УДК 514.576

ТВИСТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НА СФЕРЕ S^4

Е. С. Корнев

TWISTOR EXFOLIATION ON THE SPHERE S^4

E. S. Kornev

В работе исследуются твисторные расслоения на четырехмерной сфере. Показано, что трехмерное комплексное проективное пространство можно рассматривать как твисторное расслоение на четырехмерной сфере и что любое твисторное расслоение диффеоморфно этому расслоению. Предъявлен явный вид ортогональных почти комплексных интегрируемых и неинтегрируемых структур и дан способ параметризации таких структур. Также в работе приводятся некоторые факты, связанные с геометрией и топологией трехмерного комплексного проективного пространства.

In this work the twistor fibrations on a four-dimensional sphere are investigated. It is shown, that the three-dimensional complex projective space can be considered as twistor fibration on a four-dimensional sphere and that any other twistor fibration is diffeomorphic to one. The explicit view of orthogonal almost complex integrable and non integrable structures on twistor fibration is provided, and the parametrization way for such structures is given. Also, in work some facts related to geometry and topology of three-dimensional complex projective space are mentioned.

Ключевые слова: четырехмерная сфера; трехмерное комплексное проективное пространство; твисторное расслоение; ортогональная почти комплексная структура.

Key words: four-dimensional sphere, three-dimensional complex projective space, twistor exfoliation, orthogonal structure.

Рассмотрим четырехмерную сферу S^4 в пространстве $\mathbb{R}^5$ и обозначим через g_0 каноническую метрику на S^4 , индуцированную из $\mathbb{R}^5$. Множество ортогональных относительно метрики g_0 почти комплексных структур – это множество всех почти комплексных структур, сохраняющих данную метрику.

Сфера S^4 является компактным ориентируемым римановым многообразием. Пусть S^2 – двумерная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных a, b, c . Каждая точка $(a, b, c) \in S^2$ в фиксированном базисе касательного пространства к сфере S^4 в точке x определяет две почти комплексные структуры в точке x :

$$J^+ = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & b & -a & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$J^- = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -c & b \\ -b & c & 0 & -a \\ -c & -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Обе эти почти комплексные структуры сохраняют метрику g_0 , причем J^+ сохраняет ориентацию на S^4 , а J^- меняет ориентацию.

Твисторным расслоением называется расслоение (P, π, M) , где M – риманово многообразие четной размерности с метрикой g , π – проекция $P \mapsto M$, а P – дифференцируемое многообразие, такое, что каждая точка u из P является ортогональной относительно метрики g почти комплексной структурой в $T_x M, x = \pi(u)$, сохраняющей ориентацию на M . Слоем твисторного расслоения над точкой x является множество всех ортогональных почти комплексных структур в пространстве $T_x M$, согласованных с выбранной ориентацией на M . Глобальное сечение твисторного расслоения называется ортогональной почти комплексной структурой на многообразии M .

Пусть g – произвольная риманова метрика на S^4 . В каждой точке $x \in S^4$ существует невырожденное линейное преобразование A_x касательного пространства в точке x , такое, что $a^* g_0 = g$. Если J – почти комплексная структура, сохраняющая метрику g , то для любых X и Y из $T_x S^4$ имеем:

$$\begin{aligned} g_0(A X, A Y) &= g(X, Y) = \\ &= g_0(A^\circ J X, A^\circ J Y) = g_0(J_A^\circ A X, J_A^\circ A Y), \end{aligned}$$

где $J_A = A^\circ J^\circ A^{-1}$. Таким образом, отображение A индуцирует взаимнооднозначное соответствие между множествами почти комплексных структур, ортогональных относительно метрик g_0 и g соответственно.

Поскольку множество согласованных с ориентацией ортогональных почти комплексных структур в каждой точке сферы S^4 диффеоморфно сфере S^2 , а $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$, то множество сохраняющих ориентацию ортогональных почти комплексных структур в $T_x S^4$ изоморфно пространству $\mathbb{C}P^1$, и слоем твисторного расслоения в точке x можно считать $\mathbb{C}P^1$.

Теперь каждую согласованную с ориентацией ортогональную почти комплексную структуру в точке сферы S^4 можно отождествить с парой (x, z) , где $x \in S^4, z \in \mathbb{C}P^1$. Однако тривиальное расслоение $S^4 \times \mathbb{C}P^1$ не является твисторным. Действительно, если расслоение $S^4 \times \mathbb{C}P^1$ является твисторным, то, поскольку оно допускает глобальное сечение, это сечение задает ортогональную почти комплексную структуру на S^4 . Но известно, что сфера S^4 не допускает почти комплексных структур.

