УДК 681.5.015

ОСОБЕННОСТИ ДИСКРЕТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

С. Г. Гутова, В. Я. Карташов

THE SPECIAL FEATURES OF THE DISCRETE SIMULATION OF DYNAMIC OBJECTS

S. G. Gutova, V. Ja. Kartashov

Современный уровень развития производственных процессов и объектов предъявляет повышенные требования к точности и качеству систем управления. Возрастают требования к методам идентификации, применяемым для получения необходимых характеристик систем управления. Предлагаемая методика построения дискретной модели объекта на основе метода структурно-параметрической идентификации, позволяет выделить область значения параметров управляющих воздействий, приводящих к линейным характеристикам объекта. Показано, что вид дискретной модели объекта зависит от структуры входного воздействия, но не зависит от его параметров.

The modern level of development of production processes and objects produces the promoted requirements to exactness and quality of control systems. Requirements for the methods of identification, used for obtaining the necessary characteristics of the control systems are growing. The proposed procedure of the construction of the discrete model of object on the basis of structural-parametric identification method makes it possible to mark out range of values of the parameters of the controlling influences, which lead to the linear characteristics of object. It is shown that the type of the discrete model of object depends on the structure of input action, but it does not depend on its parameters.

Ключевые слова: динамический объект, дискретная математическая модель, непрерывная дробь, структурно-параметрическая идентификация, условие физической реализуемости.

Keywords: dynamic object, discrete mathematical model, continued fraction, structural-parametric identification, condition of the physical realizability.

При проектировании математического и информационного обеспечения цифровых систем мониторинга и управления производственными процессами для обеспечения их качественной работы, как правило, используются дискретные модели этих процессов. Необходимость в таких моделях состоит в том, что они отражают наличие определенных динамических свойств, а значит, позволяют отслеживать изменение этих свойств, и своевременно адаптировать структуру и состав алгоритмического обеспечение цифровой системы мониторинга и управления.

Если в процессе проектирования имеются некоторые предположения о структуре непрерывной динамической модели, дискретную модель объекта часто строят, аппроксимируя дифференциальные уравнения с помощью классического набора преобразований, то есть получение ее дискретного аналога предполагает замену производных конечными разностями, что соответствует замене в передаточной функции объекта переменной s преобразования Лапласа выражениями, получившими название прямых разностей Эйлера вида: $s = \dfrac{z-1}{\Delta t}$,

обратных разностей Эйлера вида: $s = \dfrac{1-z^{-1}}{\Delta t}$,

преобразования Тастина (билинейное преобразование), имеющего вид:

$$s = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

Исследования, произведенные в работе [1] показали, что, несмотря на сохранение в дискретной модели дробно-рациональной формы, при усложнении объекта и увеличении периода дискретизации точность моделирования существенно уменьшается, более того, схемы дискретного моделирования могут стать неустойчивыми.

Сохранить динамические свойства объекта при переходе к дискретной модели позволяет согласованное Z-преобразование

$$z = e^{s \cdot \Delta t},$$

где z – комплексная переменная Z-преобразования, s – комплексная переменная преобразования Лапласа, Δt – период дискретизации [2].

Не останавливаясь на сложностях, связанных с использованием согласованного Z-преобразования [2, 3], приведем подход получения дискретной математической модели, порождающий на практике множество эквивалентных дискретных математических моделей, зависящих от величины периода дискретизации Δt, выбираемого из множества допустимых периодов дискретизации $\left(\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max}\right)$. Под допустимой величиной периода дискретизации понимается такая его величина, при которой сохраняется взаимно однозначное соответствие между непрерывной передаточной функцией объекта и полученной дискретной передаточной функцией. Отличительной чертой данного подхода является то, что интервал допустимых шагов дискретизации значителен по величине. Это позволяет строить последовательность дискретных математических моделей, соответствующих различным последовательностям значений Δt. Именно такая возможность позволяет учесть реальные условия задачи, например периодичность лабораторных анализов, скорректировать алгоритмы системы мониторинга, построить оптимальные цифровые системы управления.

Изложим существо метода получения дискретных математических моделей на основе алгоритмов теории непрерывных дробей, получившего название метода SP-идентификации (структурно-параметрической идентификации). Исходными данными являются измерения вход-выходных переменных (x, y) через равные промежутки времени с периодом дискретизации Δt. Если имеется непрерывная модель объекта, то по заданному входному воздействию $x(t)$ определяется реакция объекта (например, с использованием преобразования Лапласа), а затем образуется совокупность равноотстоящих измерений $\left(x(n \cdot \Delta t), y(n \cdot \Delta t)\right)$,

где $n \in \left\{0, 1, 2, ..., k, ...\right\}$.

Другой вариант исходных данных – это экспериментально полученная совокупность измерений.

Используя в качестве прототипа понятие передаточной функции из классической теории автоматического управления [4], введем в рассмотрение функцию, информационно отображающую индивидуальные свойства динамического процесса:

$$G\left(z, \Delta t\right) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} y(k \cdot \Delta t)z^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} x(k \cdot \Delta t)z^{-k}} = \frac{Y\left(z, \Delta t\right)}{X\left(z, \Delta t\right)}, \qquad (1)$$

где

$$X\left(z, \Delta t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot \Delta t)z^{-k}$$

и $Y\left(z, \Delta t\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y(k \cdot \Delta t)z^{-k}$

Z-преобразования вход-выходных дискретных последовательностей. В общем случае, функцию $G\left(z, \Delta t\right)$ вида (1) назовем *идентифицирующей функцией*.

Принципиально, входное воздействие $x(t)$ может быть как детерминированным, так и случайным; как конечным, так и бесконечным и так далее. Поскольку $y(t)$ – это индивидуальная реакция объекта, то отдельное получение $X\left(z, \Delta t\right)$ и $Y\left(z, \Delta t\right)$ приведет к потере взаимосвязи этих переменных и к потере информационных свойств преобразующего объекта. Совместная обработка Z-преобразований осуществляется алгоритмами теории непрерывных дробей, в частности алгоритмом В. Висковатова [5].

Отношение (1) преобразуется в идентифицирующую матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} x(0) & x(\Delta t) & x(2\Delta t) & ... & x(n\Delta t) & ... \\ y(0) & y(\Delta t) & y(2\Delta t) & ... & y(n\Delta t) & ... \\ y_1(0) & y_1(\Delta t) & y_1(2\Delta t) & ... & y_1(n\Delta t) & ... \\ y_2(0) & y_2(\Delta t) & y_2(2\Delta t) & ... & y_2(n\Delta t) & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ y_m(0) & y_m(\Delta t) & y_m(2\Delta t) & ... & y_m(n\Delta t) & ... \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

которая имеет бесконечно много строк и столбцов, при этом заполняется итерационно по мере поступления новых измерений с помощью соотношения:

$$y_m(n\Delta t) = \frac{y_{m-2}\left((n+1)\Delta t\right)}{y_{m-2}(0)} - \frac{y_{m-1}\left((n+1)\Delta t\right)}{y_{m-1}(0)}, \qquad (3)$$

где $m = 1, 2, 3, ...$ – номера строк; $n = 1, 2, 3, ...$ – номера столбцов; $y_{-1}(n\Delta t) = x(n\Delta t)$ – значения входа объекта, $y_0(n\Delta t) = y(n\Delta t)$ – значения выхода объекта.

Заметим, что если в какой-либо строке первые k элементов – нулевые, то осуществляется сдвиг всех элементов строки на k позиций влево до появления ненулевого элемента.

Первый столбец матрицы (2) образует непрерывную дробь (НД), представленную соотношением:

$$G\left(z, \Delta t\right) = \frac{y(0)/x(0)}{1} + \frac{y_1(0)z^{-1}}{1} + ... + \frac{y_m(0)z^{-1}}{1} + \,..., \qquad (4)$$

коэффициенты которой, согласно правилу (3), зависят от значений вход-выходных переменных $\left(x(n \cdot \Delta t), y(n \cdot \Delta t)\right)$, то есть функция $G\left(z, \Delta t\right)$ принципиально включает измерительную информацию об объекте.

В работе [6] НД (4) порождает математическую модель объекта и, при условии $y(0) = 0$, позволяет сделать классификацию этих моделей по структурным особенностям, характеризующим объект:

1. Если входное воздействие $x(t)$ не изменяет значения выходной переменной $y(t)$, то есть $y(n\Delta t) = y(0)$, то согласно (1) $G\left(z, \Delta t\right) = 0$ при любых воздействиях $x(t)$.

2. Если элементы какой-то (m+1) – строки равны нулю, то получим конечную НД вида:

$$G\left(z, \Delta t\right) = \frac{y(0)/x(0) \cdot z^{-1}}{1} + \frac{y_1(0)z^{-1}}{1} + ... + \frac{y_m(0)z^{-1}}{1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i z^{-1}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i z^{-1}}, \qquad (5)$$

которая порождает математическую модель в форме разностного уравнения порядка r. Порядок r определяет объект с конечной памятью в том смысле, что если знать r предыдущих значений (x, y), то значение $y^M(r+1)$ определяется однозначно. Таким образом, в этом случае соотношение (5) определяет прогноз развития процесса.

3. Если нулевых строк нет, то НД (4) определяет счетную последовательность конечных НД, которые являются приближениями функции $G\left(z, \Delta t\right)$:

$$G_1(z,\Delta t), \quad G_2(z,\Delta t), \quad \ldots, \quad G_m(z,\Delta t), \quad \ldots \quad (6)$$

Если существует подпоследовательность последовательности (6), порожденная номерами строк, элементы которых близки к нулю, то эта подпоследовательность сходится к функции $G(z,\Delta t)$. Используя свойства НД такой подпоследовательности можно утверждать, что она определяет интервальную модель. Таким образом, приходим к интервальному прогнозу развития процесса, получаемому математическими моделями с конечной памятью.

4. Если такой подпоследовательности нет, то хотя и существует последовательность математических моделей (6) с конечной памятью, то трудно утверждать, что эта последовательность сходится к $G(z,\Delta t)$, то есть данный процесс фактически нельзя прогнозировать.

В данной работе в основном приводятся объекты с конечной памятью. Заметим, что приведенная классификация зависит от периода дискретизации Δt. Для иллюстрации решения задачи SP-идентификации вышеизложенным алгоритмом, возьмем часто встречающийся на практике апериодический объект первого порядка с передаточной функцией: $G\left(s\right) = \dfrac{k}{Ts+1}$. (7)

Не нарушая общности, положим $k = 1$. Реакция объекта на единичное ступенчатое входное воздействие $x(t) = 1(t)$ при нулевых начальных условиях $y(0) = 0$ определяется следующей временной функцией: $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$.

Выберем период дискретизации $\Delta t = \dfrac{T}{n}$,

где T – постоянная времени, характеризующая инерционность объекта,
n – натуральное число.

Тогда результаты измерений в моменты времени $\left\{ t_k \right\}$ образуют таблицу 1.

Таблица 1

Результаты измерений переходной характеристики объекта (7)

Моменты измерений $t_k = k \cdot \Delta t$	$t_0 = 0$	$t_1 = \frac{T}{n}$	$t_2 = \frac{2T}{n}$	...	$t_k = \frac{kT}{n}$	...
Результаты измерений $y(t_k)$	0	$1 - e^{-\frac{1}{n}}$	$1 - e^{-\frac{2}{n}}$	...	$1 - e^{-\frac{k}{n}}$	...

Отношение Z-преобразования выходного воздействия к Z-преобразованию входного при нулевых начальных условиях определяет дискретную передаточную функцию $G(z,\Delta t)$:

$$G\left(z, \Delta t\right) = \frac{Y\left(z, \Delta t\right)}{X\left(z, \Delta t\right)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1 - e^{-\frac{k}{n}})z^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{-k}},$$

которая определяет математическую модель, отражающую причинно-следственную связь между вход-выходными переменными. Составим идентифицирующую матрицу вида (2), используя соотношение (3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots \\ 1-e^{-\frac{1}{n}} & 1-e^{-\frac{2}{n}} & 1-e^{-\frac{3}{n}} & \ldots & 1-e^{-\frac{k}{n}} & \ldots \\ y_1(0) & y_1(\Delta t) & y_1(2\Delta t) & \ldots & y_1((k-1)\Delta t) & \ldots \\ y_2(0) & y_2(\Delta t) & y_2(2\Delta t) & \ldots & y_2((k-1)\Delta t) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

в которой элементы первой строки определяются соотношением:

$$y_1\left((k-1)\Delta t\right) = -e^{-\frac{1}{n}}\left(1 + e^{-\frac{1}{n}} + e^{-\frac{2}{n}} + \ldots + e^{-\frac{k-1}{n}}\right),$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$, а элементы второй строки $y_2\left((k-1)\Delta t\right) = 0$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ Эта нулевая строка определяет собой математическую модель первого порядка. Тогда дискретная передаточная функция объекта, с учетом сдвига на одну позицию влево $y_0(0) = 0$, приобретает вид:

$$G(z, \Delta t) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \cdot z^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n}} \cdot z^{-1}} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}\right) \cdot z^{-1}}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}} \cdot z^{-1}}.$$

Тогда дискретная математическая модель с единичной конечной памятью имеет вид:

$$y^M(n\Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{T}} \cdot y^M\left((n-1)\Delta t\right) + \\ + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}\right) \cdot x\left((n-1)\Delta t\right).$$

Отметим, что начальные нулевые значения являются необходимым условием получения математической модели, структура которой отражает принцип причинно-следственной связи. Такие математические модели применимы в задачах управления, прогнозирования и обладают свойством физической реализуемости, суть которого в том, что реакция объекта не может возникнуть в тот же момент времени, в который к объекту было приложено воздействие. Следует отметить, что исследования по нахождению условия физической реализуемости, отражению их в математической модели и использованию их на практике далеки от завершения.

Остановимся на возможности определения дополнительных свойств физически реализуемых математических моделей с конечной памятью, которые играют важную роль в задачах проектирования цифровых систем управления производственными процессами. Очевидно, что эти свойства целесообразно связать со свойствами идентифицирующей матрицы (2).

Предположим, что существует физически реализуемая математическая модель с конечной памятью, построенная для входного воздействия $x(t_0) \neq 0$, где t_0 – время начала воздействия, а $y(t_0) = 0$. Тогда, как следует из свойств идентифицирующей матрицы, эта модель сохраняется при условии входного воздействия $x(t-\tau)$, где τ – время транспортного запаздывания входа $x(t)$ при условиях $x(t_0-\tau) \neq 0$, а $y(t_0-\tau) = 0$. Данное свойство позволяет осуществлять рациональное проектирование систем контроля производства.

Очень важной для практики является задача построения адекватной линеаризованной динамической модели в некоторой области допустимых изменений входных воздействий. Значимость этой задачи связана с построением оптимальных линейных и нелинейных алгоритмов оптимального управления. Рассмотрим простейшее (схемное) решение такой задачи. В качестве входных воздействий разомкнутой части исследуемого объекта в цифровых системах управления используются ступенчатые воздействия $x(t) = \alpha \cdot 1(t)$, где $\alpha \in \mathrm{A}$, а A – некоторое числовое множество амплитуд допустимых входных ступенчатых воздействий конечной длительности. Требуется определить подмножество $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}$, для которого справедливо свойство линеаризуемости математической модели.

Заметим, что при фиксированной структуре воздействия свойство линейности объекта сводится к проверке однородности математической модели. Сделать это в данном случае можно следующим образом. Построим базовую идентифицирующую матрицу объекта при базовом входе $x_б(t) = 1(t)$, приводящем к базовому переходному процессу $y_б(t)$. Возьмем конечное разбиение $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ множества A, проводим экспериментальным путем получение переходных процессов объекта при входных воздействиях $x_i(t) = \alpha_i \cdot 1(t)$. Предположим, что для $\alpha_i \in \mathrm{A}_1$ получим $y_i(t) = \alpha_i \cdot y_б(t)$. При фиксированном периоде дискретизации Δt идентифицирующая матрица для данных $x_i(t)$ и $y_i(t)$ будет приводить к базовой идентифицирующей матрице, то есть дискретная передаточная функция будет одной и той же, что свидетельствует о выполнении в достаточной мере условия линеаризуемости. В противном случае, когда $x_i(t) = \alpha_i \cdot 1(t)$ и $\alpha_i \notin \mathrm{A}_1$, то получим, что $y_i(t) \neq \alpha_i \cdot y_б(t)$. В этом случае базовая и полученная идентифицирующие матрицы приводят к получению разных дискретных передаточных функций, отличающихся значениями параметров или структурой. В этом случае констатируем, что модель объекта нелинейна.

Очевидно, данный подход может быть применен в полной мере для математических моделей в отклонениях от некоторого номинального режима. Исследование структуры множества значений параметра A позволяет спроектировать эффективную цифровую систему управления, зависящую от полноты разбиения $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ множества A.

В заключение отметим тот факт, что дискретная передаточная функция объекта не обладает, в отличие от непрерывной передаточной функции, свойством инвариантности к виду входного воздействия. В таблице 2 приведены дискретные модели объекта, имеющего непрерывную передаточную функцию вида:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \tag{8}$$

найденные с периодом дискретизации $\Delta t = 1$ при различных входных воздействиях.

Из таблицы 2 видно, что изменение структуры входного воздействия влияет на структуру передаточной функции.

Таблица 2

Дискретные модели объекта вида (8) при различных входных воздействиях

Вид воздействия $x(t)$	***Дискретная модель объекта*** $G(z, \Delta t)$
Единичный импульс $\delta(t)$	$\frac{1}{1-0,3679z^{-1}}$
Единичное ступенчатое воздействие $1(t)$	$\frac{0,6321z^{-1}}{1-0,3679z^{-1}}$
Линейное воздействие t	$\frac{0,3679+0,2642z^{-1}}{1-0,3679z^{-1}}$
Квадратичное воздействие t^2	$\frac{0,1321+0,4184z^{-1}+0,0803z^{-2}}{1+0,6321z^{-1}-0,3679z^{-2}}$

Этот факт требует осторожности при проектировании линейных цифровых фильтров, выраженных апериодическим звеном первого порядка.

Например, при преобразовании дискретных передаточных функции, приведенных в таблице 2 в конечно-разностные уравнения получаем выражения вида:

$$y(n \cdot \Delta t) = 0,3679y((n-1) \cdot \Delta t) + x(n \cdot \Delta t) \qquad (9)$$

для импульсного входного воздействия;

$$y(n \cdot \Delta t) = 0,3679y((n-1) \cdot \Delta t) + \\ +0,6321x((n-1) \cdot \Delta t) \qquad (10)$$

для единичного ступенчатого входного воздействия;

$$y(n \cdot \Delta t) = 0,3679y((n-1) \cdot \Delta t) + \\ +0,03679x(n \cdot \Delta t) + 0,2642x((n-1) \cdot \Delta t) \qquad (11)$$

для линейного входного воздействия и

$$y(n \cdot \Delta t) = -0,6231y((n-1) \cdot \Delta t) + \\ +0,3679y((n-2) \cdot \Delta t) + \\ +0,1321x(n \cdot \Delta t) + 0,4184x((n-1) \cdot \Delta t) + \\ +0,0803x((n-2) \cdot \Delta t) \qquad (12)$$

для квадратичного входного воздействия.

Среди моделей (9) – (12) лишь (10) удовлетворяет условию физической реализуемости. В моделях (9), (11) и (12) для нахождения $y(n\Delta t)$ – реакции объекта в *n*-ый момент времени требуется знать значения входного воздействия $x(n\Delta t)$ в тот же момент времени, что в реальности невозможно. При использовании таких входных воздействий в управляющих системах необходимо использовать прогнозатор.

Таким образом, в статье указан способ выделения из множества значений управляющих воздействий подмножества, приводящего к линейным характеристикам объекта. Это позволяет осуществить процесс проектирования цифровых систем с помощью широко известного в теории автоматического управления аппарата линейных цифровых управляющих систем. Кроме того, можно сделать вывод: для того, чтобы работали дискретные модели вида (9), (11) и (12) необходима дополнительная разработка прогнозирующего алгоритма входного воздействия по крайней мере на один шаг вперед.

Литература

1. Щекочихина, С. Г. Разработка метода дискретного моделирования в задачах диагностики сложных объектов горной техники / С. Г. Щекочихина: дис. … канд. тех. наук: 05.13.16. – Кемерово, 1999. – 297 с.
2. Карташов, В. Я. Влияние периода дискретизации на структурно-параметрическое взаимосоответствие между непрерывной и дискретной по времени моделями линейного динамического объекта / В. Я. Карташов, О. Н. Инденко, А. А. Александрова // Препринт № 15. – Барнаул: Из-во Алтайского госуниверситета, 1996. – 36 с.
3. Карташов, В. Я. Аппроксимация дискретной передаточной функции линейного объекта непрерывными дробями по дискретным измерениям вход-выходных переменных / В. Я. Карташов, О. Н. Инденко, А. А. Александрова // Препринт № 16. – Барнаул, 1996. – 32 с.
4. Первозванский, А. А. Курс теории автоматического управления: учебное пособие / А. А. Первозванский. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
5. Хованский, А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа / А. Н. Хованский. – М.: Гостехиздат, 1956. – 203 с.
6. Карташова, Л. В. Построение причинно-следственных моделей социально-экономических процессов / Л. В. Карташова, В. Я. Карташов: монография; ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет». – Томск: Издательство Томского государственного педагогического университета, 2008. – 156 с.