

**РАЗВИТИЕ ПАКЕТА ПРОГРАММ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ****Т. В. Бурнышева, В. О. Каледин, И. В. Равковская, С. В. Эптешева**

Рассматриваются сопряженные и связанные задачи, решаемые при оценке работоспособности конструкций машин, зданий и сооружений при экстремальных воздействиях. Описана программная реализация математических моделей на базе исследовательского пакета прикладных программ, обеспечивающего сопряжение моделей разнородных физических процессов при решении связанных задач.

We consider the conjugate and related tasks to be undertaken in assessing the performance of machine design, buildings and structures under extreme conditions. The computer program of mathematical models based on the research of the application package, which provides coupling of heterogeneous models of physical processes in solving related problems.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных элементов, пакет программ, огнестойкость, конструкция.

Целью вычислительного эксперимента в механике конструкций является определение отклика моделируемого объекта на воздействия либо расчетные эксплуатационные, либо приводящие к деградации его несущей способности. Причинами, приводящими к разрушению конструкции, могут быть нарушение целостности отдельных несущих элементов конструкции при воздействии взрыва, удара и т. п., возбуждение колебаний, возникновение термических напряжений в конструкции при огневом воздействии, снижение прочности материалов конструкции вследствие повышения температуры конструктивных элементов, выгорание материала и целый ряд других факторов различной физической природы. С другой стороны, механическое поведение силовой конструкции в режиме нормального функционирования необходимо анализировать для выявления возможности оптимизации функциональных свойств машиностроительных изделий.

Анализ влияния всех этих факторов, как правило, возможен только в совокупности, путём математического моделирования различных сценариев функционирования либо разрушения конструкции вследствие воздействия на неё физических полей различной природы. Таким образом, приходится рассматривать ряд взаимосвязанных задач по расчету отклика моделируемого объекта на различные виды воздействий. Тогда математическую модель необходимо представить в виде совокупности компонент: инвариантной части, отражающей состав, форму, структуру и свойства моделируемой конструкции, и воздействий, которые необходимо варьировать. Кроме того, в силу необходимости расчета различных по своей физической природе параметров состояния, целесообразно модель конструкции разделить на структурную составляющую (данные о самой конструкции) и функциональные составляющие (описание теплофизического, статического, динамического поведения, накопления повреждений и т. п.).

Из многочисленных видов математических моделей, используемых для решения частных задач на различных стадиях создания конструкций машиностроительного назначения, в настоящей работе рассматриваются только модели, формулируемые в ви-

де краевых задач математической физики. Такие модели позволяют ставить вычислительные эксперименты для исследования прочностных свойств конструкции на ранних стадиях проектирования, когда физические эксперименты ещё невыполнимы. Постановка всех этих задач связана с решением дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса, нелинейной теории упругости и строительной механики конструкций, теории устойчивости и колебаний.

Основной проблемой, возникающей при моделировании совместно протекающих процессов различной физической природы, является проблема сопряжения частных математических моделей. Реализация расчетной модели в этом случае представляет собой конгломерат программных объектов, которые относятся к основным типам: абстракций сущности (моделируемых объектов), абстракций поведения (моделируемых процессов) и абстракций виртуальных машин (алгоритмов, реализующих вычисления). На основе разработанной библиотеки классов был реализован ряд пакетов программ для решения частных задач. Отметим следующие из них.

Пакет программ для расчета концентрации напряжений [1] позволяет решать задачи статики и устойчивости пространственных конструкций типа орбренных оболочек из анизотропных материалов с произвольной схемой армирования.

Пакет программ для расчета огнестойкости [2] позволяет рассчитывать тепловые поля, статическое деформирование и накопление повреждений в строительных конструкциях типа пространственных и плоских рам из конструкционных металлов и армированных бетонов, что дает возможность вычислить предел огнестойкости при огневом поражении сооружения. При этом учитывается изменение физико-механических и теплофизических свойств материалов при повышении температуры. Это приложение характерно наличием двух взаимосвязанных видов функциональных моделей – теплофизической и статической, которые определяются на общей структурной модели рассчитываемого сооружения.

Особо отметим, что использование численных методов решения перечисленных краевых задач требует тщательного анализа как погрешности соб-

ственно численного решения, так и общей погрешности моделирования, связанной с введением упрощающих предположений о характере поведения материала и конструктивных элементов. Поэтому представляется необходимым анализ дискретных схем, позволяющий выяснить, что потенциально способна отразить дискретная модель того или иного физического процесса в силовой конструкции, а какие эффекты она не позволяет моделировать.

Одной из наиболее сложных проблем вычислительного эксперимента является расчет физических полей (таких, как поле температуры, распространение электрического тока, фильтрация и диффузия флюидов) при сосредоточенных воздействиях, что характерно в расчетах крупногабаритных конструкций. В работах [3, 4] было показано, что во всех этих случаях вариационная постановка корректна в смысле «слабого» решения, а порядок точности конечно-элементной расчетной схемы не зависит от порядка аппроксимирующих сплайнов.

Рассмотрим в качестве модельной краевую задачу электропроводности для уравнения Пуассона на кусочно-однородной области с граничными условиями первого, второго и третьего рода. Пусть в области Ω расположены n неоднородностей Ω_i с тензорами проводимости σ_i . Нахождение потенциала u в неоднородной среде сводится к решению эллиптической краевой задачи:

$$\begin{aligned} Lu \equiv \operatorname{div}(-\sigma \nabla u) &= f, \quad u|_{\Gamma_1} = u^*, \quad j_n|_{\Gamma_2} = j_n^*, \\ (ku + j_n)|_{\Gamma_3} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где f – плотность источника; σ – тензор физических свойств (проводимости); u – искомый потенциал; j – вектор плотности тока; n – вектор единичной нормали; k – коэффициент пропорциональности между потенциалом на границе и плотностью тока через границу области, причем u^* , j_n^* и k – известные величины. Во всей области предполагается непрерывность потенциала и плотности тока. Считаем, что все части границы Γ_i не имеют общих внутренних точек и в совокупности составляют границу Ω .

При рассмотрении точечных источников будем иметь:

$$f = \sum_v I_v \delta(x - x^v), \quad (2)$$

где I_v – сила тока источника, сосредоточенного в точке x_v ; $\delta(x - x_v)$ – дельта-функция Дирака.

Известно обоснование применения вариационной постановки задачи (1) в случае, когда правая часть уравнения принадлежит пространствам $L_2(\Omega)$

или $W_2^{-1}(\Omega)$. В нашем случае это не так. Для преодоления этой трудности учтем, что из известной в функциональном анализе теоремы вложения вытекает принадлежность правой части (1) соболевскому пространству $W_2^{-2}(\Omega)$. Тогда решение u , удовлетворяющее главным граничным условиям на Γ_1 , можно искать в пространстве $L_2(\Omega)$ как удовлетворяющее интегральному тождеству (слабое решение)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (uL\phi) dV - \int_{\Gamma_2} \phi j_n^* dS + \int_{\Gamma_3} \phi k u dS + \\ + \sum_i \int_{\Omega_i} u (\sigma_i \nabla \phi)_n dS = \int_{\Omega} f \phi dV \end{aligned} \quad (3)$$

для всех $\phi \in W_2^2(\Omega)$.

Однозначная разрешимость краевой задачи в слабом смысле (3) установлена в классической работе [5]. Там же установлено неравенство, позволяющее оценивать норму решения через норму правой части:

$$\|Lw\|_{-2} \geq K \|w\|_0, \quad (4)$$

где через $\|\cdot\|_s$ обозначена норма в пространстве $W_2^s(\Omega)$; K – некоторая константа, а действие оператора Lu на ϕ определено по правилу:

$$\begin{aligned} \langle Lu, \phi \rangle = \int_{\Omega} (uL\phi) dV - \int_{\Gamma_2} \phi j_n^* dS + \int_{\Gamma_3} \phi k u dS + \\ + \sum_i \int_{\Omega_i} u (\sigma_i \nabla \phi)_n dS. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим разбиение $\square \Omega_h$ области Ω , где h – максимальный диаметр конечных элементов. После выбора базисных сплайнов $\Phi_i(x)$ при требовании выполнения свойства δ -функции на узлах модели

$$(\delta_h(x - x_v), u) = u(x_v) \quad (6)$$

δ -аппроксимант δ_h совпадает с сопряженной функцией нагруженного узла. Это дает возможность рассчитывать параметры физических полей при произвольной структуре массива, в том числе – при сосредоточенном воздействии на границе раздела анизотропных включений.

Определим погрешность, возникающую при замене дельта-функции ее аппроксимантом δ_h . Пусть u – точное решение, т. е.

$$\langle Lu, \phi \rangle = \int_{\Omega} \delta \phi dV, \quad (7)$$

а u_h – решение приближенной задачи

$$\langle Lu^h, \phi \rangle = \int_{\Omega} \delta^h \phi dV. \quad (8)$$

Можно доказать, что погрешность решения при замене точной задачи приближенной при любом $0 < \varepsilon < 1/2$ удовлетворяет неравенству

$$\|u - u^h\|_0 \leq Ch^{1/2-\varepsilon}. \quad (9)$$

Исходная задача (7) отличается от приближенной (8) только измененной правой частью. Однако теперь правая часть непрерывна и можно применить вариационную постановку – решение краевой задачи удовлетворяет условию минимума функционала

$$I(u^h) = - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\nabla u, j) + f^h u^h \right] dV +$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \frac{1}{2} k u^2 dS - \int_{\Gamma_2} j_n^* u dS$$

и главным граничным условиям.

Погрешность приближенного решения u_k^h , полученного применением классического метода конечных элементов к точному решению u_h уравнения с измененной правой частью, для линейных и трилинейных элементов оценивается неравенством

$$\|u_k^h - u^h\|_0 \leq Ch^{1/2}. \quad (11)$$

Суммируя неравенства (9) и (11), оценим общую погрешность:

$$\|u - u_k^h\| \leq C_1 h^{1/2-\varepsilon} + C_2 h^{1/2}. \quad (12)$$

Первое слагаемое характеризует погрешность, получаемую при замене правой части аппроксимантом дельта-функции, а второе показывает степень сходимости при использовании различных типов конечных элементов. Увеличение k не изменяет первой составляющей погрешности, вторая же при $k > 2$ не поддается оценке. Таким образом, повышение порядка аппроксимации по сравнению с линейными и трилинейными конечными элементами (тетраэдрами и шестигранниками) не улучшает точности.

Влияние найденных физических полей на напряженно-деформированное состояние массива определяется известными экспериментально установленными физическими законами. Расчет полей напряжений в неоднородном массиве требует, как правило, нерегулярной сетки и связан с построением моделей, имеющих большое число (порядка 10^6) степеней свободы. Повышение экономичности расчета может быть достигнуто за счет учета условий сопряжения на границах раздела подобластей. Для этого предложена вариационная постановка задачи теории упругости на основе функционала, полученного из общего функционала Васидзу [6]:

$$\begin{aligned} \Pi_w(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \bar{\mathbf{p}}) = & \int_V \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{R} \bar{\mathbf{u}}) - \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{F}} \right\} dV - \\ & - \int_{S_2} \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{p}}^* dS - \int_{S_1} \bar{\mathbf{p}}^T (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^*) dS, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\bar{\mathbf{F}}$ – объёмные силы;

$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T$ – вектор перемещений;

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T$ – вектор (в смысле матричной алгебры) напряжений;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T$ – вектор деформаций;

$\bar{\mathbf{p}}^*$ – заданные внешние усилия на части границы S_2 ;

$\bar{\mathbf{u}}^*$ – заданные перемещения на части границы S_1 ;

$\mathbf{D}$ – матрица упругих характеристик материала;

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} - \text{матрич-}$$

ный дифференциальный оператор.

Условие стационарности функционала (13) следует из одновременной стационарности двух выпуклых частных функционалов:

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{\mathbf{u}}) = & \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{R} \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{D} (\mathbf{R} \bar{\mathbf{u}}) dV + \int_V (\mathbf{R} \bar{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\sigma}^0 dV - \\ & - \int_V \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{F}} dV - \int_{S_2} \bar{\mathbf{p}}^* \bar{\mathbf{u}} \cdot dS, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})) = \frac{1}{2} \int_V \{ (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{R} \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{R} \bar{\mathbf{u}}) \} dV. \quad (15)$$

Здесь (14) – функционал Лагранжа, минимум которого находится при главных граничных условиях в перемещениях, а (15) – работа невязки напряжений на невязке деформаций, которая минимизируется при точном выполнении условий сопряжения напряжений и деформаций на поверхности раздела.

Приведенные, а также другие теоретические разработки, использованы при реализации пакета программ математического моделирования сопряженных процессов и взаимодействия физических полей различной природы в неоднородных средах и пространственных конструкциях как из традиционных, так и из композиционных материалов. Пакет построен на основе объектной идеологии с широким использованием полиморфизма, что позволило создать гибкую настраиваемую структуру программ, удобную для решения связанных и сопряженных задач в широком спектре определяющих соотношений материалов. Объектная структура пакета приведена на рисунке 1.

Центральное место в программах пакета занимает объект «Функциональная модель», определяющий поведение моделируемой конструкции при приложении воздействий. Функциональная модель рассматривается как отображение вектора из пространства воздействий на вектор из пространства состояний. В рамках комплекса реализованы алгоритмы, наиболее отвечающие решаемым задачам: разностные и конечно-элементные схемы.

Остановимся на особенностях реализации методов, основанных на конечно-элементном представлении дискретных моделей. Конечный элемент как программная абстракция представляет собой полиморфный агрегат объектов, обеспечивающий доступ к данным, относящимся к элементу, и вычисление промежуточных объектов (параметров определяющих уравнений, параметров состояния и т. п.). За его формирование отвечает программный объект «Библиотека конечных элементов». Основная функция библиотеки – создание экземпляра конечного элемента, используя программные объекты структурной модели, таблицы характеристик элементов и базы материалов; заполнение полей данных конечного элемента, формирование местных осей, перевод координат узлов в местные оси и вычисление матрицы перехода от узловых переменных в местных осях элемента к переменным в главных осях узлов. В состав агрегата конечного элемента входят такие основные программные объекты, как аппроксиматор, интегратор, матрица упругости, для которых разработаны подклассы, реализующие различные способы расчета. Типы этих объектов задаются пользователем в таблице характеристик элементов, и в зависимости от выбранных характеристик при расчетах

используется определенный подкласс. Это позволяет гибко формировать алгоритмы решения краевых задач, изменяя вид и степень аппроксимирующих

полиномов, точность численного интегрирования и другие параметры конечных элементов.

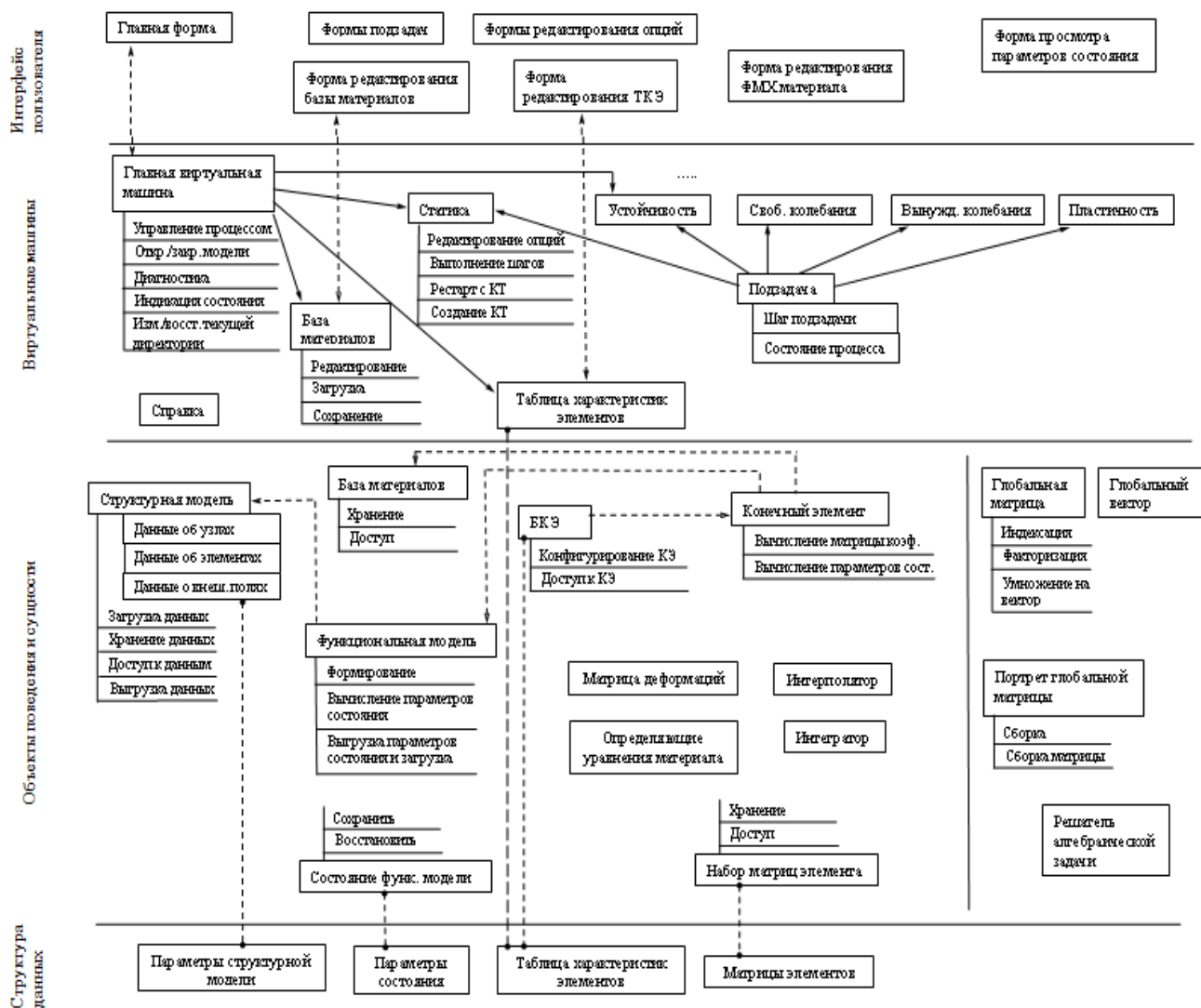


Рис. 1. Объектная структура пакета программ

Описанная идея оказалась достаточно плодотворной для реализации универсального исследовательского пакета, позволяющего получать численные решения разнородных по постановке задач. Приведем некоторые примеры реализованных моделей и полученных решений.

Для построения модели статического термоупругого деформирования пространственно армированных оболочек [7] использованы предположения о том, что поле температур известно и не зависит от деформаций, упругое деформирование изотермично, а температурные деформации являются начальными. Это даёт возможность использовать вариационный принцип Лагранжа для вывода разрешающих уравнений. Характеристики жесткости по толщине оболочки находятся численным интегрированием с учетом структуры армирования и температуры в каждой точке конструкции. Поскольку оболочка армирована под углом как к образующей, так и к нормали, температурные деформации поперечного сдвига не рав-

ны нулю; это вынуждает использовать сдвиговые модели типа Тимошенко. Дискретизация задачи выполнялась численно-аналитическим методом: разложением в ряд Фурье по окружной координате и представлением в виде эрмитова сплайна по меридиану.

Погрешность численного решения достаточно мала и легко оценивается в случае гладкой оболочки. Наличие поперечного силового набора или стыков разнородных материалов приводит к появлению осциллирующей погрешности. Используя технику представления аппроксиманта обобщенных функций, удастся показать, что погрешность определения перемещений имеет первый порядок, что влечет отсутствие сходимости в напряжениях. Причина этого явления аналогична эффекту Гиббса: решение отыскивается не в том функциональном пространстве, которому оно принадлежит.

Устранить указанный недостаток удастся с помощью введения дополнительных степеней свободы

в точках, в которых жесткость как функция меридиональной координаты разрывна. В этих точках имеются разрывы производных от перемещений. Получаемое численное решение имеет тот же порядок сходимости, что и для гладкой оболочки. Численные эксперименты показали, что учет разрывности производных от перемещений ведет к устранению эффекта осцилляции в местах примыкания

шпангоута к оболочке, на стыке разнородных частей в точке приложения сосредоточенной силы.

Таким образом, учет возможности разрыва производных от перемещений в некоторых специфических узлах меридиана оболочки приводит к уточнению конечно-элементной модели и соответственно к получению более достоверной информации о перемещениях и напряжениях в этих узлах и их окрестности.

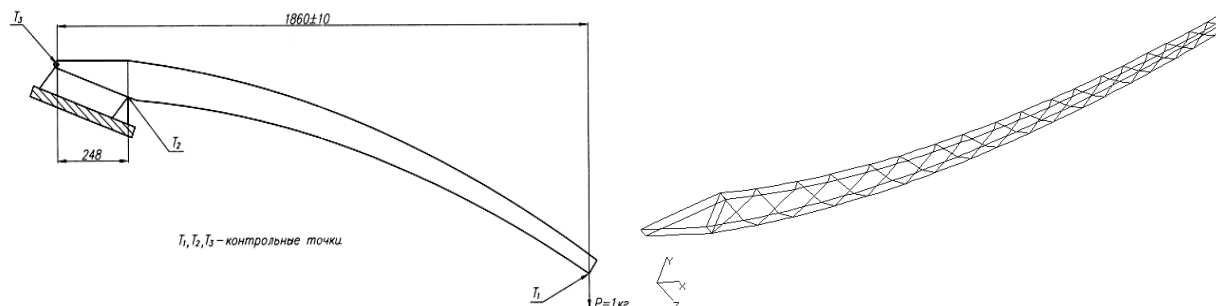


Рис. 2. Геометрия ферменной конструкции, условия закрепления и нагружения

Рассмотрим далее ферменную конструкцию, показанную на рисунке 2, изготовленную из углепластика. Для обеспечения минимальной массы конструкции при ограничении по статическому прогибу требовалось определить рациональную схему армирования и оптимальные размеры сечений ребер. Кроме того, требуется обеспечить резонансные характеристики и статическую устойчивость. Это потребовало учета нелинейности интегральных определяющих соотношений, обусловленных конечными прогибами. Кроме того, решение задачи оптимизации невозможно без обеспечения экономичности решения прямой задачи, выполняемого многократно при поиске экстремума целевой функции. В связи с этим расчет проводился при использовании «балочных» конечных элементов для моделирования как продольных, так и спиральных ребер, что уменьшает число степеней свободы модели и одновременно позволяет получить достаточную точность.

По-видимому, наибольший эффект от применения вычислительного эксперимента достигается при анализе механического поведения оребренных оболочек с концентраторами. Известные подходы, основанные на осреднении упругих свойств, заключаются в замене оребренной оболочки на конструктивно ортотропную гладкую оболочку. Это приводит к невозможности приемлемого описания концентрации напряжений в угловых точках на контуре концентратора, поскольку «точное» решение задачи в этом случае содержит сингулярность, не имеющую места в действительности. Выход состоит в полном дискретном моделировании оребренной оболочки, система ребер которой рассматривается как пространственная рама, усиленная обшивкой. Этот подход позволил провести достаточно полный анализ концентрации напряжений вблизи вырезов в оребренных оболочках из полимерных композиционных материалов [8]. Выяснено, что напряжения в основном определяются числом ребер, перерезанных вырезом, и слабо зависят от формы контура выреза. Найдены аппроксимирующие формулы зависимости коэффи-

циентов концентрации от параметров компенсирующих окантовок.

Литература

1. Каледин, В. О. Пакет программ для математического моделирования в механике конструкций [Текст] / В. О. Каледин, Д. И. Глечиков // Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии: сб. науч. тр. – Кемерово: ИНТ, 2008. – С. 342 – 347.
2. Страхов, В. Л. Влияние локального огневого поражения строительной конструкции на системную статическую и динамическую устойчивость объекта [Текст] / В. Л. Страхов, В. О. Каледин, Вл. О. Каледин // Городской строительный комплекс и безопасность жизнеобеспечения граждан: сб. докладов тематической научно-практической конференции. 9 – 10 ноября 2005 г., Москва, МГСУ. – М.: МГСУ, 2005. – Ч. 1. – С. 235.
3. Каледин, В. О. Теория и практика решения задач электроразведки постоянным током с использованием персонального компьютера [Текст] / В. О. Каледин, В. П. Ластовецкий, В. А. Шеметов // Техника и технология разработки месторождений полезных ископаемых: Междунар. науч.-техн. сб. Вып. 4. – Новокузнецк: СибГИУ, 1998. – С. 60 – 68.
4. Каледин, В. О. О математическом моделировании физических полей в сложно построенных массивах горных пород [Текст] / В. О. Каледин // Горный информационно-аналитический бюллетень. – М.: МГГУ, 2000. – № 10. – С. 15 – 19.
5. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 334 с.
6. Абовский, Н. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек [Текст] / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга. – М.: Наука, 1978. – 287 с.
7. Каледин, В. О. К исследованию осесимметричного термоупругого деформирования спирально армированных оболочек [Текст] / В. О. Каледин //

Современные проблемы механики деформируемого твердого тела. Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 2001. – Вып. 119. – С. 57 – 61.

8. Бурнышева, Т. В. Статическое деформирование композиционных сетчатых конструкций. Влияние обшивки на фоновые напряжения [Текст] /

Т. В. Бурнышева, В. О. Каледин, А. Б. Миткевич, Е. В. Решетникова // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – М.: ФГУП «НТЦ Информтехника», 2009. – Вып. 3(154)-4(155). – С. 5 – 10.