Рассмотрим пространство $\mathbb{H}CP^1$ всех комплексных прямых в кватернионном пространстве $\mathbb{H}^2$. Каждый кватернион $q = t + xi + yj + zk$ можно отождествить с парой комплексных чисел $(t + ix, y + iz)$. Такое отождествление задает взаимнооднозначное соответствие между пространствами $\mathbb{C}P^3$ и $\mathbb{H}CP^1$. А именно каждой прямой в $\mathbb{C}^4$ с направляющим вектором (z_1, z_2, z_3, z_4) сопоставляется комплексная прямая в $\mathbb{H}^2$ с направляющим вектором

$(q_1, q_2), q_1 = z_1 + z_2 j, q_2 = z_3 + z_4 j$. В дальнейшем будем отождествлять комплексную прямую из $\mathbb{H}CP^1$ с ее направляющим вектором (q_1, q_2) .

Пространство $\mathbb{C}P^1$ можно рассматривать как пространство ненулевых кватернионов, профакторизованное относительно умножения на ненулевые комплексные числа. Будем обозначать класс эквивалентности кватерниона q через $[q]$ и отождествлять его с элементом из $\mathbb{C}P^1$.

Определим действие $\mathbb{C}P^1$ на $\mathbb{C}P^3$ следующим образом:

$$[q](q_1, q_2) = (q_1 q, q_2 q), (q_1, q_2) \in \mathbb{H}CP^1.$$

Зададим проекцию $\pi : \mathbb{C}P^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ следующим образом:

$$\pi(q_1, q_2) = \left(2 \frac{q_1 \bar{q}_2}{|q_1|^2 + |q_2|^2}, \frac{|q_1|^2 - |q_2|^2}{|q_1|^2 + |q_2|^2} \right),$$

считая, что каждый кватернион определяет точку вещественного пространства $\mathbb{R}^4$, а $\bar{q} = t - ix - jy - kz$ если $q = t + ix + jy + kz$. Прямое вычисление показывает, что норма элемента

$\pi(q_1, q_2)$ равна 1. Следовательно, образом пространства $\mathbb{C}P^3$ при этой проекции является сфера S^4 . Если q – ненулевой кватернион, то

$$\pi(qq_1, qq_2) = \pi(q_1, q_2).$$

Относительно введенного действия $\mathbb{C}P^1$ на $\mathbb{C}P^3$, слоем над точкой сферы S^4 является пространство $\mathbb{C}P^1$.

Введем открытые множества

$$U_1 = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{C}P^3 : q_1 \neq 0\} \text{ и}$$

$$U_2 = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{C}P^3 : q_2 \neq 0\}.$$

Отображения $\phi_1(q_1, q_2) = (\pi(q_2 / q_1, 1), [q_1])$ и $\phi_2(q_1, q_2) = (q_1 / q_2, 1), [q_2]$.

Задают локальные диффеоморфизмы $U_1 \mapsto \pi(U_1 \times \mathbb{C}P^1)$ и $U_2 \mapsto \pi(U_2) \times \mathbb{C}P^1$ соответственно. Таким образом, $\mathbb{C}P^3$ является расслоением над S^4 со слоем $\mathbb{C}P^1$.

Сфера S^4 изометрична кватернионному проективному пространству $\mathbb{H}P^1$ с метрикой $h(q, q) = \text{Re}(q\bar{q})$.

Касательное пространство в точке $u \in \mathbb{H}P^1$ изоморфно кватернионному пространству $\mathbb{H}$. Известно (см. [3], том 1), что группа всех ортогональных преобразований пространства $\mathbb{H}$ состоит из отображений вида:

$$f(x) = pxq, |p| = |q| = 1,$$

и изоморфна $SO(4)$. Обозначим через W множество кватернионных преобразований вида:

$$J_q(x) = xq, q = ai + bj + ck, a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Каждое такое преобразование сохраняет метрику h и ориентацию пространства $\mathbb{H}$. Кроме того, $J_q \circ J_q = -id$. Заметим, что преобразование $J_q(x) = qx$ также сохраняет метрику h , но меняет ориентацию пространства $\mathbb{H}$. Группа $U(2)$ изоморфна $SU(2) \times U(1)$, а следовательно, диффеоморфна $S^3 \times S^1$. Отсюда следует, что множество отображений вида:

$$f_q(x) = px \exp(i\varphi)q, |p| = |q| = 1, q =$$

$$= ai + bj + ck = \text{Const}$$

диффеоморфно $U(2)$, а множество W диффеоморфно $SU(4) / U(2)$, т. е. является множеством ортогональных, сохраняющих ориентацию, почти комплексных структур (подробнее см. [2], том 2, глава 9). Получаем, что множество всех ортогональных, сохраняющих ориентацию, почти комплексных структур в $T_u \mathbb{H}P^1$ параметризуется кватернионами

$$\text{вида } q = ai + bj + ck, a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

вида $q = ai + bj + ck, a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Каждой комплексной прямой (q_1, q_2) из $\mathbb{C}P^3$ можно сопоставить кватернионную прямую из $\mathbb{H}P^1$ с направляющим вектором (q_1, q_2) . Каждый элемент $[q], q = z_1 + z_2j$ слоя $\pi^{-1}(q_1, q_2)$ определяет ортогональную, сохраняющую ориентацию на $\mathbb{H}P^1$, почти комплексную структуру:

$$J_q^+ : q = \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1 / z_2)i + \operatorname{Im}(z_1 / z_2)j + \\ + \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}k \mid z_2 \neq 0, \\ k \mid z_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем, что $\mathbb{C}P^3$ является твисторным расслоением над $\mathbb{H}P^1$, а следовательно, и над S^4 .

Каждый элемент (q_1, q_2) кватернионного пространства $\mathbb{H}^2$, такой, что $|q_1|^2 + |q_2|^2 = 1$ можно отождествить с точкой единичной сферы S^7 в пространстве $\mathbb{R}^8$. Если $z = \exp(ix), x \in \mathbb{R}$, то элементы (q_1z, q_2z) и (q_1, q_2) определяют одну и ту же комплексную прямую в пространстве $\mathbb{C}P^3$. Отсюда получаем, что пространство $\mathbb{C}P^3$ диффеоморфно однородному пространству S^7 / S^1 . Поскольку сфера S^7 односвязна, а окружность S^1 связна, пространство S^7 / S^1 является компактным и односвязным. Следовательно, $\mathbb{C}P^3$ является компактным и односвязным.

На $\mathbb{C}P^3$ существует естественная комплексная структура $J_0 : J_0X = iX$ и каноническая метрика Фубини-Штуди h_0 , относительно которой комплексная структура J_0 является ортогональной. Это превращает твисторное расслоение $\mathbb{C}P^3$ в эрмитово многообразие. Обозначим через D_u подпространство, ортогональное касательному пространству к слою $\mathbb{C}P^1$ твисторного расслоения над сферой S^4 относительно метрики h_0 в каждой точке $u \in \mathbb{C}P^3$. Касательное пространство $T_u\mathbb{C}P^3$ раскладывается в ортогональную сумму $D_u \otimes T_u\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}$. Отсюда, любая ортогональная почти комплексная структура на $\mathbb{C}P^3$, инвариантно действующая на касательном пространстве к слою $\mathbb{C}P^1$, в точке u действует инвариантно на D_u .

На слое $\mathbb{C}P^1$ существует единственная, с точностью до знака ортогональная комплексная структура $J : JX = \pm iX$. Поскольку дифференциал про-

екции π задает изоморфизм подпространства D_u на $T_xS^4, x = \pi(u)$, то множество ортогональных, инвариантно действующих на слоях твисторного расслоения почти комплексных структур в каждой точке u из $\mathbb{C}P^3$ полностью определяется пространством ортогональных почти комплексных структур в точке $\pi(u)$ сферы S^4 . Как было показано выше, каждый кватернион $q = ai + bj + ck, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ определяет две ортогональные почти комплексные структуры в точке x сферы S^4 , одна из которых сохраняет, а другая меняет ориентацию касательного пространства T_xS^4 . Поскольку любое векторное поле X на $\mathbb{C}P^3$ в любой точке u можно разложить в сумму $X = Y + Z, Y \in D_u, Z \in T_u\mathbb{C}P^1$, то любая ортогональная, инвариантно действующая на слоях твисторного расслоения почти комплексная структура на $\mathbb{C}P^3$ имеет либо вид: $J^+ : J^+X = J_q^+Y + iZ$, либо вид: $J^- : J^-X = J_q^-Y - iZ$.

В [1] доказано, что почти комплексные структуры вида J^+ интегрируемы, а почти комплексные структуры вида J^- не интегрируемы.

Матричное представление ортогональной, инвариантно действующей на слоях твисторного расслоения, почти комплексной структуры в каждой точке $\mathbb{C}P^3$ в группе $Sp(2)$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cc} \pm(ai + bj + ck) & 0 \\ 0 & \pm i \end{array} \right) \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

а в группе $SU(3)$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cc} \pm \left(\begin{array}{cc} ix & -y + iz \\ y + iz & -ix \end{array} \right) & 0 \\ 0 & \pm i \end{array} \right) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Литература

1. Hitchin, N. Kahlerian twistor spaces / N. Hitchin // Proc. Lond. Math. Soc. (3) 43, 133 – 150, 1981.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии. В 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Намидзу. – М.: Наука, 1981.
3. Дубровин, Б. А. Современная геометрия. Методы и приложения. В 2 т. / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: Эдиториал УРСС, 1998.

Рецензент – В. Н. Черненко, ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет».