УДК 796:51-7

МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ СПОРТСМЕНОВ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

О. Н. Инденко, А. А. Игнатьев
e-mail: yurich_70@mail.ru

В работе показаны возможности применения метода анализа состояния уникальных объектов при решении нелинейной задачи «Моделирование поведения спортсменов на фазовой плоскости».

In work opportunities of application of a method of the analysis of a condition of unique objects are shown at the decision of a nonlinear problem «Modeling of behavior of sportsmen on a phase plane».

Ключевые слова: моделирование, уникальный объект.

Современные системы анализа состояния объектов представляют собой сложные нелинейные системы, обеспечивающие высокую точность обработки.

Параметры системы, которые упрощенно считались постоянными величинами, могут в реальности принимать различные значения при разных входных воздействиях. Это означает появление статической нелинейности. В таких системах, в отличие от линейных, не выполняется принцип суперпозиции. В большинстве случаев реальные системы управления являются нелинейными. Их построение представляет достаточно сложную проблему.

Необходимость учета влияния нелинейностей вынуждает отказаться от традиционных методов описания динамических процессов. Вследствие сложности математического аппарата, теория нелинейных систем недостаточно хорошо развита, поэтому нельзя ответить на все вопросы, связанные с ними. Недостаток упрощающих принципов при рассмотрении нелинейных систем привел к тому, что их пытаются исследовать самыми различными методами. Интересным является разработка Института угля и углехимии (ИУУ) СО РАН [3 – 5], где соответствующий круг проблем обозначен как анализ функционального состояния уникальных систем. Изюминкой предложенного метода анализа состояния уникальных систем является равноправность исходных показателей, либо группы показателей, – технологические, экономические, экологические, биологических и т. п.

Работа посвящена исследованию физического и технического состояния спортсменов как уникальных биологических объектов в тренировочном процессе на примере секции «Каратэ» ж. р. Кедровка.

Общая идея метода состоит в том, что с помощью специфических моделей отдельная выборка функциональных показателей отображается на координатные оси пространства состояний, чем достигается практически кратное увеличение объема информации при построении более глубокой картины. При этом выбор моделей осей в аналогии с определением фазового пространства приводит к тому, что на выборку «проектируются» фундаментальные критерии, правила анализа и диагностические признаки вида состояния [3 – 5].

Определение 1. Уникальный объект – это тот, для которого нет и не может быть получено надежных статистических оценок видов состояний [4].

Набор аддитивных показателей $j = 1,\dots,B$ формирует модельную таблицу системы размерности $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ из элементов $R(i/j)$, которая содержит в редуцированном виде все данные об участниках.

Пусть все характеристики являются взаимно дополняющими и однонаправленными, тогда для столбцов матрицы можно ввести модель вида:

$$V_1(i/j) = Ln(R(i/j)). \tag{1}$$

Для удобства перехода к фазовым координатам используем центрирование по среднему значению – оценке математического ожидания:

$$M(V) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{A} V_1(i/j) \tag{2}$$

и нормирование по оценке среднеквадратического отклонения:

$$G(V) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{A}(V_1(i/j) - M(V))^2}. \tag{3}$$

Составляем таблицу $U(i/j),$ используя оценки $M(V)$ и $G(V)$ по формуле:

$$U(i/j) = \frac{V_1(i/j) - M(V)}{G(V)}. \tag{4}$$

Для удобства перехода к фазовым координатам используем центрирование по среднему значению – оценке математического ожидания:

$$M(V) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{B} U(i/j) \tag{5}$$

и нормирование по оценке среднеквадратического отклонения:

$$G(V) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{B}(U(i/j) - M(V))^2} \tag{6}$$

При переходе от $U(i/j)$ к $U(j/i)$ использовали инверсию, смена i/j на j/i.

Составляем таблицу $U(j/i),$ используя оценки $M(V)$ и $G(V)$ по формуле:

$$U(j/i) = \frac{U(i/j) - M(V)}{G(V)}. \tag{7}$$

В итоге показатели элементов i отображаются **на оси абсцисс** пространства состояний в соответствии с преобразованием:

$$U(j/i)=\frac{U(i/j)-M(V)}{G(V)}. \qquad (8)$$

В обоснованно соответствующее отображение неаддитивных (**удельных**) показателей $R(i/j)$ оси ординат фазовой плоскости, представленных таблицей размерности $A\times B$:

$$V_2(i/j)=-\frac{1}{R(i/j)}, \qquad (9)$$

где $j=1,\ldots,B$.

Для центрирования используется:

$$M(V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{A}V_2(i/j). \qquad (10)$$

Стандартный разброс определяется выражением:

$$G(V)=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{A}(V_2(i/j)-M(V))^2}. \qquad (11)$$

Составляем таблицу $U(i/j),$ используя оценки $M(V)$ и $G(V)$ по формуле:

$$U(i/j)=\frac{V_1(i/j)-M(V)}{G(V)}. \qquad (12)$$

Используем центрирование по среднему значению – оценке математического ожидания:

$$M(V)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{B}U(i/j) \qquad (13)$$

и нормирование по оценке среднеквадратического отклонения:

$$G(V)=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{B}(U(i/j)-M(V))^2}. \qquad (14)$$

При переходе от $U(i/j)$ к $U(j/i)$ использовали инверсию, смена i/j на j/i.

Составляем таблицу $U(j/i),$ используя оценки $M(V)$ и $G(V)$ по формуле:

$$U(j/i)=\frac{U(i/j)-M(V)}{G(V)}. \qquad (15)$$

Таким образом, отображение **на ось ординат** производится моделью:

$$U(j/i)=\frac{U(i/j)-M(V)}{G(V)}. \qquad (16)$$

Рассмотрим построение базовой **эллиптической границы.**

Определение 2. Эллипс – изображение гармонического решения на фазовой плоскости. Таким образом, он является границей между сходящимися и расходящимися решениями.

Предложено рассматривать на фазовой плоскости в качестве границы устойчивого состояния эллиптическую траекторию, которая получается из фазового портрета автоколебаний. Рассмотрим каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1, \qquad 17)$$

и его форму в нормализованных координатах $(\overset{0}{\alpha};\overset{0}{\beta})$ при повороте на угол

$$\varphi=\operatorname{arctg} r, \qquad (18)$$

где r – коэффициент корреляции между выборками $\overset{0}{\alpha}_i$ и $\overset{0}{\beta}_i$. Преобразование имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x&=\overset{0}{\alpha}\cdot\cos\varphi+\overset{0}{\beta}\cdot\sin\varphi,\\ y&=-\overset{0}{\alpha}\cdot\sin\varphi+\overset{0}{\beta}\cdot\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (19)$$

Свойства нормализованных выборок:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}(\overset{0}{\alpha}_i)^2=\sum_{i=1}^{m}(\overset{0}{\beta}_1)^2=m-1;\\ &\sum_{i=1}^{m}\overset{0}{\alpha}_i\,\overset{0}{\beta}_i=mr \end{aligned} \qquad (20)$$

и известные соотношения:

$$\sin^2\varphi=\frac{r^2}{1+r^2};$$

$$\cos^2\varphi=\frac{r^2}{1+r^2};$$

$$\sin 2\varphi=\frac{2r}{1+r^2} \qquad (21)$$

позволяют привести уравнение эллипса к виду уравнения связи параметров:

$$\frac{(m-1)(1+r^2)+2mr^2}{A^2}+$$
$$+\frac{(m-1)(1+r^2)-2mr^2}{B^2}=m(1+r^2).$$

Далее было предложено использовать в качестве характеристики эллипса его площадь:

$$S=\pi A\cdot B \qquad (22)$$

и привести уравнение к определению параметра А:

$$A^4\cdot\pi^2\left[(m-1)+(m+1)r^2\right]-A^2\cdot S^2m(1+r^2)+$$
$$+S^2\left[(m-1)+(3m-1)r^2\right]=0.$$

Отсюда для аппроксимации был использован частный случай среднего значения параметра А, которое определяется, если дискриминант уравнения равен нулю:

$$D=S^2\begin{Bmatrix} S^2m^2(1+r^2)^2-4\pi^2\\ \left[(m-1)^2(1+r^2)^2-2m^2r^4\right]\end{Bmatrix}=0. \qquad (23)$$

Таким образом, из данного условия принимается важнейшая характеристика граничного эллипса:

$$S = 2\pi\sqrt{\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 - \left(\frac{2r^2}{1+r^2}\right)^2}. \qquad (24)$$

Ранее полученные выражения можно упростить и привести к более наглядному виду:

$$A = \sqrt{2\left(\frac{m-1}{m} + \frac{2r^2}{1+r^2}\right)},$$
$$B = \sqrt{2\left(\frac{m-1}{m} - \frac{2r^2}{1+r^2}\right)}. \qquad (25)$$

Дополнительно важно определить межфокусное расстояние эллипса:

$$C = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{\frac{8r^2}{1+r^2}} = 2r\sqrt{\frac{r}{1+r^2}}. \qquad (26)$$

Отметим в частности, что при отсутствии корреляционной связи между выборочными характеристиками r = 0, получается уравнение окружности: $\overset{0}{\alpha}{}^2 + \overset{0}{\beta}{}^2 = 2\frac{m-1}{m}$ с радиусом

$$\mathrm{R} = \mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0 = \sqrt{2\frac{\mathrm{m}-1}{\mathrm{m}}}$$

площадь которой является верхним пределом для эллипсов:

$$S_{окр} = S_{\max} = 2\pi\frac{m-1}{m}. \qquad (27)$$

Не было отмечено, но нетрудно получить, что данные определения параметров имеют место только в диапазоне: $0 \le r \le \sqrt{\frac{m-1}{m+2}}$.

Причем, при верхнем пределе возникает вырожденное соотношение:

$\mathrm{S} \to 0$; $\mathrm{A} \to 2\sqrt{\frac{\mathrm{m}-1}{\mathrm{m}}}$; B→0; C→A.

В итоге уравнение граничного эллипса целесообразно использовать в форме:

$$\overset{0}{\beta} = \frac{r(A^2-B^2)\cdot\overset{0}{\alpha} \pm AB\cdot(1+r^2)\cdot\sqrt{\frac{A^2+B^2r^2}{1+r} - \overset{0}{\alpha}{}^2}}{A^2+B^2r^2} \qquad (28)$$

при условии:

$$\left|\overset{0}{\alpha}\right| \le \overset{0}{\alpha}_{\max} = \sqrt{\frac{A^2+B^2r^2}{1+r^2}}.$$

Для исследования свойств более удобно записать:

$$\overset{0}{\beta} = \frac{C^2\frac{r}{1+r^2}\overset{0}{\alpha} \pm \frac{S}{\pi}\sqrt{\overset{0^2}{\alpha}_{\max} - \overset{0}{\alpha}{}^2}}{\overset{0^2}{\alpha}_{\max}}. \qquad (29)$$

Необходимо отметить, что условие выбора параметров D = 0 совпадает с определением экстремума функционала, каковым является уравнение связи параметров. Дифференцируя его по А, получим условие экстремума:

$$2\mathrm{A}^2\pi^2\left[(\mathrm{m}-1)(1+\mathrm{r}^2) - 2\mathrm{mr}^2\right] - \mathrm{S}^2\mathrm{m}(1+\mathrm{r}^2 0 = 0,$$

из которого следует:

$$A^2 = \frac{S^2}{2\pi\left[\frac{m-1}{m} - \frac{2r^2}{1+r^2}\right]}. \qquad (30)$$

Нетрудно убедиться в тождественности этого результата и полученного ранее.

Другой вариант построения граничного эллипса получим, используя в качестве характеристики межфокусное расстояние $\mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2}$. Тогда уравнение связи параметров приводится к виду:

$$A^4m(1+r^2) - A^2\left[C^2m(1+r^2) + 2(m-1)(1+r^2)\right] +$$
$$+C^2\left[(m-1)(1+r^2) + 2mr^2\right] = 0.$$

В этом случае дискриминант составляет:

$$D = (1+r^2)\begin{bmatrix} C^4m^2(1+r^2) - 8C^2m^2r^2 + \\ +4(m-1)^2(1+r^2) \end{bmatrix}.$$

По тем же соображениям, что и ранее используется условие дискриминанта D = 0, из которого получаем:

$$C^2 = 2\left[\frac{2r^2}{1+r^2} + \sqrt{\left(\frac{2r^2}{1+r^2}\right)^2 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^2}\right].$$

Нетрудно убедиться, что область существования данного решения ограничена узким интервалом: $\frac{\mathrm{m}-1}{\mathrm{m}+1} < \mathrm{r}^2 \le 1$, т. е. решение является дополнением к полученному выше.

Параметры нового эллипса составляют:

$$A^2 = \frac{m-1}{m} + \frac{c^2}{2},$$
$$B^2 = \frac{m-1}{m} - \frac{c^2}{2}, \qquad (31)$$

следовательно,

$$\mathrm{S} = \pi\sqrt{\left(\frac{\mathrm{m}-1}{\mathrm{m}}\right)^2 - \frac{\mathrm{c}^4}{4}}, \qquad (32)$$

т. е. заведомо меньше, чем площадь эллипса в основном случае.

Основные приемы метода энтропийного анализа данных разрабатывались под задачи рейтингового оценивания совокупностей социальных объектов по широкому набору разнородных показателей [4]. При этом были решены задачи выявления в выборках однотипных групп и подсистем по произвольному набору признаков. Результирующие отображения на фазовую плоскость были дополнены эллиптическими границами устойчивости [5], а также моделями поведения, позволяющими разделить элементы даже в тесных группах [2].

Однако у практиков оставались некоторые сомнения в корректности получаемых по данному методу рейтинговых оценок, главным образом, если результаты не совпадали с мнением экспертов о количестве подсистем и их составе. Для решения таких ситуаций был разработан прием инверсии отображений, когда объектами анализа становятся показатели, и уже для них на фазовой плоскости получается заключение об устойчивости и выявляются группы характеристик, лидеры свойств и диагностические признаки.

Для демонстрации приема инверсии отображений выбрана секция «Каратэ», в которой группировки хорошо изучены.

Чтобы увидеть эти различия, необходимо знать следующее:

– если точки находятся внутри эллипса, то это говорит о нормальном состоянии спортсмена;

– если точки находятся на границе, то этот результат является выше среднего;

– если точки вышли за границу эллипса сверху, то это говорит о том, что результат является аномально высоким;

– если точки вышли за границу эллипса снизу, то это говорит о том, что результат аномально низкий.

Большая часть работы посвящена модельным исследованиям работоспособности и эффективности метода состояния уникальных объектов за два отчетных периода: 28.11.2007 и 28.01.2008 г. Особенно интересным явился заключительный этап построения и анализа фазовых портретов в динамике за два периода.

Модельные исследования предлагаемого метода показали, что в фазовом портрете можно увидеть, что отжимания за первый период находились в эллипсе (нормальное состояние спортсмена), а за второй период отжимания оказались за границей эллипса сверху, что говорит об аномально высоком результате. А в динамике произошло улучшение отжиманий за два отчетных периода. Отличным показателем является и квалификация спортсмена по поясу. Все остальные показатели в норме.

Аналогично рассуждая о фазовом портрете другого спортсмена, можно увидеть, что приседания за первый период находились в эллипсе (нормальное состояние спортсмена), а за второй период приседания оказались за границей эллипса сверху, что говорит об аномально высоком результате. А в динамике произошло улучшение приседаний за два отчетных периода. Все остальные показатели в норме. Также пульс вышел за границы эллипса сверху и это аномально низкий результат. Это говорит о том, что спортсмен не восстановился после других упражнений.

Из рассмотренных фазовых портретов в динамике можно сделать вывод, что тренировочный процесс секции «Каратэ» является хорошим результатом для тренера, т. к. почти все спортсмены улучшают свой результат в динамике.

Таким образом, в данной работе показаны возможности применения метода анализа состояния уникальных объектов при решении нелинейной задачи «Моделирование поведения спортсменов на фазовой плоскости». Этот метод включен в список основных результатов Российской академии наук, т.е. является самым лучшим, а для уникальных объектов является единственным.

Организован и проведен сбор экспериментальных данных физического и технического состояний спортсменов как уникальных биологических объектов в тренировочном процессе на примере секции «Каратэ» ж. р. Кедровка, тренера и автора работы.

Предложенные в работе две модели позволили построить фазовые портреты за два отчетных периода.

Указанный в работе алгоритм преобразования выборочных данных позволил исследовать физическое и техническое состояния спортсменов как уникальных биологических объектов. Были проведены модельные исследования и построения фазовых портретов, которые подтвердили работоспособность и эффективность используемого алгоритма.

Работа имеет практическую ценность, результаты проведенных исследований используются в тренировочном процессе ООО «Кемеровская областная федерация Кекусинкай каратэ».

Литература

1. Логов, А. Б. Анализ состояния уникальных объектов (развитие и тестирование) / А. Б. Логов, Р. Ю. Замараев, А. А. Логов. – Кемерово, 2004.
2. Логов, А. Б. Математические модели диагностики уникальных объектов / А. Б. Логов, Р. Ю. Замараев. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 228 с.
3. Логов, А. Б. Моделирование состояния угольного комплекса Кузбасса на стадии реструктуризации / А. Б. Логов, В. И. Поварницын, В. Н. Кочетков. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 100 с.
4. Логов, А. Б. Энтропийный подход к моделированию процесса реструктуризации угольной отрасли. Институт угля и углехимии СО РАН / А. Б. Логов, В. Н. Кочетков, А. А. Рожков. – Кемерово; М., 2001. – 324 с.
5. Логов, А. Б. Анализ функционального состояния промышленных объектов в фазовом пространстве. Институт угля и углехимии СО РАН / А. Б. Логов, Р. Ю. Замараев, А. А. Логов. – Кемерово, 2004. – 168 с.

Рецензент, научный руководитель – О. Н. Инденко, ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет».