho_i e^{s_i}) + \\ + t \bar{J}^{(i)} + t \rho_i \bar{f}^{(i)} \quad \Omega, \quad n \bar{u}^{(i)} = 0 \quad \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

$$-\operatorname{div}((1 + e^{ms_i})(\varepsilon + s_i) \nabla s_i) = t \hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)} - \\ - t \operatorname{div}(\rho_i e^{s_i} \bar{u}^{(i)}) - t \rho_i e^{s_i} \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} + t \Gamma_i \quad \Omega, \\ (1 + e^{ms_i})(\varepsilon + s_i) \nabla s_i \cdot \bar{n} + \varepsilon s_i = \\ = -tL(e^{s_i})(e^{s_i} - \hat{\theta}) \quad \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.4)$$

где $s_i = \ln \theta_i$, $i = 1, 2$, $t \in [0, 1]$. Выводя априорные оценки двухпараметрического семейства решений сформулированных выше краевых задач, чтобы не загромождать запись, индексы ε и t опускаем.

Предположим, что $\rho_i > 0$, s_i , $\bar{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, принадлежащие $W^{2,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ удовлетворяют (2.2)-(2.4). Докажем, что при этом имеет место неравенство (2.1), не зависящее от параметров ε , t . Умножая обе части уравнений (2.3) скалярно на $\bar{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, интегрируя результат по области Ω и суммируя по $i = 1, 2$, получим:

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)} dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \rho_i |\bar{u}^{(i)}|^2 dx + \\ + \varepsilon \frac{tM_i}{2|\Omega|} \int_{\Omega} |\bar{u}^{(i)}|^2 dx + \varepsilon \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{\Omega} \rho_i^\gamma dx + \\ + \varepsilon \gamma \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma-2} |\nabla \rho_i|^2 dx - t \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} dx = \\ = \varepsilon \frac{tM_i}{|\Omega|} \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma-1} dx + \\ + t \int_{\Omega} (\bar{J}^{(i)} + \rho_i \bar{f}^{(i)}) \cdot \bar{u}^{(i)} dx, \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

где $\theta_i = e^{s_i}$, $i = 1, 2$. В силу ограниченности вложения $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $L^6(\Omega)$, из (2.5) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^2 \|\bar{u}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|_{L^6(\Omega)}^2 + \\ + C \sum_{i=1}^2 \|\rho_i \theta_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C, \quad (2.6)$$

с постоянной C , зависящей только от $\|\tilde{f}\|_{C(\bar{\Omega})}^{(i)}$, λ_{ij} , μ_{ij} , γ , $|\Omega|$ и M_i , но не зависящей от параметров ε и t .

Интегрируя теперь по области Ω уравнения (2.4), получаем:

$$t \int_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) d\sigma + \varepsilon \int_{\partial\Omega} s_i d\sigma = t \int_{\Omega} \hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)} dx - \\ - t \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} dx + t \int_{\Omega} \Gamma_i dx, \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

Складывая равенства (2.5) и (2.7), приходим к соотношениям:

$$t \int_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) d\sigma + \varepsilon \int_{\partial\Omega} s_i d\sigma = \\ = \int_{\Omega} (t \hat{\sigma}^{(i)} - \sigma^{(i)}) : \nabla \bar{u}^{(i)} dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \rho_i |\bar{u}^{(i)}|^2 dx - \\ - \varepsilon \frac{tM_i}{2|\Omega|} \int_{\Omega} |\bar{u}^{(i)}|^2 dx - \varepsilon \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{\Omega} \rho_i^\gamma dx - \\ - \varepsilon \gamma \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma-2} |\nabla \rho_i|^2 dx + \varepsilon \frac{tM_i}{|\Omega|} \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma-1} dx + \\ + t \int_{\Omega} (\bar{J}^{(i)} + \rho_i \bar{f}^{(i)}) \cdot \bar{u}^{(i)} dx + t \int_{\Omega} \Gamma_i dx, \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

С другой стороны, разделив обе части уравнений (2.4) на θ_i и интегрируя результат по области Ω , получим следующие равенства:

$$t \int_{\Omega} \frac{\hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)}}{\theta_i} dx + \int_{\Omega} k_i(\theta_i) \frac{\varepsilon + \theta_i}{\theta_i} |\nabla s_i|^2 dx + \\ + t \int_{\partial\Omega} L(\theta_i) \frac{\hat{\theta}}{\theta_i} d\sigma - \varepsilon \int_{\partial\Omega} s_i e^{-s_i} d\sigma - \\ - t \int_{\Omega} (\rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla s_i - \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i) dx + \\ + t \int_{\Omega} \frac{\Gamma_i}{\theta_i} dx = t \int_{\partial\Omega} L(\theta_i) d\sigma, \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Правую часть равенств (2.9) представим в виде:

$$t \int_{\partial\Omega} L(\theta_i) d\sigma = t \int_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) d\sigma + \\ + t \int_{\partial\Omega} L(\theta_i)(1 + \hat{\theta}) d\sigma - t \int_{\partial\Omega} L(\theta_i) \theta_i d\sigma, \quad i = 1, 2 \\ \text{и воспользуемся соотношениями (2.8). Тогда, из (2.9) получаем, что} \\ t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)}}{\theta_i} dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} k_i(\theta_i) \frac{\varepsilon + \theta_i}{\theta_i} |\nabla s_i|^2 dx + \\ + t \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} L(\theta_i) \frac{\hat{\theta}}{\theta_i} d\sigma + t \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} L(\theta_i) \theta_i d\sigma + t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\Gamma_i}{\theta_i} dx + \\ + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i |\bar{u}^{(i)}|^2 dx + \varepsilon \frac{tM_i}{2|\Omega|} \int_{\Omega} |\bar{u}^{(i)}|^2 dx + \varepsilon \frac{\gamma}{\gamma-1} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i^\gamma dx + \\ + \varepsilon \gamma \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma-2} |\nabla \rho_i|^2 dx + \varepsilon t \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} (s_i^- e^{s_i^-} + s_i^+) d\sigma = \\ = t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla s_i - \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i) dx + t \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} L(\theta_i)(1 + \hat{\theta}) d\sigma + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (t \hat{\sigma}^{(i)} - \sigma^{(i)}) : \nabla \bar{u}^{(i)} dx + \varepsilon \frac{tM_i}{|\Omega|} \frac{\gamma}{\gamma-1} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma-1} dx +$$

$$+t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i \bar{f}^{(i)} \cdot \bar{u}^{(i)} dx + \varepsilon t \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} \left(s_i^+ e^{-s_i^+} + s_i^- \right) d\sigma, \quad (2.10)$$

где $s_i^+ = \frac{|s_i| + s_i}{2}$, $s_i^- = \frac{|s_i| - s_i}{2}$, $i = 1, 2$. В левой части (2.10) все слагаемые неотрицательны. Этот факт вытекает из следующих соотношений:

$$\hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)} \geq 0 \Leftrightarrow \mu_{ii} > 0, \lambda_{ii} + 2\mu_{ii} > 0, i = 1, 2,$$

