УДК 513

ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТОВ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ И МАТРИЧНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ МАСШТАБИРОВАНИЯ

П. Н. Подкур

CONSTRUCTION OF ORTHOGONAL COMPACTLY SUPPORTED WAVELETS WITH MATRIX SCALING COEFFICIENT

P. N. Podkur

В данной работе для многомерных вейвлетов с матричным коэффициентом масштабирования получен способ построения большой серии ортогональных вейвлетов с компактным носителем и установлены достаточные условия ортогональности.

In this paper the mode of construction of the big series orthogonal many-dimensional wavelets with matrix scaling coefficient and with compact support is received and sufficient conditions of orthogonality are established.

Ключевые слова: вейвлеты; масштабирующая функция; матричный коэффициент масштабирования.

Keywords: wavelets; scaling function; matrix scaling coefficient.

Теория вейвлетов [1] имеет широкие применения в обработке одномерных сигналов и изображений. Она развита как для коэффициента масштабирования $N = 2$, так и в случае $N>2$ [2]. Для многомерных вейвлетов с матричным коэффициентом масштабирования пока имеются только отдельные общие результаты [4], [2]. Дело в том, что здесь возникают дополнительные проблемы, связанные со строением носителя масштабирующей функции. Многомерные аналоги даже простейших вейвлетов Хаара имеют в качестве носителя фрактальное множество [4], [2]. В данной работе для многомерных вейвлетов с матричным коэффициентом масштабирования получен способ построения большой серии ортогональных вейвлетов с компактным носителем и установлены достаточные условия ортогональности. Для простоты мы будем рассматривать только двумерные вейвлеты, хотя все результаты очевидным образом переносятся на случай любой размерности.

Напомним, что двумерным сигналом называется массив действительных чисел $\{a_n\}$, где индекс n меняется во множестве $\mathbf{Z}^2$ всех наборов из целых чисел, $n = (n_1, n_2)$. Если $n \in \mathbf{Z}^2$ и $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, то символом z^n будем обозначать моном вида $z^n = z_1^{n_1} z_2^{n_2}$. С каждым многомерным сигналом $\{a_n\}$ ассоциируется следующий степенной ряд вида (z-преобразование):

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} a_n z^n = \sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} a_{n_1,n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} .$$

Преобразование Фурье функции $f(x) \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^2(\mathbf{R}^2)$ определяется формулой:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}^2} f(x) e^{-i(x,\omega)} dx ,$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $(x,\omega) = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ и $dx = dx_1 dx_2$.

Напомним одно из свойств пеобразованияФурье в $\mathbf{R}^2$. Пусть $y = Ax$ – линейный невырожденный оператор в пространстве $\mathbf{R}^2$. Тогда

$$F[f(Ax)](\omega) = \frac{1}{|\det(A)|}\hat{f}((A^t)^{-1}\omega) ,$$

где $(A^t)^{-1}$ – обратная транспонированная матрица для A.

1. Масштабирующие функции. Пусть А – невырожденная целочисленная матрица порядка 2 модули собственных чисел которой больше единицы, $|\lambda i| > 1$. Степень растяжения характеризуется модулем определителя $N = |\det A|$ матрицы А. Определим 2-мерный тор как $T2 = R2/2\pi Z2$. Он является прямым произведением $T2 = S1\times S1$ единичных окружностей $S1\subset C$.

Определение. *Функция $\varphi(x) \in L^2(\mathbf{R}^2)$ называется А-масштабирующей, если она может быть представлена в виде следующего ряда:*

$$\phi(x) = \sqrt{N} \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} h_n \phi(Ax - n), \tag{1}$$

где числа $\{h_n\}$, $n\in \mathbf{Z}^2$, удовлетворяют условию $\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} |h_n|^2 < \infty$ и $N = |\det A|$. Равенство (1) называется масштабирующим уравнением. Набор коэффициентов $\{h_n\}$ называется масштабирующим фильтром.

Если масштабирующая функция $\varphi(x)$ имеет носитель в шаре радиуса L, то масштабирующий фильтр содержит конечное число ненулевых коэффициентов $\{h_n\}$. Это число K ненулевых коэффициентов может быть оценено сверху:

$$K \le (2LN-1)^2.$$

Применение преобразования Фурье к масштабирующему уравнению приводит [2] к следующему соотношению:

$$\hat{\phi}(\omega) = H_0((A^t)^{-1}\omega)\hat{\phi}((A^t)^{-1}\omega) , \tag{2}$$

где

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} h_n e^{-i(n,\omega)} \tag{3}$$

– частотная функция масштабирующей функции $\varphi(x)$. Отметим, что она является 2π-периодической по всем переменным ω_i и поэтому может считаться определенной на торе $T^2 = \mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}^2$.

Из масштабирующего соотношения (2) в частотной области получаем при условии, что функция $\hat{\phi}(\omega)$ непрерывна и $\varphi(x)$ нормирована соотношением $\hat{\phi}(0) = 1$:

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H_0\left(\frac{\omega}{(A^t)^j}\right). \tag{4}$$

Последняя формула дает метод для нахождения масштабирующей функции через частотную функцию $H_0(\omega)$ при достаточно слабых [2] предположениях на коэффициенты $\{h_n\}$.

Для ортонормированности системы функций $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n)$, $n \in \mathbf{Z}^2$ должно выполняться свойство

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^2} |\, \hat{\phi}(\omega + 2\pi n)\,|^2 = 1 \text{ п.в.} \tag{5}$$

Более простое необходимое условие ортогональности выражается [2] равенством:

$$\sum_{s=0}^{N-1} |\, H_0(\omega + 2\pi(A^t)^{-1}(d_s))\,|^2 = 1 \text{ п.в.}, \tag{6}$$

где целочисленные векторы $d_s \in \mathbf{Z}^2$ представляют все классы фактор-группы $\mathbf{Z}^2/A^t\mathbf{Z}^2$. Данное условие эквивалентно следующему [2]:

$$\sum\nolimits_n h_n \overline{h}_{n-Ar} = \delta_{0r}. \tag{7}$$

Получим более простое, чем (6) достаточное условие ортонормированности для вейвлетов с компактным носителем с конечным числом ненулевых коэффициентов $\{h_n\}$, где индекс $n = (n_1, n_2)$ меняется в пределах: $0 \le n_1 \le L_1$ и $0 \le n_2 \le L_2$. Тогда частотная функция является тригонометрическим полиномом вида:

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{L} h_n e^{-i(n,\omega)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n_1,n_2=0}^{L_1,L_2} h_{n_1,n_2 n} e^{-i(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}.$$

Теорема 1. *Предположим, что частотная функция является тригонометрическим полиномом вида* $H_0(\omega) = \sqrt{N^{-1}} \sum_{n=0}^{L} h_n\, e^{-i(n,\omega)}$, *удовлетворяющим условиям* (6) *и* $H_0(0) = 1$, *а функция* $\varphi(x)$ *определена соотношением:*

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H_0\left((A^t)^{-j}(\omega)\right).$$

Если собственное значение 1 *матрицы* $A_{kl} = \sum_{n=0}^{L} h_n \overline{h}_{k-Nl+n}$ *не является кратным, то функции* $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n)$, $n \in \mathbf{Z}^2$ *образуют ортонормированную систему.*

Доказательство. Очевидно, что система функций $\varphi(x - n)$ образует ортонормированную систему тогда и только тогда, когда $\int_{\mathbf{R}^2} \phi(x)\overline{\phi(x-l)}dx = \delta_{0,l}$.

Поскольку носитель функции $\varphi(x)$ компактен, то для проверки ортонормированности нужно найти конечный набор чисел $\alpha_l = \int_{\mathbf{R}^2} \phi(x)\overline{\phi(x-l)}dx$. В случае ортонормированности массив α с векторным индексом l имеет вид: $\alpha_l = \delta_{0l}$. Используя масштабирующее соотношение

$\phi(x) = \sqrt{N}\sum_{n=0}^{L} h_n \phi(Ax - n)$, сделаем следующие преобразования:

$$\alpha_l = \int_{\mathbf{R}^2} \phi(x)\overline{\phi(x-l)}dx =$$

$$= N\int_{\mathbf{R}^2} \sum_{n,m} h_n \overline{h_m} \phi(Ax - n)\overline{\phi(Ax - Al - m)}dx =$$

$$= \sum_{n,m} h_n \overline{h_m} \int_{\mathbf{R}^2} \phi(y)\overline{\phi(y - Al - m + n)}dy =$$

$$= \sum_{n,m} h_n \overline{h_m}\, \alpha_{Al+m-n} = \sum_k \left(\sum_{n=0}^{L} h_n \overline{h}_{k-Al_i+n}\right)\alpha_k.$$

Следовательно, если мы определим матрицу A (с векторными индексами) по формуле:

$$A_{kl} = \sum_n h_n \overline{h}_{k-Al+n}, \tag{8}$$

где $h_m = 0$, если $m < 0$ или $m > L$, то $A\alpha = \alpha$, т. е. α является собственным вектором матрицы A для собственного значения 1. Заметим, что 1 всегда является собственным значением A, если $\sum_{s=0}^{N-1} |\, H_0(\omega + 2\pi sm / N)\,|^2 = 1$. Действительно, определим вектор $\beta_l = \delta_{0,l}$. Легко видеть, что вектор β является собственным для матрицы A,

$$(A\beta)_l = \sum_k A_{kl}\,\delta_{k,0} = A_{0l} = \\ = \sum_n h_n \overline{h}_{n-Al} = \delta_{0l} = \beta_l.$$

Здесь мы воспользовались равенством (7). Если собственное значение 1 является простым, то вектор α должен быть пропорциональным β, $\alpha = c\beta$. Тогда $\int_{\mathbf{R}^2} \phi(x)\overline{\phi(x-l)}dx = c\delta_{l,0}$. При нормировке $\int_{\mathbf{R}^2} |\, \phi(x)\,|^2\, dx = 1$ мы получаем, что $c = 1$. Система функций $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n)$, $n \in \mathbf{Z}^2$ является ортонормированной. Теорема доказана.

2. Построение ортогональных вейвлетов с компактным носителем с матричным коэффициентом масштабирования. В работе [4] предложен метод построения большой серии ортогональных вейвлетов с компактным носителем в одномерном случае. Распространим этот метод на случай многомерных вейвлетов с матричным коэффициентом масштабирования с полиномиальными частотными функциями и с вещественными фильтрами. Схема построения следующая.

Сначала находится унитарная матрица

$$H(z)=\begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho_1 z) & \cdots & H_0(\rho_{N-1}z) \\ H_1(z) & H_1(\rho_1 z) & \cdots & H_1(\rho_{N-1}z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho_1 z) & \cdots & H_{N-1}(\rho_{N-1}z) \end{pmatrix} \quad (9)$$

частотных полиномиальных функций [2]: $H_0(z)$ – для масштабирующей функции $\varphi(x)$ и $H_1(z)$, …, $H_{N\text{-}1}(z)$ – для вейвлет-функций, где $z=(z_1,z_2)=(e^{-i\omega_1},e^{-i\omega_2})$,

$$\rho_s=e^{-i2\pi(A^t)^{-1}d_s}=(e^{-i2\pi\delta_{1s}},e^{-i2\pi\delta_{2s}}),$$

$d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}$ – элементы из $\mathbf{Z}^2$, представляющие все классы фактор-группы $\mathbf{Z}^2/A^t\mathbf{Z}^2$ и $(A^t)^{-1}d_s=(\delta_{1s},\delta_{2s})$.

Затем находится масштабирующая функция $\varphi(x)$ по формуле (5) и проверяется выполнение достаточное условие ортонормированности системы функций $\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n)$, $n\in\mathbf{Z}^2$. На последнем этапе находятся вейвлеты $\psi^1(x)$, … , $\psi^{N-1}(x)$ по формулам $\psi^l(x)=\sqrt{N}\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} g_n^l\phi(Ax-n)$, $l=1, 2, \ldots N-1$,

где g_n^l – коэффициенты многочленов $H_1(z),\ldots$, $H_{N-1}(z)$, $H_l(\omega)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} g_n^l\ e^{-i(n,\omega)}$,

$l=1,2,\ldots,N-1$..

Матрица (9) имеет очень специальный вид. Однако ее можно [2] разложить в произведение двух унитарных (на торе $|z_1|=1$, $|z_2|=1$) матриц:

$$H(z)=B(z^A)R(z), \quad (10)$$

где $B(z^A)$ – унитарная матрица, элементами которой являются многочлены от z^A, а матрица $R(z)$ имеет вид:

$$R(z)=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z^{d_1} & (\rho_1 z)^{d_1} & \cdots & (\rho_{N-1}z)^{d_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{d_{N-1}} & (\rho_1 z)^{d_{N-1}} & \cdots & (\rho_{N-1}z)^{d_{N-1}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Напомним определение [2] мономов z^A. Пусть e_1, e_2 – стандартный базис пространства $\mathbf{R}^2$. Если A – матрица с целочисленными элементами и $Ae_1=A_1^1e_1+A_1^2e_2$, $Ae_2=A_2^1e_1+A_2^2e_2$, то определим следующие мономы:

$$w_1=z^{Ae_1}=z_1^{A_1^1}z_2^{A_1^2},\ w_2=z^{Ae_2}=z_1^{A_2^1}z_2^{A_2^2}.$$

Такой набор переменных $w=(w_1, w_2)$ будем обозначать символом $w=z^A$. Отметим, что для любого целочисленного набора $k=(k_1, k_2)$ имеет место равенство $z^{Ak}=w^k$, действительно,

$$z^{Ak}=z^{k_1Ae_1+k_2Ae_2}=(z^{Ae_1})^{k_1}(z^{Ae_2})^{k_2}=w_1^{k_1}w_2^{k_2}=w^k.$$

Матрица $B(w)$ в выражении (10) называется полифазной. Она является уже произвольной унитарной, при $|w_1|=1$, $|w_2|=1$, матрицей с полиномиальными элементами. Отметим, что матрица $R(z)$ является унитарной на торе $T^2=S^1\times S^1$, а именно, имеет место равенство $R(z)R^*(z)=E$.

Задавая унитарную полифазную матрицу $B(w)$, мы можем построить по формуле (10) матрицу частотных функций $H(z)$ и вместе с ней частотные функции $H_0(z)$, $H_1(z)$, … , $H_{N-1}(z)$ вейвлетов, следовательно, и сами вейвлеты $\varphi(x)$, $\psi^1(x)$, … , $\psi^{N-1}(x)$.

Схема построения полифазной матрицы. В данном разделе мы приведем простую схему построения унитарной (при $|w_1|=1$, $|w_2|=1$) матрицы $B(w)$, элементы которой являются многочленами с вещественными коэффициентами.

Выберем произвольную ортогональную матрицу B_0 порядка $N>1$, $B_0=\{b_{kj}, k,j=0, 1, \ldots N-1\}$. Умножим ее на диагональную унитарную матрицу вида $D_p(w)=diag(w^{p_0},w^{p_1},\ldots,w^{p_{N-1}})$,

где $p_0, \ldots, p_{N-1}$ – целочисленные векторы. Затем умножим на ортогональную матрицу $C_0=\{c_{kj}, k,j=0, 1, \ldots N-1\}$. В результате получим унитарную матрицу:

$$B(w)=D_p(w)\cdot B_0\cdot C_0, \quad (12)$$

элементы которой, $B_{kj}(w)=\sum_{s=0}^{N-1} b_{ks}c_{sj}w^{p_k}$, являются многочленами по переменной w с вещественными коэффициентами.

Теперь подставим $w=z^A$,

где $z=(e^{-i\omega_1},e^{-i\omega_2})$. Получаем унитарную (на торе) матрицу $B(z^A)$ с полиномиальными элементами с вещественными коэффициентами. Умножим ее на унитарную матрицу $R(z)$. Тогда, согласно формуле (10), мы получим унитарную (на торе) матрицу $H(z)$ частотных полиномиальных функций $H_0(z)$, $H_1(z),\ldots$, $H_{N-1}(z)$. Таким образом,

$$H(z)=D_p(z^A)\cdot B_0\cdot C_0\cdot R(z). \quad (13)$$

Для того, чтобы полученные функции были бы частотными функциями ортогональных вейвлетов, необходимо, чтобы сумма коэффициентов для $H_0(z)$ была бы равна единице, а суммы коэффициентов для остальных функций $H_1(z)$, …, $H_{N-1}(z)$ были бы равны нулю. Учитывая, что умножение на диагональную матрицу $D_p(z^A)$ не влияет на сумму коэффициентов, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{s,j=0}^{N-1} b_{0s}c_{sj}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{s=0}^{N-1} b_{0s}\left(\sum_{j=0}^{N-1} c_{sj}\right)=1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{s,j=0}^{N-1} b_{ks}c_{sj}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{s=0}^{N-1} b_{ks}\left(\sum_{j=0}^{N-1} c_{sj}\right)=0,$$

$k=1,2,\ldots,N-1$.

Эти равенства можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0,N-1} \\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{N-1,0} & b_{N-1,1} & \cdots & b_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{00} + c_{01} + \cdots + c_{0,N-1} \\ c_{10} + c_{11} + \cdots + c_{1,N-1} \\ \cdots \\ c_{N-1,0} + c_{N-1,1} + \cdots + c_{N-1,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{N} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Выбирая различные ортогональные матрицы B_0 и C_0, удовлетворяющие указанному равенству (14) получаем по формуле (13) матрицу частотных функций.

Для получения достаточно простого класса ортогональных вейвлетов с компактным носителем и с матричным коэффициентом масштабирования, возьмем в качестве ортогональной матрицы B_0 следующую матрицу:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{N} & 1/\sqrt{N} & 1/\sqrt{N} & 1/\sqrt{N} & \cdots & 1/\sqrt{N} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & -3/\sqrt{12} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/\sqrt{N(N-1)} & 1/\sqrt{N(N-1} & 1/\sqrt{N(N-1} & 1/\sqrt{N(N-1} & \cdots & -(N-1)/\sqrt{N(N-1} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В работе [2] показано, что тогда в качестве матрицы C_0 можно взять матрицу вида $C_0 = B_0^{-1} M^T B_0$, где M – ортогональная матрица вида:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_1^1 & m_2^1 & \cdots & m_{N-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & m_1^{N-1} & m_2^{N-1} & \cdots & m_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Получаем,

$$\begin{aligned} H_M(z) &= D_p(z^N) B_0 M_e^T R(z) = \\ &= D_p(z^N) M^T B_0 R(z). \end{aligned} \tag{17}$$

Формула (17) дает прямой способ построения частотных функций $H_0(z)$, $H_1(z)$, …, $H_{N\text{-}1}(z)$ ортогональных вейвлетов с компактным носителем. Ортогональную матрицу M вида (16) и вектор степеней $p = (p_0, p_1, \ldots, p_{N-1})$ можно задавать произвольно. При построении частотной функции по формуле (4) нужно учитывать достаточное условие ортогональности, установленное теоремой 1.

Замечание. Для построения полифазной матрицы при помощи матриц $D_p(w)$, B_0 и C_0 можно также использовать следующую формулу:

$B(w) = B_0 \cdot D_p(w) \cdot C_0$.

В этом случае мы получаем матрицу частотных функций в виде: $H_M(z) = B_0 D_p(z^N) B_0^T M^T B_0 R(z)$.

Это приводит к другой серии ортогональных вейвлетов с компактным носителем.

3. Пример построения матрицы частотных функций. В данном разделе мы покажем на примере эффективность изложенной выше схемы построения матрицы частотных функций в виде (17).

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда N = det A = 5. Эта матрица является поворотом на угол $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ по часовой стрелке и растяжением с коэффициентом $\sqrt{5}$. Фактор-группа Z2/AtZ2 имеет 5 классов, представленных элементами (вектор-столбцами):

$d_0 = (0, 0)^t$, $d_1 = e_1 = (1, 0)^t$,
$d_2 = -e_1 = (-1, 0)^t$, $d_3 = e_2 = (0, 1)^t$,
$d_4 = -e_2 = (0, -1)^t$.

Найдем матрицу $R(z)$. Для каждого для $s = 0, 1, \ldots, 4$ рассмотрим вектор-столбцы координат векторов, $(A^t)^{-1} d_s = (\delta_{1s}, \delta_{2s})^t$. Для выбранной матрицы A имеем $(A^t)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому векторы $\rho_s = e^{-i2\pi (A^t)^{-1} d_s} = (e^{-i2\pi\delta_{1s}}, e^{-i2\pi\delta_{2s}})$ в нашем случае имеют выражения:

$$\rho_0 = e^{-i2\pi (A^t)^{-1} d_0} = (1, 1),$$

$$\rho_1 = e^{-i2\pi (A^t)^{-1} d_1} = (e^{-i2\pi/5}, e^{i4\pi/5}),$$

$$\rho_2 = e^{-i2\pi (A^t)^{-1} d_2} = (e^{i2\pi/5}, e^{-i4\pi/5}),$$

$$\rho_3 = e^{-i2\pi (A^t)^{-1} d_3} = (e^{-i4\pi/5}, e^{-i2\pi/5}),$$

$$\rho_4 = e^{-i2\pi (A^t)^{-1} d_4} = (e^{i4\pi/5}, e^{i2\pi/5}).$$

Умножение векторов ρ_s и $z = (z_1, z_2)$ определяется покоординатно,

$$\rho_s z = e^{-i2\pi (A^t)^{-1} d_s} z = (e^{-i2\pi\delta_{1s}} z_1, e^{-i2\pi\delta_{2s}} z_2).$$

Тогда, если $n = (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$, то для монома $z^n = z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ имеем следующую формулу умножения: $(\rho_s z)^n = e^{-i2\pi(d_s, A^{-1}n)} z^n$.

В случае выбранной матрицы:

$z^A = (z_1 z_2^{-2}, z_1^2 z_2) = (w_1, w_2)$.

Тогда матрица $R(z)$ принимает вид:

$$R(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & e^{-i2\pi/5} z_1 & e^{i2\pi/5} z_1 & e^{-i4\pi/5} z_1 & e^{i4\pi/5} z_1 \\ z_1^{-1} & e^{i2\pi/5} z_1^{-1} & e^{-i2\pi/5} z_1^{-1} & e^{i4\pi/5} z_1^{-1} & e^{-i4\pi/5} z_1^{-1} \\ z_2 & e^{i4\pi/5} z_2 & e^{-i4\pi/5} z_2 & e^{-i2\pi/5} z_2 & e^{i2\pi/5} z_2 \\ z_2^{-1} & e^{-i4\pi/5} z_2^{-1} & e^{i4\pi/5} z_2^{-1} & e^{-i2\pi/5} z_2^{-1} & e^{i2\pi/5} z_2^{-1} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Диагональную матрицу $D(w)$ возьмем, для примера, в виде $D(w) = \mathrm{diag}\{1, w_1, 1, w_2, 1\}$.

Выберем матрицу B_0 пятого порядка вида, указанного в (15).

Возьмем вращение вокруг оси Ox, например, в плоскости e_1, e_2:

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ 0 & -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Получаем,

$$H(t,z) = D(z^A) B_0 M_e^T(t) R(z) = \\ = D(z^A) M^T(t) B_0 R(z), \tag{20}$$

где $D(z^A) = diag\{1, z_1 z_2^{-2}, 1, z_1^2 z_2, 1\}$ и матрица $R(z)$ имеет вид (18). Перемножая все эти матрицы, находим частотные функции $H_0(z)$, $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$, $H_4(z)$:

$$H_0(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{5}(1 + e^{i\omega_1} + e^{i\omega_2} + e^{-i\omega_1} + e^{-i\omega_2}),$$

$$H_1(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{3\sqrt{10}}(-2\sqrt{3}\sin t e^{i2\omega_2} + \\ +(3\cos t + \sqrt{3}\sin t) e^{-i\omega_1} e^{i2\omega_2} + \\ +(-3\cos t + \sqrt{3}\sin t) e^{-i2\omega_1} e^{i2\omega_2}),$$

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{3\sqrt{10}}(-2\sqrt{3}\cos t e^{i\omega_1} + \\ +(-3\sin t + \sqrt{3}\cos t) + \\ +(3\sin t + \sqrt{3}\cos t) e^{-i\omega_1}),$$

$$H_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\sqrt{15}}(e^{-i\omega_1} e^{-i\omega_2} + e^{-i2\omega_1} e^{-i\omega_2} + \\ + e^{-i3\omega_1} e^{-i\omega_2} - 3 e^{-i2\omega_1} e^{-i2\omega_2}),$$

$$H_4(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{10}(e^{i\omega_1} - 4e^{i\omega_2} + 1 + e^{-i\omega_1} + e^{-i\omega_2}).$$

Тогда имеется всего 5 ненулевых коэффициентов масштабирующего уравнения:

$$h_{(-1,0)} = h_{(0,-1)} = h_{(0,0)} = h_{(1,0)} = h_{(0,1)} = 1/\sqrt{5}.$$

Поэтому масштабирующее уравнение имеет вид:

$\varphi(x,y) = \varphi(x+2y, -2x+y) +$
$+\varphi(x+2y+1, -2x+y) + \varphi(x+2y-1, -2x+y) +$
$+\varphi(x+2y, -2x+y+1) + \varphi(x+2y, -2x+y-1)$

и соответствует следующим векторам решетки $D = \{0, e_1, -e_1, e_2, -e_2\}$. Такая масштабирующая функция типа Хаара $\varphi(x,y)$ является [3] характеристической функцией компактного множества $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}^2$. Это множество $\mathbf{T}$ удовлетворяет уравнению $A\mathbf{T} = \bigcup_{s=0}^{5}(\mathbf{T} + d_s)$, имеет меру 1, замещает $\mathbf{R}^2$ при целочисленных сдвигах и имеет фрактальную границу (рис. 1).

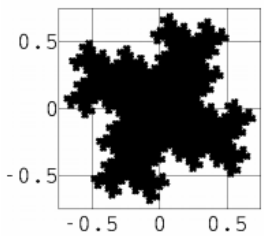

Рис. 1. ***Множество T для D = {0, e₁, –e₁, e₂, –e₂}***

Литература

1. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам [Текст] / И. Добеши. – М. –Ижевск: РХД, 2001. – 464 с.

2. Смоленцев, Н. К. Введение в теорию вейвлетов [Текст] / Н. К. Смоленцев. – М. – Ижевск: РХД, 2010. – 292 с.

3. Jorgensen, P. E. T. Matrix Factorizations, Algorithms, Wavelets / P.E.T. Jorgensen // Notices Amer. Math. Soc. – 2003. – Vol. 50, no. 8. – P. 880-894. ([Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.math.uiowa.edu/~jorgen/fea-jorgensen.pdf, свободный).

4. Podkur, P. N. About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient *N* / P. N. Podkur, N. K. Smolentsev // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv.org, arXiv:0705.4150v1 [math.FA], 2007, 15 P., свободный.