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\Gamma_i}{\theta_i} = b \frac{|\theta_1 - \theta_2|^2}{\theta_1 \theta_2} + a \frac{|\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(2)}|^2}{\theta_2}.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (2.10). Используя уравнения (2.2), получаем:

$$\begin{aligned} & t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla s_i - \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i) dx = \\ & = t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \rho_i \cdot \nabla s_i + \varepsilon \rho_i \ln \theta_i - \varepsilon t \frac{M_i}{|\Omega|} \ln \theta_i - \\ & - \varepsilon \frac{|\nabla \rho_i|^2}{\rho_i} - \varepsilon \rho_i \ln \rho_i + \varepsilon t \frac{M_i}{|\Omega|} \ln \rho_i) dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу оценок:

$$\begin{aligned} & \varepsilon t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla \rho_i \cdot \nabla s_i dx \leq \frac{\varepsilon \gamma}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma-2} |\nabla \rho_i|^2 dx + \\ & + \varepsilon t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla \rho_i|^2}{\rho_i} dx + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \|\nabla s_i\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ & - \varepsilon t^2 \frac{M_i}{|\Omega|} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \ln \theta_i dx \leq - \varepsilon t^2 \frac{M_i}{|\Omega|} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} s_i^+ dx + \\ & + \frac{\varepsilon t}{4} \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} s_i^- e^{s_i^-} d\sigma + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \|\nabla s_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + tC, \\ & t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\varepsilon \rho_i \ln \theta_i - \varepsilon \rho_i \ln \rho_i + \\ & + \varepsilon t \frac{M_i}{|\Omega|} \ln \rho_i) dx \leq t \|\rho_i \theta_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + tC \end{aligned}$$

из (2.11) следует неравенство:

$$\begin{aligned} & t \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla s_i - \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i) dx \leq \frac{\varepsilon \gamma}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma-2} |\nabla \rho_i|^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla s_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + t \|\rho_i \theta_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + tC. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь последнее слагаемое в правой части (2.10). Используя оценки

$$s_i^- \leq \frac{1}{8} s_i^- e^{s_i^-} + 1, \quad s_i^+ e^{-s_i^+} \leq \frac{1}{8} s_i^- e^{s_i^-} - s_i^- + 1, \quad i = 1, 2,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} & \varepsilon t \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} \left(s_i^+ e^{-s_i^+} + s_i^- \right) d\sigma \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon t}{4} \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} s_i^- e^{s_i^-} d\sigma - \varepsilon t \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} s_i^- d\sigma + tC. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким образом, в силу (2.12), (2.13), из формулы (2.10) получим неравенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{1 + \theta_i^m}{\theta_i^2} |\nabla \theta_i|^2 dx + \\ & + t \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} \left(L(\theta_i) \frac{\hat{\theta}}{\theta_i} + L(\theta_i) \theta_i + \varepsilon |s_i| \right) d\sigma \leq \\ & \leq tC \left(\sum_{i=1}^2 \|\bar{u}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|_{L^6(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i \theta_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из неравенства (2.14), в силу вложения $W^{1,2}(\Omega)$ в $L^6(\Omega)$, следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \|\theta_i\|_{L^{3m}(\Omega)}^m \leq \\ & \leq C \left(\sum_{i=1}^2 \|\bar{u}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|_{L^6(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i \theta_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1 \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для вывода других оценок решений задач (2.2)-(2.4) заметим, что из уравнений (2.3) следуют интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \left(\mu_{ij} \int_{\Omega} \nabla \bar{u}^{(j)} : \nabla \bar{\varphi}^{(i)} dx + (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}^{(j)} \operatorname{div} \bar{\varphi}^{(i)} dx \right) + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx + \varepsilon \frac{tM_i}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_i (\bar{u}^{(i)} \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)} : \nabla \bar{\varphi}^{(i)} dx - \\ & - \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma} \operatorname{div} \bar{\varphi}^{(i)} dx - t \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \bar{\varphi}^{(i)} dx = \\ & = \int_{\Omega} (t \bar{J}^{(i)} + t \rho_i \bar{f}^{(i)}) \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx, \end{aligned} \quad (2.16)$$

справедливые для любых векторных полей $\bar{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$. Возьмем в качестве пробных функций $\bar{\varphi}^{(i)}$ в тождествах (3.16) такие, что

$$\operatorname{div} \bar{\varphi}^{(i)} = \rho_i^{\gamma} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma} dx, \quad \bar{\varphi}^{(i)} = 0 \quad \partial\Omega, \quad i = 1, 2.$$

В результате получаем соотношения:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_i^{2\gamma} dx = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} \rho_i^{\gamma} dx \right)^2 + \frac{t}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma} dx \int_{\Omega} \rho_i \theta_i dx - \\ & - t \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma+1} \theta_i dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx + \\ & + \varepsilon \frac{tM_i}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_i (\bar{u}^{(i)} \cdot \nabla) \bar{u}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx + \\ & + \sum_{j=1}^2 \left(\mu_{ij} \int_{\Omega} \nabla \bar{u}^{(j)} : \nabla \bar{\varphi}^{(i)} dx + (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}^{(j)} \operatorname{div} \bar{\varphi}^{(i)} dx \right) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)} : \nabla \bar{\varphi}^{(i)} dx - \\ & - \int_{\Omega} t \bar{J}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx - t \int_{\Omega} \rho_i \bar{f}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В силу неравенства

$$\|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^{\gamma} \quad (\text{см. [12]}) \quad \text{из (2.17),}$$

следует, что при $m > 1$, $\gamma > 3$

$$\begin{aligned} \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^\gamma &\leq C\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}} + C\|\bar{u}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)}} + \\ &+ C\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C\sum_{j=1}^2\|\bar{u}^{(j)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + \\ &+ C\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}\|\theta_i\|_{L^{3m}(\Omega)}^m + C, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где постоянная C не зависит от параметров ε и t . Из (2.18), в свою очередь, получаем, что

$$\begin{aligned} \|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^\gamma &\leq C\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}} + \\ &+ C\left(\sum_{j=1}^2\|\bar{u}^{(j)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2\right)\sum_{i=1}^2\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)}} + \\ &+ C\sum_{j=1}^2\|\bar{u}^{(j)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + \\ &+ C\left(\sum_{j=1}^2\|\theta_j\|_{L^{3m}(\Omega)}^m\right)\sum_{i=1}^2\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \\ &+ C\sum_{i=1}^2\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + C, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Используя неравенства

$$\begin{aligned} C\sum_{i=1}^2\|\rho_i\theta_i\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^2\|\theta_i\|_{L^{3m}(\Omega)}^m + \\ &+ C\sum_{i=1}^2\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)}\frac{m}{m-2}}, \\ \sum_{i=1}^2\|\rho_i\|_{L^6(\Omega)}^2 &\leq C(M_i)\sum_{i=1}^2\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

получаем теперь из (2.6), (2.15) и (2.19) соотношение:

$$\begin{aligned} [R(\bar{\rho})]^\gamma &\leq C[R(\bar{\rho})]^\gamma \frac{2\gamma-3}{2\gamma-1} + C[R(\bar{\rho})]^\gamma \frac{8\gamma-3}{6\gamma-3} + \\ &+ C[R(\bar{\rho})]^\gamma \frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)} \frac{m}{m-2} + 1 + C[R(\bar{\rho})]^\gamma \frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)} + \\ &+ C[R(\bar{\rho})]^\gamma \frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)} \frac{m}{m-2} + C[R(\bar{\rho})]^\gamma \frac{7\gamma}{3(2\gamma-1)} + \\ &+ C[R(\bar{\rho})]^\gamma \frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)} \frac{m}{m-2} + \frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)} + \\ &+ C[R(\bar{\rho})]^\gamma \frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)} + CR(\bar{\rho}) + C, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $R(\bar{\rho}) = \sum_{i=1}^2\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}$, $\bar{\rho} = (\rho_1, \rho_2)$. Далее, так как

при $m > \frac{6(\gamma-1)(2\gamma-1)}{(\gamma-3)(6\gamma-1)}$, $\gamma > 3$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \gamma &> \max\{1, \gamma \frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}, \frac{8\gamma-3}{6\gamma-3}, \frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)} \frac{m}{m-2} + 1, \\ &\frac{2\gamma}{3(2\gamma-1)}, \frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)} \frac{m}{m-2}, \frac{7\gamma}{3(2\gamma-1)}, \\ &\frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)} \frac{m}{m-2} + \frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)}, \frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)}\}, \end{aligned}$$

то из (2.21) получаем первую априорную оценку решений краевых задач (2.2)-(2.4):

$$R(\bar{\rho}) = \sum_{i=1}^2\|\rho_i\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} \leq C. \quad (2.22)$$

Далее, из (2.15) и оценок (2.20) и (2.22) вытекает неравенство:

$$\sum_{i=1}^2\|\theta_i\|_{L^{3m}(\Omega)}^m \leq C\sum_{i=1}^2\|\bar{u}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + C. \quad (2.23)$$

Из (2.6) и оценок (2.20), (2.22) получим, что

$$C\sum_{i=1}^2\|\bar{u}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^2\|\theta_i\|_{L^{3m}(\Omega)}^m + C. \quad (2.24)$$

Таким образом, из соотношений (2.23), (2.24) следует априорная оценка:

$$\sum_{i=1}^2\left(\|\bar{u}^{(i)}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + \|\theta_i\|_{L^{3m}(\Omega)}^m\right) \leq C. \quad (2.25)$$

В силу неравенств $\frac{1+\theta_i^m}{\theta_i^2} \geq 1$, $m > 2$, $i=1,2$ и

соотношений (2.22), (2.25), получим теперь из (2.14) оценку:

$$\sum_{i=1}^2\|\nabla\theta_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (2.26)$$

Осталось заметить, что из априорных оценок (2.22), (2.25) и (2.26), неравенства (2.14) и соотношений (см. [5])

$$\sum_{i=1}^2\|\varepsilon\nabla\rho_i\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}} \leq \left(1 + \sum_{i=1}^2\|\rho_i\bar{u}^{(i)}\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}\right) \leq C$$

следует неравенство (2.1) с постоянной C , не зависящей от параметров ε и t .

Далее, в силу неравенства (2.1) и классических результатов о регулярности решений эллиптических дифференциальных уравнений и систем уравнений [1, 2, 13, 14, 15, 25, 24, 17], из (2.2)-(2.4) следует, что

$$\sum_{i=1}^2\left(\|\rho_i\|_{W^{2,q}(\Omega)} + \|\bar{u}^{(i)}\|_{W^{2,q}(\Omega)} + \|\theta_i\|_{W^{2,q}(\Omega)}\right) < C(\varepsilon), \quad (2.27)$$

$1 \leq q < \infty$.

Априорная оценка (2.27) позволяет доказать существование сильного обобщенного решения задачи $\hat{A}_\varepsilon$ при помощи принципа неподвижной точки Лере-Шаудера. С этой целью рассмотрим семейство отображений $(u, \rho, s) = \Psi(t, u^*, \rho^*, s^*)$, $u = (\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)})$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $u^* = (\bar{u}_*^{(1)}, \bar{u}_*^{(2)})$, $\rho^* = (\rho_1^*, \rho_2^*)$, $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ из $W^{1,\infty}(\Omega)$ в $W^{2,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, определенных как решение краевых задач:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta\rho_i &= -\operatorname{div}(\rho_i\bar{u}_*^{(i)}) - \varepsilon\rho_i + \varepsilon\frac{tM_i}{|\Omega|} \quad \Omega, \\ \nabla\rho_i \cdot \vec{n} &= 0 \quad \partial\Omega, \quad d\int_\Omega \rho_i tM = i, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 L_{ij}\bar{u}^{(j)} &= -\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\bar{u}_*^{(i)} - \varepsilon\frac{tM_i}{2|\Omega|}\bar{u}_*^{(i)} - \frac{1}{2}\rho_i(\bar{u}_*^{(i)} \cdot \nabla)\bar{u}_*^{(i)} - \\ &- \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i\bar{u}_*^{(i)} \otimes \bar{u}_*^{(i)}) - \nabla\rho_i^\gamma - t\nabla(\rho_i e^{s_i^*}) + t\bar{J}_*^{(i)} + \\ &t\rho_i \bar{f}^{(i)} \quad u \in \Omega, \quad \bar{u}_*^{(i)} = 0 \quad \partial\Omega, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{div}((1+e^{ms_i^*})(\varepsilon+s_i^*)\nabla s_i) = t\hat{\sigma}_*^{(i)} : \nabla \bar{u}_*^{(i)} - \\
& t\operatorname{div}(\rho_i e^{s_i^*} \bar{u}_*^{(i)}) - t\rho_i e^{s_i^*} \operatorname{div} \bar{u}_*^{(i)} + t\Gamma_i^* \quad \Omega, \quad = 1, 2, \\
& (1+e^{ms_i^*})(\varepsilon+s_i^*)\nabla s_i \cdot \vec{n} + \varepsilon s_i = \\
& = -tL(e^{s_i^*} \hat{a} - \hat{a}) \quad \partial\Omega, \quad = 1, 2, \quad (2.30)
\end{aligned}$$

где $\bar{J}_*^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\bar{u}_*^{(2)} - \bar{u}_*^{(1)})$,

$$\hat{\sigma}_*^{(i)} = 2\mu_{ii} D(\bar{u}_*^{(i)}) + \frac{\lambda_{ii}}{3} \operatorname{div} \bar{u}_*^{(i)} I, \quad i = 1, 2,$$

$$\Gamma_1^* = b(e^{s_2^*} - e^{s_1^*}), \quad \Gamma_2^* = -b(e^{s_2^*} - e^{s_1^*}) + a|\bar{u}_*^{(1)} - \bar{u}_*^{(2)}|^2.$$

Если функции $u^*, \rho^*, s^* \in W^{1,\infty}(\Omega)$, то существование и единственность полей плотностей $\rho_i > 0$, принадлежащих $W^{2,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, следует из результатов работы [5]. Существование и единственность векторных полей $\bar{u}^{(i)}$, принадлежащих $W^{2,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, вытекает из результатов о разрешимости краевых задач для сильно эллиптических систем уравнений (см. [14, 15, 25, 24]). А результаты о существовании, единственности и принадлежности скалярных полей s_i пространству $W^{2,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ имеются в работах [8], [17].

Для решений (2.28)-(2.30) справедлива априорная оценка (2.27). Выберем число q так, чтобы имело место вложение $W^{2,q}(\Omega)$ в $W^{1,\infty}(\Omega)$. Тогда, справедлива оценка:

$$\sum_{i=1}^2 \left(\|\rho_i\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|\bar{u}^{(i)}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \left\| \begin{matrix} s_i \\ \theta_i \end{matrix} \right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \right) < C(\varepsilon). \quad (2.31)$$

Обозначим через M подмножество в $W^{1,\infty}(\Omega)$, определенное неравенством (2.31). Ясно, что отображение $\Psi: [0,1] \times M \rightarrow W^{2,q}(\Omega)$ непрерывно. Следовательно, оператор $\Psi: [0,1] \times M \rightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ непрерывен и компактен. Легко видеть, что $\Psi(0, \cdot) \equiv 0$. Неравенство (2.31) означает, что отображение $\Psi(t, \cdot)$ не имеет неподвижных точек на границе множества M для любого $t \in [0,1]$. В силу теоремы Лере-Шаудера, можно утверждать, что уравнение $(u, \rho, s) = \Psi(1, u, \rho, s)$ имеет решение $u, \rho, s \in M \cap W^{2,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$. Осталось заметить, что это решение удовлетворяет неравенству (2.1). Теорема 2 доказана.

II. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

В предыдущей части работы рассматривалась регуляризация задачи $\hat{A}$ об установившемся движении двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей, получены равномерные по параметру регуляризации оценки последовательности приближенных решений. В этой части работы мы дадим обоснование

предельному переходу последовательности решений регуляризованной задачи к решению задачи $\hat{A}$.

3. Предельный переход

В силу априорной оценки (2.1) из последовательностей решений ρ_i^ε , θ_i^ε , $\bar{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$ задачи $\hat{A}_\varepsilon$ можно извлечь подпоследовательности, за которыми сохраним прежние обозначения такие, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\rho_i^\varepsilon \rightarrow \rho_i \text{ слабо в } L^{2\gamma}(\Omega), \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

$$\theta_i^\varepsilon \rightarrow \theta_i \text{ слабо в } W^{1,2}(\Omega) \cap L^{3m}(\Omega), \quad i = 1, 2, \quad (3.2)$$

$$\bar{u}_\varepsilon^{(i)} \rightharpoonup \bar{u}^{(i)} \text{ в } W_0^{1,2}(\Omega), \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

и, следовательно,

$$\theta_i^\varepsilon \rightarrow \theta_i \text{ сильно в } L^q(\Omega), \quad q \in [1; 3m], \quad i = 1, 2, \quad (3.4)$$

$$\bar{u}_\varepsilon^{(i)} \rightharpoonup \bar{u}^{(i)} \text{ в } L^q(\Omega), \quad q \in [1; 6], \quad i = 1, 2. \quad (3.5)$$

Кроме того, из (2.1) и (2.5) при $t = 1$ следует неравенство:

$$\varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_\Omega (\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2} |\nabla \rho_i^\varepsilon|^2 dx \leq C, \quad (3.6)$$

где постоянная C не зависит от параметра ε . Из этого неравенства и из уравнений (1.8) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \frac{6\gamma}{\gamma+3}, \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

Действительно, из оценки (3.6) следует, что для любого $\delta > 0$ (при $\gamma \geq 2$)

$$\left\| \varepsilon |\nabla \rho_i^\varepsilon| I_{\{\rho_i^\varepsilon \geq \delta\}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} \delta^{1-\frac{\gamma}{2}}, \quad i = 1, 2, \quad (3.8)$$

где I_K - характеристическая функция множества K . С другой стороны, из уравнений (1.8) получим, что

$$\left\| \varepsilon |\nabla \rho_i^\varepsilon| I_{\{\rho_i^\varepsilon < \delta\}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + (\varepsilon \delta)^{\frac{1}{2}} \right), \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

Таким образом, из неравенств (3.8), (3.9) с

$$\delta = \varepsilon^\alpha, \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{\gamma-2} \right) \text{ получаем, что}$$

$$\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.10)$$

откуда в силу оценки (2.1) и следуют соотношения (3.7).

Переходя к пределу по выбранным подпоследовательностям в уравнениях (1.8)-(1.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что предельные функции $\rho_i \in L^{2\gamma}(\Omega)$, $\rho_i > 0$, $\int_\Omega \rho_i dx = M_i$,

$$\theta_i \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{3m}(\Omega), \quad \theta_i > 0, \quad \bar{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad i = 1, 2$$

при $m > \frac{6(\gamma-1)(2\gamma-1)}{(\gamma-3)(6\gamma-1)}$, $\gamma > 3$ удовлетворяют в

слабом смысле следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)}) \neq 0 \quad \Omega, \quad = 1, 2, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 L_{ij} \bar{u}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i \bar{u}^{(i)} \otimes \bar{u}^{(i)}) + \\
& + \nabla \left(\overline{\rho_i^\gamma} + \rho_i \theta_i \right) = \bar{J} \delta + \rho_i \bar{f}^{(i)} \quad \Omega, \quad = 1, 2, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \theta_i \bar{u}^{(i)}) - \operatorname{div}(k_i(\theta_i) \nabla \theta_i) = \overline{\hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)}} - \overline{\theta_i \rho_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)}} + \Gamma_i \quad \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (3.13)$$

где $\overline{\rho_i^\gamma}$, $\overline{\rho_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)}}$, $\overline{\hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)}}$ обозначают слабые пределы соответственно последовательностей $(\rho_i^\varepsilon)^\gamma$, $\rho_i^\varepsilon \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(i)}$, $\hat{\sigma}_\varepsilon^{(i)} : \nabla \bar{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$ в пространствах $L^2(\Omega)$, $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ и $L^1(\Omega)$.

Для завершения доказательства теоремы 1 требуется, таким образом, доказать формулы:

$$\overline{\rho_i^\gamma} = \rho_i^\gamma, \quad i = 1, 2, \quad (3.14)$$

$$\overline{\rho_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)}} = \rho_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (3.15)$$

$$\overline{\hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)}} = \hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (3.16)$$

Следующая лемма показывает слабую регулярность так называемых эффективных вязких потоков компонентов смеси, которые определяются формулами:

$$p_i - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \bar{u}^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \bar{u}^{(2)}, \quad i = 1, 2,$$

где $p_i = \rho_i^\gamma + \rho_i \theta_i$.

Лемма 1. Пусть ρ_i^ε , θ_i^ε , $\bar{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$ - последовательности решений задачи $\hat{A}_\varepsilon$, существование которых гарантируется теоремой 2, и пусть ρ_i , θ_i , $\bar{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$ их пределы, определенные в (3.1), (3.2) и (3.3) соответственно.

Тогда, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} \rho_j^\varepsilon \left[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(2)} \right] \tau^2 dx \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_j^\varepsilon \left[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(2)} \right] \tau^2 dx = \\ & = \int_{\Omega} \rho_j^\varepsilon \left[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(2)} \right] \tau^2 dx - \\ & - \int_{\Omega} (\rho_i^\varepsilon)^\gamma \Delta(\tau) \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau) dx - 2 \int_{\Omega} (\rho_i^\varepsilon)^\gamma \nabla \tau \cdot \nabla \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau) dx - \\ & - \int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon \Delta(\tau) \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau) dx - 2 \int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon \nabla \tau \cdot \nabla \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau) dx + \\ & + \sum_{k=1}^2 (\lambda_{ik} + 2\mu_{ik}) \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(k)} \Delta(\tau) \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau) dx + 2 \sum_{k=1}^2 (\lambda_{ik} + 2\mu_{ik}) \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(k)} \nabla \tau \cdot \nabla \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau) dx - \\ & - \int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \bar{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla (\nabla (\tau \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau))) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \cdot \nabla) \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla (\tau \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau)) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \otimes \bar{u}_\varepsilon^{(i)} : \nabla (\nabla (\tau \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau))) dx - \int_{\Omega} [-\varepsilon \rho_i^\varepsilon \bar{u}_\varepsilon^{(i)} + \bar{J}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon \bar{f}^{(i)}] \cdot \nabla (\tau \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau)) dx, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (3.20). В силу (2.1), получим:

$$\int_{\Omega} (\rho_i^\varepsilon)^\gamma \rho_j \tau^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \bar{\rho}_i \rho_j \tau^2 dx \quad i \neq j \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon \rho_j \tau^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \bar{\rho}_i \theta_i \rho_j \tau^2 dx \quad i = j \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.22)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \rho_j \tau^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} \rho_j \tau^2 dx \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.23)$$

Все остальные слагаемые в правой части (3.20) стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это вытекает из свойств операторов Δ^{-1} , A_k , A_{ks} , $k, s = 1, 2, 3$,

$$\rightarrow \int_{\Omega} \rho_j \left[\begin{aligned} & \rho_i^\gamma + \rho_i \theta_i - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \bar{u}^{(1)} - \\ & - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \bar{u}^{(2)} \end{aligned} \right] \tau^2 dx \quad (3.17)$$

$\forall \tau \in C_0^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, 2$.

Доказательство. Рассмотрим линейные ограниченные операторы:

$$A_k : L^p(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\Omega), \quad A_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.18)$$

$$A_{ks} : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega), \quad A_{ks} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_s} \Delta^{-1}, \quad k, s = 1, 2, 3, \quad (3.19)$$

где для произвольной функции $v \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, продолженной нулем в $R^3 \setminus \Omega$, оператор

$$\Delta^{-1}(v) = -\frac{1}{3\omega_3} \int_{R^3} \frac{v(y)}{|x-y|} dy, \quad \omega_3 = \frac{2\pi^{3/2}}{3\Gamma(3/2)} > 0 \quad \text{при}$$

$p > \frac{3}{2}$ является вполне непрерывным оператором из $L^p(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$ [23].

Пусть $\bar{\varphi}^{(j)} = \nabla(\tau \Delta^{-1}((\rho_j^\varepsilon - \rho_j) \tau))$, $j = 1, 2$, где τ - произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$ и все рассматриваемые функции считаем продолженными нулем в $R^3 \setminus \Omega$. Приняв данные вектор-функции $\bar{\varphi}^{(j)}$ в качестве тестовых, из уравнений (1.9) получаем соотношения:

соотношений (3.1)-(3.3) и оценки (2.1). Лемма 1 доказана.

Следствием леммы 1 является следующее важное утверждение.

Лемма 2. Пусть ρ_i^ε , θ_i^ε , $\bar{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i=1,2$ - последовательности решений задачи $\bar{A}_\varepsilon$, существование которых гарантируется теоремой 2, и пусть ρ_i , θ_i , $\bar{u}^{(i)}$, $i=1,2$ их пределы, определенные в (3.1), (3.2) и (3.3) соответственно. Тогда, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\bar{A} \left(\frac{(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon \theta_1^\varepsilon}{(\rho_2^\varepsilon)^\gamma + \rho_2^\varepsilon \theta_2^\varepsilon} \right) \cdot (\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) - \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(1)} \rho_1^\varepsilon - \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(2)} \rho_2^\varepsilon \right] \tau^2 dx \\ & \rightarrow \int_{\Omega} \left[\bar{A} \left(\frac{(\rho_1)^\gamma + \rho_1 \theta_1}{(\rho_2)^\gamma + \rho_2 \theta_2} \right) \cdot (\rho_1, \rho_2) - \operatorname{div} \bar{u}^{(1)} \rho_1 - \operatorname{div} \bar{u}^{(2)} \rho_2 \right] \tau^2 dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} + 2\mu_{11} & \lambda_{12} + 2\mu_{12} \\ \lambda_{21} + 2\mu_{21} & \lambda_{22} + 2\mu_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Докажем теперь равенства (3.14). Отметим сначала следующее утверждение [3].

Предложение 1. Пусть ρ , $\bar{u}$ - решение уравнения $\operatorname{div}(\rho \bar{u}) = 0$ в $D'(\Omega)$ такое, что $\rho \in L^2(\Omega)$, $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда, продолжая ρ и $\bar{u}$ нулем в $R^3 \setminus \Omega$ получим, что продолженные функции являются решением данного уравнения в $D'(R^3)$, т.е. для любых функций $\psi \in C_0^\infty(R^3)$ выполнено тождество

$$\int_{R^3} \rho \bar{u} \cdot \nabla \psi dx = 0. \quad (3.25)$$

В силу предложения 1, из уравнений (3.11) следует (считая ρ_i , $\bar{u}^{(i)}$, $i=1,2$ продолженными нулем в $R^3 \setminus \Omega$), что для любых $\psi_i \in C_0^\infty(R^3)$, $i=1,2$ выполняются равенства

$$\int_{R^3} \rho_i \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i dx = 0, \quad i=1,2. \quad (3.26)$$

Введем в рассмотрение оператор усреднения:

$$S_h[v] = \frac{1}{h^3} \int_{R^3} \theta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) v(y) dy,$$

(где $\theta(t)$ - бесконечно дифференцируемая, четная неотрицательная функция одного переменного t ($-\infty < t < +\infty$), равная нулю для $|t| \geq 1$ и такая, что $\int_{R^3} \theta(|t|) dt = 1$, h - произвольное положительное число), обладающий следующими свойствами [19], [5]:

1) если $v \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ и $v = 0$ в $R^3 \setminus \Omega$, то $\|S_h[v]\|_{L^p(R^3)} \leq C \|v\|_{L^p(\Omega)}$ $\|S_h[v] - v\|_{L^p(R^3)} \rightarrow 0 \rightarrow 0$;

2) если $\rho \in L^p(R^3)$, $\bar{u} \in W^{1,q}(R^3)$, $1 < q$,

$$p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\delta} < 1, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} & \|\operatorname{div}(S_h[\rho \bar{u}]) - \operatorname{div}(S_h[\rho] \bar{u})\|_{L^\delta(R^3)} \leq \\ & \leq C \|\rho\|_{L^p(R^3)} \|\bar{u}\|_{W^{1,q}(R^3)} \end{aligned}$$

$$\left| \int_{R^3} (G_i(S_h[\rho_i]) - G_i(\rho_i)) \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i dx \right| \leq C \|S_h[\rho_i] - \rho_i\|_{L^2(R^3)} \rightarrow 0 \rightarrow 0, \quad i=1,2; \quad (3.31)$$

$$\|\operatorname{div}(S_h[\rho \bar{u}]) - \operatorname{div}(S_h[\rho] \bar{u})\|_{L^\delta(R^3)} \rightarrow 0 \rightarrow 0.$$

Приняв в качестве тестовых функций в (3.26)

$$\text{функции } \psi_i = \frac{1}{h^3} \theta\left(\frac{|x-y|}{h}\right), \quad i=1,2, \text{ получаем}$$

равенства

$$\operatorname{div}(S_h[\rho_i] \bar{u}^{(i)}) = r_i^h, \quad i=1,2, \quad (3.27)$$

где

$$r_i^h = \operatorname{div}(S_h[\rho_i] \bar{u}^{(i)}) - \operatorname{div}(S_h[\rho_i] \bar{u}^{(i)}) \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

в $L^1(R^3)$, $i=1,2$ согласно свойству 2). Теперь, умножая уравнения (3.27) на $G_i'(S_h[\rho_i])$ ($G_i(\rho_i) \in C'(R)$ - произвольная функция как в условии (Б2) определения 1), получаем:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(G_i(S_h[\rho_i]) \bar{u}^{(i)}) + (G_i'(S_h[\rho_i]) S_h[\rho_i] - \\ & - G_i'(S_h[\rho_i]) \operatorname{div}(\bar{u}^{(i)})) = r_i^h G_i'(S_h[\rho_i]), \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из (3.28) следует, что для произвольных функций $\psi_i \in C^1(R^3)$, $i=1,2$, имеют место тождества:

$$\begin{aligned} & \int_{R^3} G_i(S_h[\rho_i]) \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i dx + \int_{R^3} (G_i(S_h[\rho_i]) - \\ & - G_i'(S_h[\rho_i]) S_h[\rho_i]) \operatorname{div}(\bar{u}^{(i)}) \psi_i dx + \\ & + \int_{R^3} r_i^h G_i'(S_h[\rho_i]) \psi_i dx = 0, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Совершая в тождествах (3.29) предельный переход при $h \rightarrow 0$, приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} & \int_{R^3} G_i(\rho_i) \bar{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i dx + \\ & + \int_{R^3} (G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i) \rho_i) \operatorname{div}(\bar{u}^{(i)}) \psi_i dx = 0, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (3.30)$$

которые справедливы для всех $\psi_i \in C^1(R^3)$, $i=1,2$.

Этот факт вытекает из следующих соотношений для отдельных слагаемых в (3.29):

$$\left| \int_{R^3} ((G'_i(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i] - G_i(S_h[\rho_i]) - (G'_i(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i))) \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} \psi_i) dx \right| \leq C \|(G'_i(S_h[\rho_i])S_h[\rho_i] - G_i(S_h[\rho_i]) - (G'_i(\rho_i)\rho_i - G_i(\rho_i)))\|_{L^2(R^3)} \rightarrow 0 \rightarrow 0, \quad i=1,2; \quad (3.32)$$

$$\left| \int_{R^3} r_i^h G'_i(S_h[\rho_i]) \psi_i dx \right| \leq C \|r_i^h\|_{L^1(R^3)} \rightarrow 0 \rightarrow 0, \quad i=1,2. \quad (3.33)$$

Таким образом, предельные функции ρ_i , $i=1,2$ являются ренормализованными решениями уравнений (1.1).

Можно убедиться, что соотношения (3.31)-(3.33) справедливы также в том случае, если принять в качестве $G_i(z) = z \ln z$, $i=1,2$. Следовательно, из (3.29) вытекают равенства:

$$\int_{\Omega} \rho_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} dx = 0, \quad i=1,2. \quad (3.34)$$

С другой стороны, из (1.8) следуют оценки:

$$\int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} dx \leq \varepsilon \frac{M_i^2 + M_i |\Omega| + |\Omega|^2}{|\Omega|} = \varepsilon C, \quad (3.35)$$

$i=1,2$.

Действительно, умножая обе части уравнений (1.8) на $\ln \rho_i^\varepsilon + 1$ получаем, что

$$\int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(i)} dx \leq \varepsilon \frac{M_i}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\ln \rho_i^\varepsilon + 1) dx - \varepsilon \int_{\Omega} \rho_i^\varepsilon (\ln \rho_i^\varepsilon + 1) dx, \quad i=1,2,$$

откуда, учитывая неравенства

$$\ln z + 1 \leq z, \quad -z(\ln z + 1) < z + 1, \text{ следует}$$

справедливость оценок (3.35).

Возьмем теперь неубывающую последовательность функций τ_n такую, что $\tau_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tau_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq \tau_n \leq 1$. Объединяя лемму 2, (3.34) и (3.35), получаем:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \tilde{A} \left(\frac{(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon \theta_1^\varepsilon}{(\rho_2^\varepsilon)^\gamma + \rho_2^\varepsilon \theta_2^\varepsilon} \right) \cdot (\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) dx \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\frac{(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon \theta_1^\varepsilon}{(\rho_2^\varepsilon)^\gamma + \rho_2^\varepsilon \theta_2^\varepsilon} \right) \cdot (\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) \tau_n^2 dx \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \tau_n^2 \left[\tilde{A} \left(\frac{(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon \theta_1^\varepsilon}{(\rho_2^\varepsilon)^\gamma + \rho_2^\varepsilon \theta_2^\varepsilon} \right) \cdot (\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) - \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(1)} \rho_1^\varepsilon - \right. \\ & \left. - \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(2)} \rho_2^\varepsilon \right] dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \tau_n^2 \rho_1^\varepsilon \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(1)} dx + \\ & + \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \tau_n^2 \rho_2^\varepsilon \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(2)} dx \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tau_n^2 \left[\tilde{A} \left(\frac{(\rho_1)^\gamma + \rho_1 \theta_1}{(\rho_2)^\gamma + \rho_2 \theta_2} \right) \cdot (\rho_1, \rho_2) - \operatorname{div} \bar{u}^{(1)} \rho_1 - \right. \\ & \left. - \operatorname{div} \bar{u}^{(2)} \rho_2 \right] dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_1^\varepsilon \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(1)} dx + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_2^\varepsilon \operatorname{div} \bar{u}_\varepsilon^{(2)} dx \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \int_{\Omega} \tilde{A} \left(\frac{(\rho_1)^\gamma + \rho_1 \theta_1}{(\rho_2)^\gamma + \rho_2 \theta_2} \right) \cdot (\rho_1, \rho_2) dx - \\ & - \int_{\Omega} \rho_1 \operatorname{div} \bar{u}^{(1)} dx - \int_{\Omega} \rho_2 \operatorname{div} \bar{u}^{(2)} dx = \\ & = \int_{\Omega} \tilde{A} \left(\frac{(\rho_1)^\gamma + \rho_1 \theta_1}{(\rho_2)^\gamma + \rho_2 \theta_2} \right) \cdot (\rho_1, \rho_2) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \tilde{A} \left(\frac{(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon \theta_1^\varepsilon}{(\rho_2^\varepsilon)^\gamma + \rho_2^\varepsilon \theta_2^\varepsilon} \right) \cdot (\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \tilde{A} \left(\frac{(\rho_1)^\gamma + \rho_1 \theta_1}{(\rho_2)^\gamma + \rho_2 \theta_2} \right) \cdot (\rho_1, \rho_2) dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\tilde{A} \left(\frac{(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon \theta_1^\varepsilon}{(\rho_2^\varepsilon)^\gamma + \rho_2^\varepsilon \theta_2^\varepsilon} \right) - \tilde{A} \left(\frac{(\tilde{\rho}_1)^\gamma + \tilde{\rho}_1 \theta_1^\varepsilon}{(\tilde{\rho}_2)^\gamma + \tilde{\rho}_2 \theta_2^\varepsilon} \right) \right) \cdot \\ & \cdot ((\rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon) - (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)) dx \geq 0, \end{aligned}$$

то, в силу (3.36), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\tilde{A} \left(\frac{(\rho_1)^\gamma + \rho_1 \theta_1}{(\rho_2)^\gamma + \rho_2 \theta_2} \right) - \tilde{A} \left(\frac{(\tilde{\rho}_1)^\gamma + \tilde{\rho}_1 \theta_1}{(\tilde{\rho}_2)^\gamma + \tilde{\rho}_2 \theta_2} \right) \right) \cdot \\ & \cdot ((\rho_1, \rho_2) - (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Полагая $\tilde{\rho} = \bar{\rho} + \eta \bar{\psi}$, где $\bar{\rho} = (\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2)$,

$\bar{\rho} = (\rho_1, \rho_2)$, $\eta \rightarrow 0$, а $\bar{\psi} \in L^{2\gamma}(\Omega)$ - произвольная вектор-функция, приходим к равенствам (3.14): $\bar{\rho}_i^\gamma = \rho_i^\gamma$, $i=1,2$.

Докажем теперь равенства (3.15). Из формулы (3.14) и соотношений (3.1) получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\rho_i^\varepsilon \rightarrow \rho_i$ сильно в $L^q(\Omega)$, $q \in [1, 2\gamma)$, $i=1,2$. (3.37)

Отсюда и из соотношений (3.3) и следует справедливость равенств (3.15):

$$\rho_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} = \rho_i \operatorname{div} \bar{u}^{(i)}, \quad i=1,2.$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 1, осталось показать, что выполняются равенства (3.16): $\hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)} = \hat{\sigma}^{(i)} : \nabla \bar{u}^{(i)}$, $i=1,2$.

Для этого достаточно доказать факт сильной сходимости градиента скоростей. Используя сильную сходимость плотностей (3.37), докажем сначала сильную сходимость дивергенции скоростей. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Для любой функции $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(j)} \left[(\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(1)} + \right. \\ & \left. + (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(2)} \right] \tau^2 dx \rightarrow \\ & \rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u}^{(j)} \left[(\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \bar{u}^{(1)} + \right. \\ & \left. + (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \bar{u}^{(2)} \right] \tau^2 dx \quad (3.38) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $i, j = 1, 2$.

Заметим далее, что из леммы 3 вытекает.

Лемма 4. Для любой функции $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы формулы:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}|^2 \tau^2 dx = \\ & = \int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}^{(i)}|^2 \tau^2 dx, \quad i = 1, 2. \quad (3.39) \end{aligned}$$

Беря теперь неубывающую последовательность функций τ_n такую, что $\tau_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tau_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq \tau_n \leq 1$, получим в силу леммы 4

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}|^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}|^2 \tau_n^2 dx = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}^{(i)}|^2 \tau_n^2 dx \leq \int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}^{(i)}|^2 dx, \quad i = 1, 2 \quad (3.40) \end{aligned}$$

Далее, так как

$$\int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} - \operatorname{div} \bar{u}^{(i)}|^2 dx \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

то, в силу (3.40), имеем:

$$\int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} - \operatorname{div} \bar{u}^{(i)}|^2 dx \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.41)$$

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\operatorname{div} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} \rightarrow \operatorname{div} \bar{u}^{(i)} \text{ в } L^{i^2}(\Omega), \quad i = 1, 2. \quad (3.42)$$

Докажем теперь, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\operatorname{rot} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} \rightarrow \operatorname{rot} \bar{u}^{(i)} \text{ в } L^{i^2}(\Omega), \quad i = 1, 2. \quad (3.43)$$

Для этого представим $\operatorname{rot} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}$ как сумму двух компонент $\bar{\omega}_{\varepsilon}^{(i)}$ и $\tilde{\omega}_{\varepsilon}^{(i)}$ таких, что (см., например, [8])

$$\begin{aligned} & -\Delta \bar{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} = \operatorname{rot} \bar{G}_{\varepsilon}^{(i)} \quad \Omega, \quad i = 1, 2, \\ & \bar{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \bar{\tau}_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \\ & \bar{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \bar{\tau}_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \\ & \operatorname{div} \bar{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & -\Delta \tilde{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} = \operatorname{rot} \tilde{G}_{\varepsilon}^{(i)} \quad \Omega, \quad i = 1, 2, \\ & \tilde{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \bar{\tau}_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \\ & \tilde{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \bar{\tau}_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \\ & \operatorname{div} \tilde{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} = 0 \text{ в } \Omega, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\varepsilon}^{(1)} &= \frac{1}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\mu_{22}\bar{H}_{\varepsilon}^{(1)} - \mu_{12}\bar{H}_{\varepsilon}^{(2)} \right], \\ \bar{G}_{\varepsilon}^{(2)} &= \frac{1}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}} \left[-\mu_{21}\bar{H}_{\varepsilon}^{(1)} + \mu_{11}\bar{H}_{\varepsilon}^{(2)} \right], \\ \tilde{G}_{\varepsilon}^{(1)} &= \frac{1}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\mu_{22}\tilde{H}_{\varepsilon}^{(1)} - \mu_{12}\tilde{H}_{\varepsilon}^{(2)} \right], \\ \tilde{G}_{\varepsilon}^{(2)} &= \frac{1}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}} \left[-\mu_{21}\tilde{H}_{\varepsilon}^{(1)} + \mu_{11}\tilde{H}_{\varepsilon}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\bar{H}_{\varepsilon}^{(i)} = \bar{J}_{\varepsilon}^{(i)} + \rho_i^{\varepsilon} f_{\varepsilon}^{(i)} - \rho_i^{\varepsilon} (\bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \nabla) \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} - \varepsilon \frac{M_i}{|\Omega|} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)},$$

$$\tilde{H}_{\varepsilon}^{(i)} = -\frac{\varepsilon}{2} \Delta \rho_i^{\varepsilon} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

$\bar{\tau}_i$, $i = 1, 2$ - два взаимно перпендикулярных касательных вектора к $\partial\Omega$. В силу свойств решений задач (3.44), (3.45) справедливы следующие неравенства:

$$\|\bar{\omega}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C \|\bar{G}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^q(\Omega)}, \quad (3.46)$$

$$i = 1, 2,$$

$$\|\tilde{\omega}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^q(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^2 \|\varepsilon \Delta \rho_i^{\varepsilon} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{W^{-1,q}(\Omega)}, \quad (3.47)$$

$$i = 1, 2,$$

где постоянная C не зависит от параметра ε .

$$\text{Из оценок } \|\bar{G}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^{\frac{6\gamma}{4\gamma+3}}(\Omega)} \leq C, \quad i = 1, 2 \text{ и}$$

компактного вложения $W^{1, \frac{6\gamma}{4\gamma+3}}(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ следует, что при $\gamma > 3$

$$\bar{\omega}_{\varepsilon}^{(i)} \rightarrow \bar{\omega}^{(i)} \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.48)$$

В силу неравенства:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \|\varepsilon \Delta \rho_i^{\varepsilon} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{W^{-1,2}(\Omega)} = \\ & = \sum_{i=1}^2 \sup_{\|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1} \left| \varepsilon \int_{\Omega} \Delta \rho_i^{\varepsilon} \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx \right| = \\ & = \sum_{i=1}^2 \sup_{\|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1} \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} (\varepsilon \nabla \rho_i^{\varepsilon} \otimes \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}) \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx - \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} \varepsilon (\nabla \rho_i^{\varepsilon} \cdot \nabla) \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^2 \sup_{\|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1} \left| \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \rho_i^{\varepsilon} \otimes \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} : \bar{\varphi}^{(i)} dx \right| + \\ & + \sum_{i=1}^2 \sup_{\|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1} \left| \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \rho_i^{\varepsilon} \cdot \nabla) \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)} \cdot \bar{\varphi}^{(i)} dx \right| \leq \\ & \leq C \sum_{i=1}^2 \sup_{\|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1} \|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|\varepsilon \nabla \rho_i^{\varepsilon} \otimes \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} + \\ & + C \sum_{i=1}^2 \sup_{\|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1} \|\bar{\varphi}^{(i)}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|(\varepsilon \nabla \rho_i^{\varepsilon} \cdot \nabla) \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} \leq \\ & \leq C \sum_{i=1}^2 \left(\|\varepsilon \nabla \rho_i^{\varepsilon}\|_{L^3(\Omega)} \|\bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^6(\Omega)} + \|\varepsilon \nabla \rho_i^{\varepsilon}\|_{L^3(\Omega)} \|\nabla \bar{u}_{\varepsilon}^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq \end{aligned} \quad (3.49)$$

(в котором константа C не зависит от ε) и доказанных ранее соотношений

$$\|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0, \quad 1 \leq q < \frac{6\gamma}{\gamma+3}, \quad i=1,2 \quad (\text{см. (3.7)}),$$

мы получаем, что при $\gamma > 3$

$$\tilde{\omega}_\varepsilon^{(i)} \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i=1,2. \quad (3.50)$$

Из соотношений (3.48), (3.50) и следует справедливость свойств (3.43).

В силу тождества:

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{v}|^2 dx = \int_{\Omega} |\operatorname{div} \bar{v}|^2 dx + \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \bar{v}|^2 dx, \quad \bar{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

из (3.42) и (3.43) следует, что

$$\nabla \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \rightharpoonup \nabla \bar{u}^{(i)} \text{ в } L^2(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i=1,2. \quad (3.51)$$

Отсюда, в частности, получаем:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^{(i)} : \nabla \bar{u}_\varepsilon^{(i)} \rightharpoonup \hat{\sigma}^{(i)} \text{ в } \mathbb{S}^{(i)} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i=1,2. \quad (3.52)$$

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Agmon, S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. 12, 1959. P. 623-727. (Русский перевод: Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – М.: ИЛ, 1962).
2. Agmon, S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. – 17, 1964. – P. 35 – 92.
3. Feireisl, E. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations / E. Feireisl, A. Novotny, H. Petzeltova // J. of Math. Fluid Mech. – 3, 2001. – P. 358 – 392.
4. Haupt, P. Continuum mechanics and theory of materials / P. Haupt. – Berlin: Springer-Verlag, 2002.
5. Lions, P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. V. 1: Incompressible Models / P.-L. Lions. – New York: Oxford University Press, 1996.
6. Lions, P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. V. 2: Compressible Models / P.-L. Lions. – New York: Oxford University Press, 1998.
7. Mucha, P. On the steady compressible Navier-Stokes-Fourier system / P. Mucha, M. Pokorný // Commun. in Math. Phys. V. 288. – №1. – 2007. – P. 349-377.
8. Mucha, P. Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids. Necas Center for Mathematical Modeling. Preprint no. 2009-04, 2009 P. Mucha, M. Pokorný // <http://ncmm.karlin.mff.cuni.cz/preprints/098225413pr.pdf>.
9. Rajagopal, K. R. Mechanics of mixtures / K. R. Rajagopal, L. Tao. – London: World Scientific Publishing, 1995.
10. Антонцев, С. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1983.
11. Боговский, М. Е. О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad / М. Е. Боговский // Труды семинара С. Л. Соболева. Т. 1. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. – С. 5 – 40.
12. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976.
13. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989.
14. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.
15. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1964.
16. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
17. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1976.
18. Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. Ч. 1. – М.: Наука, 1987.
19. Никольский, С. Л. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. Л. Никольский. – М.: Наука, 1969.
20. Папин, А. А. Краевые задачи двухфазной фильтрации / А. А. Папин. – Барнаул: Издательство Алтайского государственного университета, 2009.
21. Петров, А. Н. Корректность начально-краевой задачи для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов / А. Н. Петров // Динамика сплошной среды. Вып. 56. – Новосибирск, 1982.
22. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. Т. 1. – М.: Наука, 1970.
23. Соболев, С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1989.
24. Солонников, В. А. Об общих краевых задачах для систем эллиптических уравнений в смысле А. Дуглиса - Л. Ниренберга, II / В. А. Солонников // Труды математического института им. В. А. Стеклова. Т. XCII, 1966. – С. 233 – 297.
25. Солонников, В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дуглиса - Л. Ниренберга, I / В. А. Солонников // Изв. АН СССР. – Т. 28, №3, 1964. – С. 665 – 706.
26. Солонников, В. А. Переопределенные эллиптические краевые задачи. Зап. научн. сем. ЛОМИ. 21, 1971. – С. 112 – 158.

Рецензент – В. И. Полтавцев, ФГОУ ВПО «Кемеровский государственный сельскохозяйственный институт».